1. (a)
$$3x^2y + xy^2 - 18 = 0$$
$$\left(6xy + 3x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(y^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \qquad \text{1M}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-6xy - y^2}{3x^2 + 2xy} \qquad \text{1A}$$

(b) 設 $(a,\ b)$ 為切點的坐標。
$$\frac{-6ab - b^2}{3a^2 + 2ab} = -3 \qquad \text{1M}$$
$$-6ab - b^2 = -9a^2 - 6ab$$
$$b = \pm 3a \qquad \text{1M}$$

當 $b = -3a$ 時，$3x^2y + xy^2 - 18 = 3a^2(-3a) + a(-3a)^2 - 18 = -18 \neq 0$。
當 $b = 3a$ 時，
$$3a^2(3a) + a(3a)^2 - 18 = 0 \qquad \text{1M}$$
$$a^3 = 1$$
$$a = 1$$

$C$ 在 $(1,\ 3)$ 的切線平行於直線 $3x + y + 1 = 0$。
所求切線只有一條。
不同意該宣稱。 1A

2. (a)
$$f'(x) = \frac{2(x-5) - (2x-4)(1)}{(x-5)^2} \qquad \text{1M}$$
$$= \frac{-6}{(x-5)^2} \qquad \text{1A}$$

(b) $A$ 的坐標為 $(2,\ 0)$。 1A
切線的斜率 $= \dfrac{-6}{(2-5)^2} = -\dfrac{2}{3}$ 1M+1A
所求方程為
$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 2) \qquad \text{1M}$$
$$2x + 3y - 4 = 0 \qquad \text{1A}$$

3. (a)
$$y = \frac{25 - 4x^2}{5 + x^2}$$
$$= -4 + \frac{45}{5 + x^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{45(2x)}{(5 + x^2)^2} \qquad \text{1M}$$
$$= -\frac{90x}{(5 + x^2)^2} \qquad \text{1A}$$

(b) 設 $(a,\ b)$ 為切點。

$$\frac{b+4}{a+4}=\frac{-90a}{(5+a^2)^2} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\left(-4+\frac{45}{5+a^2}\right)+4}{a+4}=\frac{-90a}{(5+a^2)^2}$$

$$45(5+a^2)=-90a(a+4)$$

$$135a^2+360a+225=0$$

$$a=-1 \quad \text{或} \quad -\frac{5}{3} \qquad \text{1A}$$

當 $a=-1$ 時，$b=\frac{7}{2}$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{5}{2}$。
切線的方程為

$$y-\frac{7}{2}=\frac{5}{2}(x+1)$$

$$5x-2y+12=0 \qquad \text{1A}$$

當 $a=-\frac{5}{3}$ 時，$b=\frac{25}{14}$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{243}{98}$。
切線的方程為

$$y-\frac{25}{14}=\frac{243}{98}\left(x+\frac{5}{3}\right)$$

$$243x-98y+580=0 \qquad \text{1A}$$

4. (a) $10\ln(0-ek)=0^2+10$

$$\ln(-ek)=1$$

$$-ek=e$$

$$k=-1 \qquad \text{1A}$$

(b) $10\ln(x-y)=x^2+10$

$$\frac{10}{x-y}\left(1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=2x \qquad \text{1M+1A}$$

$$5-5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-xy$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x^2+xy+5}{5} \qquad \text{1A}$$

在 $A\,(0,\ -e)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{0+5}{5}=1$。 1M
所求方程為

$$y+e=1(x-0)$$

$$x-y-e=0 \qquad \text{1A}$$

5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4x+y^2\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(16)$

$4+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 1M

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2}{y}$

設 $L$ 與該曲線的切點的坐標為 $(a,\ b)$。

$\dfrac{b-0}{a-8}=-\dfrac{2}{b}$ 1M

$b^2=16-2a$

$(16-4a)=16-2a$ 1M

$a=0$

切點的坐標為 $(0,\ 4)$ 及 $(0,\ -4)$。 1A

該曲線在 $(0,\ 4)$ 的切線的方程為

$y-4=-\dfrac{2}{4}(x-0)$

$y=-\dfrac{x}{2}+4$ 1A

該曲線在 $(0,\ -4)$ 的切線的方程為

$y+4=-\dfrac{2}{(-4)}(x-0)$

$y=\dfrac{x}{2}-4$ 1A

$L$ 的方程為 $y=-\dfrac{x}{2}+4$ 或 $y=\dfrac{x}{2}-4$。

6. $3x^2-xy-y^2=9$

$6x-\left(y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 1M

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{6x-y}{x+2y}$

設 $(a,\ b)$ 為切點。

$\dfrac{6a-b}{a+2b}=\dfrac{5}{3}$ 1M+1A

$18a-3b=5a+10b$

$13a=13b$

$a=b$

代 $a=b$ 至 $3a^2-ab-b^2=9$。

$3a^2-a^2-a^2=9$ 1M

$a^2=9$

$a=\pm 3$

切點為 $(3,\ 3)$ 及 $(-3,\ -3)$。

所求方程為

$$y - 3 = \frac{5}{3}(x - 3) \quad 及 \quad y + 3 = \frac{5}{3}(x + 3) \qquad \text{1M}$$

$$5x - 3y - 6 = 9 \qquad 5x - 3y + 6 = 0 \qquad \text{1A}$$

7. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 16)^{-\frac{1}{2}}(2x) \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

設 $(a, b)$ 為切點。

$$\frac{b + 2}{a - 2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 16}} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - 16} + 2}{a - 2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 16}}$$

$$(a^2 - 16) + 2\sqrt{a^2 - 16} = a^2 - 2a$$

$$\sqrt{a^2 - 16} = 8 - a$$

$$a^2 - 16 = a^2 - 16a + 64$$

$$16a - 80 = 0$$

$$a = 5 \qquad \text{1A}$$

所求方程為

$$y + 2 = \frac{5}{\sqrt{5^2 - 16}}(x - 2) \qquad \text{1M}$$

$$5x - 3y - 16 = 0 \qquad \text{1A}$$

8. (a) $$x^3 y - 3x + 1 = 0$$

$$\left(3x^2 y + x^3 \frac{dy}{dx}\right) - 3 = 0 \qquad \text{1M}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 3x^2 y}{x^3} \qquad \text{1A}$$

(b) 設 $(a,\ b)$ 為切點的坐標。

$$\frac{b-7}{a+\frac{2}{3}} = \frac{3-3a^2b}{a^3} \quad \text{1M}$$

$$a^3b-7a^3 = 3a-3a^3b+2-2a^2b$$

$$4a^3b-7a^3 = 3a+2-2a^2b$$

$$4(3a-1)-7a^3 = 3a+2-2\left(\frac{3a-1}{a}\right)$$

$$12a^2-4a-7a^4 = 3a^2+2a-2(3a-1)$$

$$-7a^4+9a^2-2 = 0$$

$$a^2 = 1 \quad \text{或} \quad \frac{2}{7}$$

$$a = \pm 1 \quad \text{或} \quad \pm\sqrt{\frac{2}{7}} \quad \text{1M}$$

可得 $(a,\ b) = (1,\ 2)$ 或 $(-1,\ 4)$ 或 $\left(\sqrt{\frac{2}{7}},\ \frac{21}{2}-\frac{7\sqrt{14}}{4}\right)$ 或 $\left(-\sqrt{\frac{2}{7}},\ \frac{21}{2}+\frac{7\sqrt{14}}{4}\right)$。 1M

留意在四個點的切線的斜率均不相等。

$C$ 共有四條不同的切線通過點 $\left(-\frac{2}{3},\ 7\right)$。

不同意該宣稱。 1A

**備註：**

考生需要指出四個切點的切線均不相同，才能得出結論。

理論上有可能某曲線在某點的切線，會再與該曲線在另一點相切。

9. $x^2 = y^2-25$

$$2x = 2y\frac{dy}{dx} \quad \text{1M}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

設 $P\,(a,\ b)$ 為切點。

$$\frac{a}{b} = \frac{b-1}{a+1} \quad \text{1M}$$

$$a^2+a = b^2-b$$

$$(b^2-25)+a = b^2-b$$

$$a = 25-b \quad \text{1M}$$

點 $(25-b,\ b)$ 在 $C$ 上。

$$(25-b)^2 = b^2-25$$

$$b^2-50b+625 = b^2-25$$

$$b = 13$$

當 $b = 13$ 時，$a = 12$ 及 $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{13}$。 1M

所求方程為

$$y - 1 = \frac{12}{13}(x + 1)$$

$12x - 13y + 25 = 0$ 1A

10. (a) $\frac{dy}{dx} = -e^{-3x^{-2}} - xe^{-3x^{-2}}(6x^{-3})$ 1M

$= -e^{-3x^{-2}}(6x^{-2} + 1)$ 1A

$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-3x^{-2}}(6x^{-3})(6x^{-2} + 1) - e^{-3x^{-2}}(-12x^{-3})$

$= 6x^{-3}e^{-3x^{-2}}(1 - 6x^{-2})$ 1A

(b)
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$
$$6x^{-3}e^{-3x^{-2}}(1 - 6x^{-2}) = 0$$
$$1 - \frac{6}{x^2} = 0$$
$$x^2 = 6$$
$$x = \pm\sqrt{6}$$ 1M

| $x$ | $x < -\sqrt{6}$ | $-\sqrt{6} < x < 0$ | $0 < x < \sqrt{6}$ | $x > \sqrt{6}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{d^2y}{dx^2}$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

1M

$y = -xe^{-\frac{3}{x^2}}$ 的圖像有兩個拐點。

不同意該宣稱。 1A

11. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$。 1A

$$r(x) = 2x - 1 + \frac{x - 2}{(x - 1)^2}$$ 1M

斜漸近線為 $y = 2x - 1$。 1A

(b) $\frac{d}{dx}r(x) = 2 + \frac{(x - 1)^2 - 2(x - 2)(x - 1)}{(x - 1)^4}$ 1M

$= 2 + \frac{-x + 3}{(x - 1)^3}$ 1A

(c) $r''(x) = \frac{-(x - 1)^3 - 3(-x + 3)(x - 1)^2}{(x - 1)^6}$

$= \frac{2x - 8}{(x - 1)^4}$

$= \frac{2(x - 4)}{(x - 1)^4}$

當 $r''(x) = 0$ 時，$x = 4$。

| $x$ | $x < 1$ | $1 < x < 4$ | $x > 4$ |
|---|---|---|---|
| $r''(x)$ | $-$ | $-$ | $+$ |

1M

只有一個拐點在 $x = 4$。

同意該宣稱。 1A

12. (a) 垂直漸近線為 $x = 2$。 1A

$$y = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x - 2}$$
$$= 2x + 1 + \frac{6}{x - 2}$$ 1M

斜漸近線為 $y = 2x + 1$。 1A

(b) $C$ 與 $y$ 軸相交於 $(0,\ -2)$。

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{6}{(x-2)^2}$$ 1M

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2 - \frac{6}{(0-2)^2}$$ 1M
$$= \frac{1}{2}$$

所求方程為

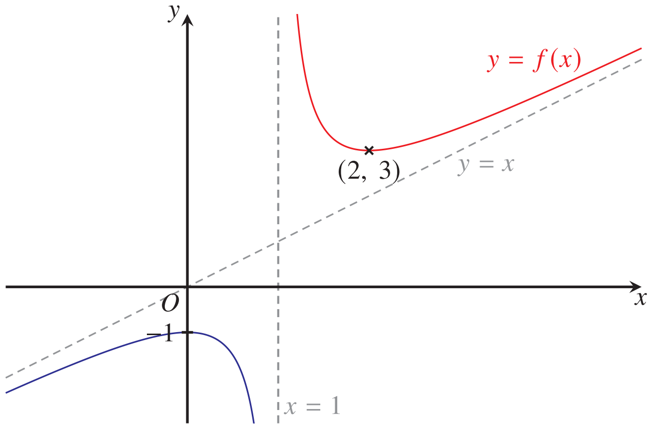
$$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 0)$$
$$x - 2y - 4 = 0$$ 1A

13. (a) 極大點為 $(0,\ -1)$。 1A

極小點為 $(2,\ 3)$。 1A

(b) （形狀正確） 1A

（全部正確） 1A




14. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(\ln x)}{x}$ 1A

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-x\cos(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) + \sin(\ln x)}{x^2}$$ 1M

$$= \frac{\sin(\ln x) - \cos(\ln x)}{x^2}$$ 1A

(b) 當 $f''(x) = 0$ 時，$\sin(\ln x) - \cos(\ln x) = 0$。

$$\sin(\ln x) = \cos(\ln x)$$

$$\tan(\ln x) = 0$$

$$\ln x = -\frac{3\pi}{4} \quad 或 \quad \frac{\pi}{4}$$

$$x = e^{-\frac{3\pi}{4}} \quad 或 \quad e^{\frac{\pi}{4}}$$ 1M

| $x$ | $e^{-\pi} < x < e^{-\frac{3\pi}{4}}$ | $e^{-\frac{3\pi}{4}} < x < e^{\frac{\pi}{4}}$ | $e^{\frac{\pi}{4}} < x < e^{\pi}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ | $+$ | $-$ | $+$ |

1M

共有兩個拐點分別在 $x = e^{-\frac{3\pi}{4}}$ 及 $x = e^{\frac{\pi}{4}}$。

同意該宣稱。 1A

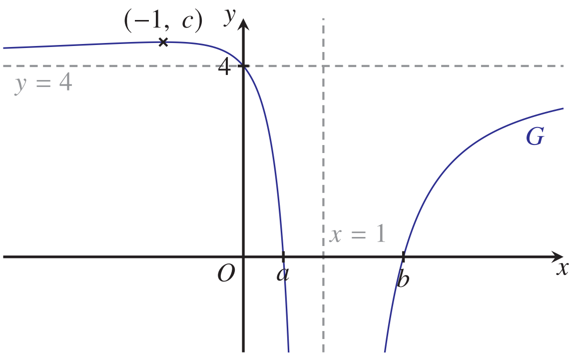
15. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$。 1A

水平漸近線為 $y = 4$。 1A

(b) （正確形狀） 1A

（極大點、截距） 1A

（全部正確） 1A




(c) 可得 $f(x) \geq 0$。

因此，$x \leq a$ 或 $x \geq b$。 1A

從上圖得知 $f(x) \leq c$。

$$y^2 \leq c$$

$$-\sqrt{c} \leq y\sqrt{c}$$ 1A

16. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$ 及 $x = 4$。 1A

水平漸近線為 $y = 0$。 1A

(b) (i) $f'(x)=\dfrac{A(x^2-5x+4)-Ax(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2}$ 1M

$=\dfrac{-Ax^2+4A}{(x^2-5x+4)^2}$

$y=f'(x)$ 的圖像通過 $\left(3,\ -\dfrac{5}{2}\right)$。

$-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-9A+4A}{(9-15+4)^2}$

$A=2$

因此，$f'(x)=\dfrac{-2x^2+8}{(x^2-5x+4)^2}$。 1A

(ii) $f'(x)=\dfrac{-2(x+2)(x-2)}{(x-1)^2(x-4)^2}$。

當 $f'(x)=0$ 時，$x=-2$ 或 2。 1M

| $x$ | $x<-2$ | $-2<x<1$ | $1<x<2$ | $2<x<4$ | $x>4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |

1M

極大點為 $(2,\ -2)$。 1A

17. (a) $f'(x)=\dfrac{(x-4)(2x)-x^2(1)}{(x-4)^2}$ 1M

$=\dfrac{x^2-8x}{(x-4)^2}$ 1A

(b) $\dfrac{x^2-8x}{(x-4)^2}=0$

$x=0$ 或 8 1A

| $x$ | $x<0$ | $0<x<4$ | $4<x<8$ | $x>8$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |

1M

$f(0)=3$ 及 $f(8)=19$

局部極大值為 3，局部極小值為 19。 1A

(c) 垂直漸近線為 $x=4$。 1A

$f(x)=3+\dfrac{x^2}{x-4}$

$=x+7+\dfrac{16}{x-4}$

斜漸近線為 $y=x+7$。 1A

不同意該宣稱。 1A

18. (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$ 1M

$= 3x(x + 2)$

$f''(x) = 6x + 6$

$= 6(x + 1)$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 0$ 或 $-2$。

| $x$ | $x < -2$ | $-2 < x < 0$ | $x > 0$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | + |

1M

極大點為 $(-2,\ 0)$。 1A

極小點為 $(0,\ -4)$。 1A

當 $f''(x) = 0$ 時，$x = -1$。

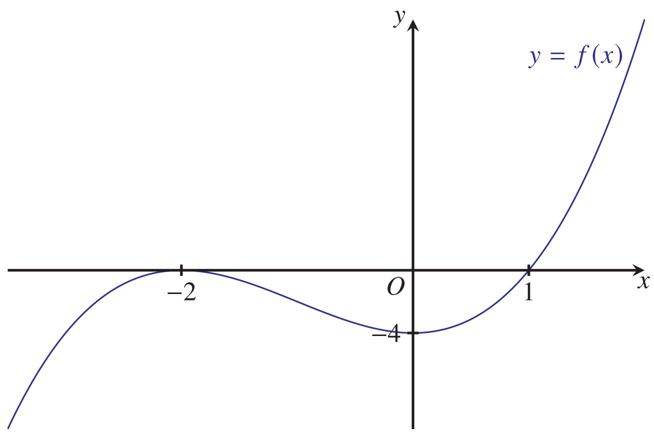
| $x$ | $x < -1$ | $x > -1$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | − | + |

1M

拐點為 $(-1,\ -2)$。 1A

(b) （形狀正確） 1A

（全部正確） 1A




19. (a) $f'(x) = \dfrac{(-2x-3)(x-1) - (-x^2-3x)(1)}{(x-1)^2}$ 1M

$= \dfrac{-(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = -1$ 或 $3$。

| $x$ | $x < -1$ | $-1 < x < 1$ | $1 < x < 3$ | $x > 3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | + | + | − |

1M

極大點為 $(3,\ -9)$。 1A

(b) 垂直漸近線為 $x = 1$。 1A

$f(x) = -x - 4 - \dfrac{4}{x-1}$ 1M

斜漸近線為 $y = -x - 4$。 1A

20. (a) $\frac{dy}{dx} = (4 - 6x)e^{2x} + (4x - 3x^2)(2e^{2x})$ 1M

$= (4 + 2x - 6x^2)e^{2x}$ 1A

$\frac{d^2y}{dx^2} = (2 - 12x)e^{2x} + (4 + 2x - 6x^2)(2e^{2x})$

$= (10 - 8x - 12x^2)e^{2x}$ 1A

(b) 當 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$，

$-12x^2 - 8x + 10 = 0$

$6x^2 + 4x - 5 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(6)(-5)}}{2(6)}$ 1M

$= \frac{-2 \pm \sqrt{34}}{6}$

| $x$ | $x < \frac{-2 - \sqrt{34}}{6}$ | $\frac{-2 - \sqrt{34}}{6} < x < \frac{-2 + \sqrt{34}}{6}$ | $x > \frac{-2 + \sqrt{34}}{6}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{d^2y}{dx^2}$ | $-$ | $+$ | $-$ |

1M

共有兩個拐點分別在 $x = \frac{-2 + \sqrt{34}}{6}$ 及 $x = \frac{-2 - \sqrt{34}}{6}$。

同意該宣稱。 1A

21. (a) 垂直漸近線為 $x = -2$。 1A

$f(x) = x - 4 + \frac{9}{x + 2}$ 1M

斜漸近線為 $y = x - 4$。 1A

(b) $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{9}{(x + 2)^2}$ 1M

代 $f'(x) = -8$。

$1 - \frac{9}{(x + 2)^2} = -8$

$(x + 2)^2 = 1$

$x = -1$ 或 $-3$

切點為 $(-1, 4)$ 及 $(-3, -16)$。

在點 $(-1, 4)$，切線的方程為

$y - 4 = -8(x + 1)$

$8x + y + 4 = 0$ 1A

在點 $(-3,\ -16)$，切線的方程為

$$y + 16 = -8(x + 3)$$

$$8x + y + 40 = 0 \qquad \text{1A}$$

22. (a)

$$f(-4) = -5$$

$$\frac{(-4)^2 + a(-4) + b}{-4 + 2} = -5$$

$$-4a + b = -6$$

$$f'(x) = \frac{(2x + a)(x + 2) - (x^2 + ax + b)(1)}{(x + 2)^2} \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 2a - b}{(x + 2)^2} \qquad \text{1A}$$

$$f'(-4) = 0$$

$$\frac{(-4)^2 + 4(-4) + 2a - b}{(-4 + 2)^2} = 0 \qquad \text{1M}$$

$$2a - b = 0$$

求解後，可得 $a = 3$ 及 $b = 6$。 1A

(b) 垂直漸近線為 $x = -2$。 1A

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{x + 2} \qquad \text{1M}$$

斜漸近線為 $y = x + 1$。 1A

(c) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2} = \dfrac{x(x + 4)}{(x + 2)^2}$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 0$ 或 $-4$。 1M

| $x$ | $x < -4$ | $-4 < x < -2$ | $-2 < x < 0$ | $x > 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | − | + |

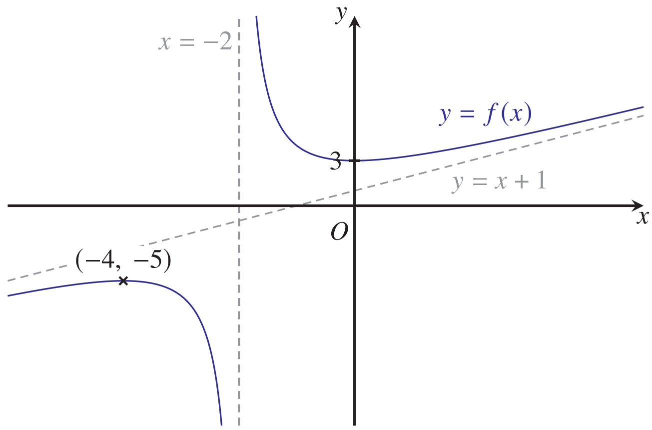
1M

極大點為 $(-4,\ -5)$。 1A

極小點為 $(0,\ 3)$。 1A

(d) （形狀） 1A

（全部正確） 1A




23. (a) 垂直漸近線為 $x = 3$。 1A

$$f(x) = \frac{2(x-1)^3}{(x-3)^2}$$

$$= 2x + 6 + \frac{24}{x-3} + \frac{16}{(x-3)^2}$$ 1M

斜漸近線為 $y = 2x + 6$。 1A

(b) $$f'(x) = 2 - \frac{24}{(x-3)^2} - \frac{32}{(x-3)^3}$$ 1M

$$= \frac{2(x-1)^2(x-7)}{(x-3)^3}$$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 1$ 或 $7$。 1M

| $x$ | $x < 1$ | $1 < x < 3$ | $3 < x < 7$ | $x > 7$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | – | + |

1M

極小點為 $(7,\ 27)$。 1A

沒有極大點。

(c) $$f''(x) = \frac{48}{(x-3)^3} + \frac{94}{(x-3)^4}$$

$$= \frac{48(x-1)}{(x-3)^4}$$

當 $f''(x) = 0$ 時，$x = 1$。

| $x$ | $x < 1$ | $1 < x < 3$ | $x > 3$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | – | + | + |

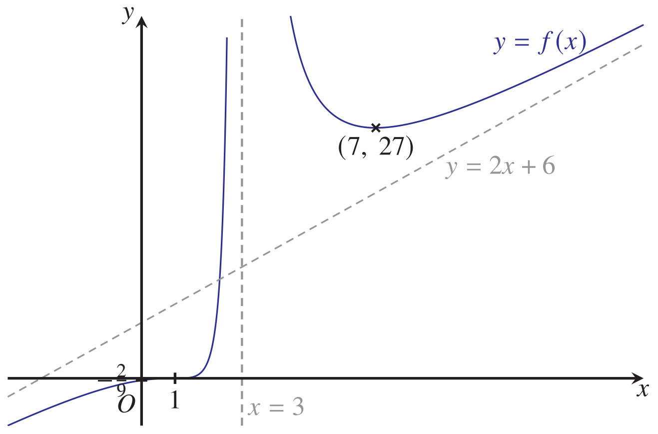
1M

拐點為 $(1,\ 0)$。 1A

(d) （漸近線） 1A

（形狀） 1A

（全部正確） 1A




24. (a) 垂直漸近線為 $x = 6$。 1A

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 6}$$
$$= x + 4 + \frac{9}{x - 6}$$ 1M

斜漸近線為 $y = x + 4$。 1A

(b) $$f(x) = x + 4 + \frac{9}{x - 6}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{(x - 6)^2}$$ 1M
$$= \frac{x^2 - 12x + 27}{(x - 6)^2}$$
$$= \frac{(x - 3)(x - 9)}{(x - 6)^2}$$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 3$ 或 $9$。

| $x$ | $x < 3$ | $3 < x < 6$ | $6 < x < 9$ | $x > 9$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |

1M

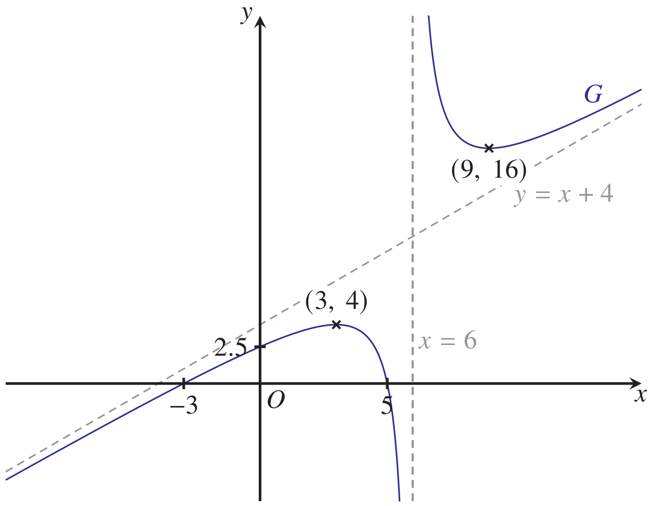
極大點為 $(3, 4)$。 1A
極小點為 $(9, 16)$。 1A

(c) $$f'(x) = 1 - \frac{9}{(x - 6)^2}$$

$$f''(x) = \frac{18}{(x - 6)^3}$$ 1M

留意對所有 $x \neq 6$，$f''(x) \neq 0$。
$G$ 沒有拐點。
同意該宣稱。 1A

(d) (正確形狀) 1A
(漸近線) 1A
(所有正確) 1A




25. (a) $f'(x) = \dfrac{(2x+k)(x-1)-(x^2+kx-2)(1)}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x^2-2x+3-k}{(x-1)^2}$ 1A

$f'(-1) = 0$

$(-1)^2 - 2(-1) + 2 - k = 0$

$k = 5$ 1A

可得 $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$。

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = -1$ 或 $3$。

因此，$h = 3$。 1A

(b) 極大點為 $(-1,\ 3)$。 1A

極小點為 $(3,\ 11)$。 1A

沒有拐點。 1A

(c) 垂直漸近線為 $x = 1$。 1A

$f(x) = \dfrac{x^2+5x-2}{x-1}$

$= x + 6 + \dfrac{4}{x-1}$

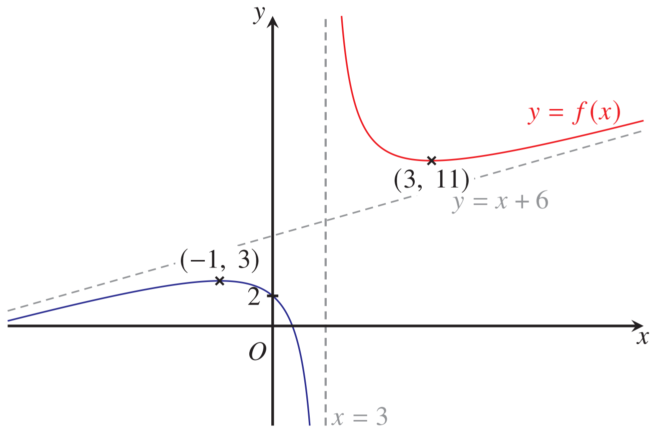
斜漸近線為 $y = x + 6$。 1A

(d) $y$ 截距為 2。 1A

（極大點、極小點） 1A

（漸近線） 1A

（全部正確） 1A




26. (a) $x^2 = AC^2 - 1^2$

$= (1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos\theta) - 1$ 1M

$x = \sqrt{1 - 2\cos\theta}$ 1

(b) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}(1 - 2\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}(2\sin\theta)\dfrac{d\theta}{dt}$ 1M

代入 $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ 及 $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{10}$ 。

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(1 - 2\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\left(\dfrac{1}{10}\right)$ 1M

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\sqrt{6}}{40}$

所求變率為 $\dfrac{\sqrt{6}}{40}$ m/s。 1A

27. (a) $v = 10e^{-u}$

$e^{-u} = \dfrac{v}{10}$

$u = -\ln\dfrac{v}{10}$ 1M

$D$ 及 $E$ 的坐標分別為 $(0,\ v)$ 及 $(0,\ 10)$。

$\triangle PDE$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}\left(-\ln\dfrac{v}{10}\right)(10 - v)$ 1M

$= \dfrac{1}{2}(v - 10)\ln\dfrac{v}{10}$ 1A

(b) $v = 10e^{-u}$

$\dfrac{dv}{dt} = -10e^{-u}\dfrac{du}{dt}$

設 $S$ 平方單位為 $\triangle PDE$ 的面積。

$S = \dfrac{1}{2}(v - 10)\ln\dfrac{v}{10}$

$\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{v - 10}{v} + \ln\dfrac{v}{10}\right]\dfrac{dv}{dt}$ 1M

代 $u = \ln 2$ 及 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}$，可得 $v = 10e^{-\ln 2} = 5$ 及 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -10e^{-\ln 2} \times \frac{1}{5} = -1$。 1M

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left[\frac{5-10}{5} + \ln\frac{5}{10}\right](-1) \quad \text{1M}$$

$$= \frac{1+\ln 2}{2} \quad \text{1A}$$

所求變率為每秒 $\frac{1+\ln 2}{2}$ 平方單位。

28. (a) 可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$。 1A

$$e^x = \frac{1}{u} \quad \text{1M}$$

$$x = -\ln u$$

當 $x = -\ln u$ 時，$y = \frac{1}{u}$。 1A

所求方程為

$$y - \frac{1}{u} = \frac{1}{u}(x + \ln u)$$

$$y = \frac{x}{u} + \frac{\ln u + 1}{u} \quad \text{1A}$$

(b) $P$ 及 $Q$ 的坐標分別為 $(u,\ \ln u)$ 及 $(u,\ e^u)$。

$$OP^2 = u^2 + (\ln u)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}OP^2}{\mathrm{d}t} = \left(2u + \frac{2\ln u}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \text{1M}$$

代 $u = 2$ 及 $\frac{\mathrm{d}OP^2}{\mathrm{d}t} = 2$。

$$2 = \left(4 + \frac{2\ln 2}{2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{4+\ln 2} \quad \text{1A}$$

設 $A$ 為 $\triangle OPQ$ 的面積。

$$A = \frac{1}{2}u(e^u - \ln u) \quad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left[(e^u - \ln u) + u\left(e^u - \frac{1}{u}\right)\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right|_{u=2} = \frac{1}{2}\left[(e^2 - \ln 2) + 2\left(e^2 - \frac{1}{2}\right)\right]\frac{2}{4+\ln 2}$$

$$= \frac{3e^2 - \ln 2 - 1}{4 + \ln 2} \quad \text{1A}$$

所求變率為每秒 $\frac{3e^2 - \ln 2 - 1}{4+\ln 2}$ 平方單位。

29. (a) 設 $r$ cm 為水面的半徑。

$$\frac{r}{h} = \frac{10}{\sqrt{26^2 - 10^2}} \quad \text{1M}$$

$$r = \frac{5h}{12}$$

$$A = \pi\left(\frac{5h}{12}\right)\sqrt{h^2 + \left(\frac{5h}{12}\right)^2} \quad \text{1M}$$

$$= \pi\left(\frac{5h}{12}\right)\sqrt{\frac{169h^2}{144}}$$

$$\frac{65}{144}\pi h^2 \quad \text{1}$$

(b) $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{5h}{12}\right)^2 h = 100\pi$ 1M

$$h^3 = 1728$$

$$h = 12 \quad \text{1A}$$

$$A = \frac{65}{144}\pi h^2$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{65}{72}\pi h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad \text{1M}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12} = \frac{65}{72}\pi(12)\left(\frac{6}{\pi}\right)$$

$$= 65 \quad \text{1A}$$

所求變率為 65 cm$^2$/s。

30. (a) $V = \frac{1}{3}\pi(h\tan 60^\circ)^2 h$ 1M

$$= \pi h^3 \quad \text{1A}$$

(b) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 3\pi h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ 1M

代入 $h = 1$ 及 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -3$。

$$-3 = 3\pi h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\pi}$$

水位正以 $-\frac{1}{\pi}$ cm/s 的速率下降。 1A

31. (a) 設 $A$ 為該圓的面積。

$$A = \left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}\right)^2 \pi$$

$$= \frac{\pi S}{4} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{4}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

$$4\pi = \frac{\pi}{4}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 16$$

$S$ 以勻率增加。 1A

(b) $$S = u^2 + 3^{2u-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \left[2u + 2(3^{2u-2})\ln 3\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

代 $u = 1$。

$$16 = (2 + 2\ln 3)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{8}{1+\ln 3}$$

設 $B$ 為 $\triangle OPQ$ 的面積

$$B = \left(\frac{3^u - 3^{u-1}}{2}\right)u \qquad \text{1M}$$

$$= u(3^{u-1})$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \left[3^{u-1} + u(3^{u-1})\ln 3\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

代 $u = 1$ 及 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{8}{1+\ln 3}$。

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = (1+\ln 3)\frac{8}{1+\ln 3}$$

$$= 8 \qquad \text{1A}$$

所求變率為每秒 8 平方單位。

32. (a) $P$ 的坐標為 $\left(u,\ \frac{e^{2u}}{2}\right)$。

$$y = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{2x} \qquad \text{1M}$$

設 $R$ 的坐標為 $(r,\ 0)$。

$$\frac{0 - \frac{e^{2u}}{2}}{r-u} = e^{2u} \qquad \text{1M}$$

$$r = u - \frac{1}{2} \qquad \text{1A}$$

$R$ 的坐標為 $\left(u-\frac{1}{2},\ 0\right)$。

(b) $Q$ 的坐標為 $\left(u,\ \cos\left(2u+\frac{\pi}{3}\right)\right)$。

$$\cos\left(2u+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$
$$2u+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$
$$u=\frac{\pi}{6} \qquad \text{1A}$$

設 $A$ 平方單位為 $\triangle PQR$ 在時間 $t$ s 的面積。

$$A=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2u}}{2}-\cos\left(2u+\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[u-\left(u-\frac{1}{2}\right)\right] \qquad \text{1M}$$
$$=\frac{1}{8}\left[e^{2u}-2\cos\left(2u+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{8}\left[2e^{2u}+4\sin\left(2u+\frac{\pi}{3}\right)\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$
$$0.5=\frac{1}{8}\left[2e^{\frac{\pi}{3}}+4\sin\frac{2\pi}{3}\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{e^{\frac{\pi}{3}}+\sqrt{3}} \qquad \text{1A}$$

所求變率為每秒 $\frac{2}{e^{\frac{\pi}{3}}+\sqrt{3}}$ 單位。

33. 該角錐的體積 $=\frac{1}{3}(4)^2(6)$

$=32\ \mathrm{cm}^3$

考慮當該容器的水佔一半容量。

$$16=32\left(\frac{h}{6}\right)^3$$
$$h=\sqrt[3]{108} \qquad \text{1M}$$

考慮 $V$ 與 $h$ 的關係。

設 $t$ s 為自水開始倒進該容器所經過的時間。

$$V=32\times\left(\frac{h}{6}\right)^3$$
$$V=\frac{4h^3}{27} \qquad \text{1A}$$
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{4h^2}{9}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

代 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=0.08$ 及 $h=\sqrt[3]{108}$。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{4(\sqrt[3]{108})^2}{9}(0.08) \qquad \text{1M}$$
$$\approx 0.806 \qquad \text{1A}$$

所求變率為 $0.806\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$。

34. (a) $V = \frac{1}{3}\pi(9)^2(12) \times \left(\frac{h}{12}\right)^3$ 1M

$= \frac{3}{16}\pi h^3$ 1

(b) (i) 所求體積

$= \frac{3}{16}\pi(12^3 - 10^3)$ 1M

$= \frac{273\pi}{2}\text{ cm}^3$ 1A

(ii) 設 $H$ cm 為在時間 $t$ s 時油的深度。

$\frac{3}{16}\pi h^3 + \frac{273\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi(h + H)^3$ 1M

$\frac{9}{16}\pi h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{9}{16}\pi(h + H)^2\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)$ 1M

代 $h = 1$。

$\frac{3}{16}\pi + \frac{273\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi(1 + H)^3$

$(1 + H)^3 = 729$

$H = 8$

代 $h = 1$、$H = 8$ 及 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -0.2$。

$\frac{9}{16}\pi(1)^2(-0.2) = \frac{9}{16}\pi(1 + 8)^2\left(-0.2 + \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)$

$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{16}{81}$ 1A

所求變率為 $\frac{16}{81}$ cm/s。

35. (a) 設 $r$ cm 為該容器內的水面的半徑。

$\frac{r}{h} = \tan 30°$

$r = \frac{h}{\sqrt{3}}$ 1M

$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 h$

$= \frac{\pi}{9}h^3$ 1

$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

$= \pi \cdot \frac{h}{\sqrt{3}}\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{2\pi}{3}h^2$ 1

(b) 當 $V = \frac{64\pi}{9}$，

$\frac{\pi}{9}h^3 = \frac{64\pi}{9}$

$h = 4$ 1A

當 $h = 4$，

$$V = \frac{\pi}{9}h^3$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{9}(3h^2)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

$$8\pi = \frac{\pi}{9}(48)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}$$

同時，

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{4\pi}{3}h\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{16\pi}{3}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= 8\pi$$

所求之率為 $8\pi$ cm$^2$/s。 1A

36. (a) $\tan\theta = \tan(\angle ARQ + \angle BRQ)$

$$= \frac{\tan\angle ARQ + \tan\angle BRQ}{1 - \tan\angle ARQ\tan\angle ABQ} \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{\frac{100}{100+x} + \frac{y}{100}}{1 - \left(\frac{100}{100+x}\right)\left(\frac{y}{100}\right)}$$

$$= \frac{10\,000 + 100y + xy}{100(100 + x - y)} \qquad \text{1}$$

(b) (i) 當 $t = 0$ 時，可得 $x = y = 0$。

$$\tan\theta = \frac{10\,000 + 100(0) + (0)(0)}{100(100 + 0 - 0)} \qquad \text{1M}$$

$$= 1$$

$\theta$ 的值維持不變。

$$\frac{10\,000 + 100y + xy}{100(100 + x - y)} = 1$$

$$10\,000 + 100y + xy = 10\,000 + 100x - 100y$$

$$200y + xy = 100x$$

$$y = \frac{100x}{x + 200} \qquad \text{1}$$

(ii) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{100(x + 200) - 100x}{(x + 200)^2} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{20\,000}{(x + 200)^2} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

當 $t = 50$ 時，$x = 4(50) = 200$。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{20\,000}{(200+200)^2} \times \frac{dx}{dt}$$
$$= \frac{1}{8} \times 4$$
$$= \frac{1}{2}$$

所求速率為 $\frac{1}{2}$ m/s。 1A

37. (a) $y = 2e^{\frac{x}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{2}}$ 1M

設 $R$ 的坐標為 $(r,\ 0)$。

$$\frac{0 - 2e^{\frac{u}{2}}}{r - u} = e^{\frac{u}{2}}$$ 1M

$$-2 = r - u$$

$$r = u - 2$$ 1A

$R$ 的坐標為 $(u - 2,\ 0)$。

(b) 設 $A$ 為 $\triangle PQR$ 的面積。

$$A = \frac{(2e^{\frac{u}{2}} - \ln(2u))(2)}{2}$$ 1M

$$= 2e^{\frac{u}{2}} - \ln(2u)$$

$$\frac{dA}{dt} = \left(e^{\frac{u}{2}} - \frac{1}{u}\right)\frac{du}{dt}$$ 1M

當 $Q$ 在 $x$ 軸上時，$u = \frac{1}{2}$。 1A

$$0.5 = \left(e^{\frac{1}{4}} - 2\right)\frac{du}{dt}$$ 1M

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2(e^{\frac{1}{4}} - 2)}$$ 1A

所求變率為每秒 $\frac{1}{2(e^{\frac{1}{4}} - 2)}$。

38. (a) 設 $A$ 為該圓的面積。

$$A = (a^2 + b^2)\pi$$ 1M

$$= S\pi$$

$$\frac{dA}{dt} = \pi\frac{dS}{dt}$$

$$4\pi = \pi\frac{dS}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = 4$$

$$> 0$$

$S$ 以固定速率遞增。 1A

(b) 設 $B$ 為 $\triangle OPQ$ 的面積。

$$B = \frac{1}{2}a(e^{a+1} - e^a)$$
$$= \frac{ae^a(e-1)}{2} \quad \text{1M}$$
$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{ae^a(e-1) + e^a(e-1)}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

由 (a)，$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 4$。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^2 + b^2\right) = 4$$
$$2a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + 2b\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = 4 \quad \text{1M}$$
$$2a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + 2e^a \cdot e^a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 4$$
$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{a + e^{2a}}$$

代入 $t = 3$。

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{e^3(3+1)(e-1)}{2} \cdot \frac{2}{3+e^6} \quad \text{1M}$$
$$= \frac{4e^3(e-1)}{3+e^6} \quad \text{1A}$$

所求變率為每秒 $\frac{4e^3(e-1)}{3+e^6}$ 平方單位。

39. (a) $y = e^{x+1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x+1} \quad \text{1M}$$

設 $(q,\ 0)$ 為 $Q$ 的坐標。

$$\frac{0 - e^{u+1}}{q - u} = e^{u+1} \quad \text{1M}$$
$$q = u - 1 \quad \text{1A}$$

$Q$ 的 $x$ 坐標為 $u - 1$。

(b) $$OP^2 = u^2 + (e^{u+1})^2$$
$$= u^2 + e^{2u+2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(OP^2\right) = \left(2u + 2e^{2u+2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
$$8 = (2u + 2e^{2u+2})\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \text{1M}$$

代 $u = 2$，可得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{2+e^6}$。

設 $A$ 平方單位為 $\triangle OPQ$ 的面積。

$$A = \frac{1}{2}(u-1)(e^{u+1}) \quad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(e^{u+1} + ue^{u+1} - e^{u+1})\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \text{1M}$$

$$= \frac{1}{2}ue^{u+1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

代 $u = 2$ 及 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{2+e^6}$。

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(2e^3)\cdot\frac{4}{2+e^6} \quad \text{1M}$$

$$= \frac{4e^3}{2+e^6} \quad \text{1A}$$

所求變率為每秒 $\frac{4e^3}{2+e^6}$ 平方單位。

40. (a) 設 $A$ 為 $\triangle OPQ$ 的面積。

$$A = \frac{1}{2}ue^{u-1} \quad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(e^{u-1} + ue^{u-1}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \text{1M}$$

$$2 = \frac{1}{2}e^{u-1}(1+u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{e^{u-1}(1+u)} \quad \text{1}$$

(b) 設 $p$ 單位為 $\triangle OPQ$ 的周界。

$$p = u + e^{u-1} + \sqrt{u^2 + e^{2(u-1)}} \quad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \left[1 + e^{u-1} + \frac{1}{2}(u^2 + e^{2u-2})^{-\frac{1}{2}}(2u + 2e^{2u-2})\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \text{1M}$$

當 $u = 1$ 時，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{e^0(1+1)} = 2$。 1M

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \left[1 + e^0 + \frac{1}{2}(1+e^0)^{-\frac{1}{2}}(2+2e^0)\right](2) \quad \text{1M}$$

$$= 2(2+\sqrt{2}) \quad \text{1A}$$

所求變率為每秒 $2(2+\sqrt{2})$。

41. (a) 設 $h$ cm 為該容器內的水深。

$$\frac{r}{h} = \tan\frac{\pi}{6} \quad \text{1M}$$

$$h = \sqrt{3}r$$

$$A = \pi r\sqrt{(\sqrt{3}r)^2 + r^2} \quad \text{1M}$$

$$= 2\pi r^2 \quad \text{1A}$$

(b) 設 $V\text{ cm}^3$ 為該容器內水的體積。

$$\frac{1}{3}\pi r^2(\sqrt{3}r) = 192\pi \qquad \text{1M}$$

$$r = 4\sqrt{3} \qquad \text{1A}$$

$$A = 2\pi r^2$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 4\pi r \times \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$-8\pi = 4\pi r \times \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{r}$$

當 $r = 4\sqrt{3}$ 時，

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(\sqrt{3}r)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3}\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

$$= \sqrt{3}\pi(4\sqrt{3})^2\left(-\frac{2}{4\sqrt{3}}\right)$$

$$= -24\pi \qquad \text{1A}$$

水的體積以 $24\pi\text{ cm}^3/\text{s}$ 的率減少。

42. (a) 設 $r$ cm 為水面的半徑。

$$\frac{r-6}{10-6} = \frac{h}{12} \qquad \text{1M}$$

$$r = \frac{h+18}{3}$$

考慮水的體積。

$$V = \frac{\pi}{3}h\left[6^2 + 6\left(\frac{h+18}{3}\right) + \left(\frac{h+18}{3}\right)^2\right] \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{\pi}{27}h(h^2 + 54h + 972)$$

$$= \frac{\pi}{27}(h^3 + 54h^2 + 972h) \qquad \text{1}$$

(b) (i)

$$V = \frac{\pi}{27}(h^3 + 54h^2 + 972h)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{27}(3h^2 + 108h + 972)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{\pi}{9}(h^2 + 36h + 324)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

當水面的半徑與水深相等時，

$$h = \frac{h+18}{3}$$

$$3h = h + 18$$

$$h = 9$$

當 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -10\pi$ 及 $h = 9$ 時，

$$-10\pi = \frac{\pi}{9}(9^2 + 36(9) + 324)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{10}{81} \qquad \text{1A}$$

所求變率為 $-\frac{10}{81}$ cm/s。

(ii) 當 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -10\pi$ 及 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -0.144$ 時，

$$-10\pi = \frac{\pi}{9}(h^2 + 36h + 324)(-0.144) \qquad \text{1M}$$

$$625 = h^2 + 36h + 324$$

$$0 = h^2 + 36h - 301$$

$h = 7$ 或 $-43$（捨去）

當 $h = 12$ 時，$V = 784\pi$。

當 $h = 7$ 時，$V = \frac{9793\pi}{27} < \frac{784\pi}{2}$。

超過一半的水已被抽出。

同意該宣稱。 1A

43. (a)

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3} = 13 \qquad \text{1M}$$

$$x^2 + y^2 - xy = 13$$

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \qquad \text{1M+1A}$$

$$(2y - x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-2x + y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{2x - y}{x - 2y}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1}$$

(b) 當 $x = 3$ 時，

$$3^2 + y^2 - 3y = 13 \qquad \text{1M}$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$y = 4$ 或 $-1$（捨去）

代 $x = 3$、$y = 4$ 及 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}$。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{2(3) - 4}{3 - 2(4)}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{1}{5} \qquad \text{1A}$$

所求變率為 $\frac{1}{5}$ m/s。

44. (a) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 13^2$

$$x^2 + 4y^2 = 676 \qquad \text{1A}$$

(b) 當 $y = 12$ 時，可得 $x = 10$。 1M

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2 + 4y^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(676)$$

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{1M}$$

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

代 $x = 10$、$y = 12$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}$。

$$10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4(12)\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{8}{5} \qquad \text{1A}$$

設 $S\,\mathrm{m}^2$ 為 $\triangle ABH$ 的面積。

$$S = \frac{1}{2}xy$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{1}{2}\left[12\left(-\frac{8}{5}\right) + 10\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= -\frac{119}{15} \qquad \text{1A}$$

所求變率為 $\frac{52}{5}$ m²/s。

45. (a) $PQ = e^{\frac{u}{2}} - \left(-e^{-\frac{u}{2}}\right)$ 1M

$$= e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}$$

設 $A$ 平方單位為長方形 $PQSR$ 的面積。

$$A = u\left(e^{\frac{u}{2}+e^{-\frac{u}{2}}}\right) \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \left[\left(e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}\right) + u\left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}\right)\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

當 $u = 2$，

$$e^2 = \left[\left(e + e^{-1}\right) + \left(e - e^{-1}\right)\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{2} \qquad \text{1A}$$

所求變率為每分鐘 $\frac{e}{2}$。

(b) 設 $p$ 單位為長方形 $PQSR$ 的周界。

$$p = 2\left(u + e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}\right) \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 2\left(1 + \frac{1}{2}e^{\frac{u}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

當 $u = 2$，

$$\frac{dp}{dt} = 2\left(1 + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-1}\right)\left(\frac{e}{2}\right)$$ 1M

$$= \frac{e^2}{2} + e - \frac{1}{2}$$ 1A

所求變率為每分鐘 $\frac{e^2}{2} + e - \frac{1}{2}$。

46. (a) 設 $r$ cm 為該容器內水面的半徑。

可得 $r = h\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}h$。 1M

$$A = \pi(\sqrt{3}h)\sqrt{h^2 + (\sqrt{3}h)^2}$$ 1M

$$= 2\sqrt{3}\pi h^2$$ 1

(b) 當該容器內的水的體積為 $216\pi$ cm$^3$。

$$\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3}h)^2 h = 216\pi$$ 1M

$$h = 6$$ 1A

從 (a)，可得 $A = 2\sqrt{3}\pi h^2$。

$$\frac{dA}{dt} = 4\sqrt{3}\pi h\frac{dh}{dt}$$ 1M

代 $\frac{dA}{dt} = -12\pi$ 及 $h = 6$。

$$-12\pi = 4\sqrt{3}\pi(6)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$ 1A

所求變率為 $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ cm/s。

47.（取消題目）

48. (a) $y = 8e^{-x}$

$$\frac{dy}{dx} = -8e^{-x}$$ 1M

設 $R$ 的坐標為 $(r,\ 0)$。

$$\frac{8e^{-u} - 0}{u - r} = -8e^{-u}$$ 1M

$$r = u + 1$$

$R$ 的坐標為 $(u + 1,\ 0)$。 1A

(b) 當 $Q$ 的 $y$ 坐標為 $-1$ 時，

$$-1 = 2\sin 2u$$
$$2u = -\frac{\pi}{6}$$
$$u = -\frac{\pi}{12} \qquad \text{1A}$$

設 $A$ 為 $\triangle PQR$ 的面積。

$$A = \frac{[(u+1)-u][8e^{-u} - 2\sin 2u]}{2} \qquad \text{1M}$$
$$= 4e^{-u} - \sin 2u$$
$$\frac{dA}{dt} = (-4e^{-u} - 2\cos 2u)\frac{du}{dt} \qquad \text{1M}$$
$$-2 = \left[-4e^{\frac{\pi}{12}} - 2\cos\frac{-\pi}{6}\right]\frac{du}{dt} \qquad \text{1M}$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{2}{4e^{\frac{\pi}{12}} + \sqrt{3}} \qquad \text{1A}$$

所求變率為每秒 $\dfrac{2}{4e^{\frac{\pi}{12}} + \sqrt{3}}$。

49. (a) $PQ = \sqrt{u^2+64} + \sqrt{(u-9)^2+16}$ 1M

$$\frac{dPQ}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2+64}} + \frac{u-9}{\sqrt{(u-9)^2+16}} \qquad \text{1M}$$
$$= \frac{u\sqrt{(u-9)^2+16} + (u-9)\sqrt{u^2+64}}{\sqrt{u^2+64}\sqrt{(u-9)^2+16}}$$
$$= \frac{u^2[(u-9)^2+16] - (u-9)^2(u^2+64)}{\sqrt{u^2+64}\sqrt{(u-9)^2+16}\left(u\sqrt{(u-9)^2+16} - (u-9)\sqrt{u^2+64}\right)}$$
$$= \frac{-48(u-6)(u-18)}{\sqrt{u^2+64}\sqrt{(u-9)^2+16}\left(u\sqrt{(u-9)^2+16} - (u-9)\sqrt{u^2+64}\right)}$$

對 $\dfrac{dPQ}{du} = 0$，可得 $u = 6$。 1M

因此，可得 $a = 6$。 1A

(b) (i) 設 $A$ 平方單位為長方形 $PQSR$ 的面積。

$$A = uPQ \qquad \text{1M}$$
$$\frac{dA}{du} = PQ + u\frac{dPQ}{du} \qquad \text{1M}$$

當 $u = 6$，

$$\frac{dA}{du} = \sqrt{6^2+64} + \sqrt{(6-9)^2+16} + 6(0)$$
$$= 15 \neq 0 \qquad \text{1M}$$

由此，當 $u = 6$ 時，$A$ 不達至其極小值。

不同意該宣稱。 1A

(ii) $OP = \sqrt{u^2 + (u^2 + 64)}$

$= \sqrt{2u^2 + 64}$

$\dfrac{\mathrm{d}OP}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2u}{\sqrt{2u^2+64}}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 1M

當 $u = 6$ 時，

$12 = \dfrac{2(6)}{\sqrt{2(6)^2+64}}\left(\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{u=6}\right)$

$\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{u=6} = 2\sqrt{34}$ 1M

設 $w$ 單位為長方形 $PQSR$ 的周界。

$w = 2(u + PQ)$ 1M

$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2\dfrac{\mathrm{d}PQ}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 1M

當 $u = 6$ 時，

$\left.\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right|_{u=6} = 2(2\sqrt{34}) + 2(0)(2\sqrt{34})$

$= 4\sqrt{34}$ 1A

所求變率為每秒 $4\sqrt{34}$ 單位。

50. (a) $A(\theta) = \dfrac{[(1-\sin\theta)+1](2-\cos\theta)}{2}$

$= \dfrac{(2-\sin\theta)(2-\cos\theta)}{2}$ 1A

$\dfrac{\mathrm{d}A(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{1}{2}[(-\cos\theta)(2-\cos\theta) + (2-\sin\theta)(\sin\theta)]$ 1M

$= \dfrac{1}{2}[2(\sin\theta-\cos\theta) - (\sin^2\theta - \cos^2\theta)]$

$= \dfrac{1}{2}(\sin\theta-\cos\theta)(2-\sin\theta-\cos\theta)$ 1

(b) (i) 對 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，可得 $\sin\theta < 1$ 及 $\cos\theta < 1$。 1M

$2 - \sin\theta - \cos\theta > 2 - 1 - 1$

$2 - \sin\theta - \cos\theta > 0$ 1

(ii) 當 $A(\theta) = 0$ 時，

$\sin\theta - \cos\theta = 0$ 1M

$\tan\theta = 1$

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$

| $\theta$ | $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{\mathrm{d}A(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ | $-$ | $+$ |

1M

$A(\theta)$ 在 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 達至極小值。 1A

所求之值

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(2 - \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{9 - 4\sqrt{2}}{4} \qquad \text{1A}$$

(c) 設 $t$ s 為時間。

$$\frac{\mathrm{d}A(\theta)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

當 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{10}$ 時，

$$\frac{\mathrm{d}A(\theta)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(2 - \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{10}\right) \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cdot \frac{4 - \sqrt{3} - 1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3}}{40}$$

所求變率為 $\dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{40}$ m$^2$/s。 1A

51. (a) $A$ 及 $B$ 的坐標分別為 $\left(h,\ (h - 18)^2 + 100\right)$ 及 $\left(h,\ -h^4 + 12\right)$。

$$AB = (h - 18)^2 + 100 - (-h^4 + 12) \qquad \text{1M}$$

$$= h^4 + h^2 - 36h + 412$$

$$\frac{\mathrm{d}AB}{\mathrm{d}h} = 4h^3 + 2h - 36 \qquad \text{1M}$$

$$= 2(h - 2)(2h^2 + 4h + 9)$$

當 $AB$ 達至其極小值時，$\dfrac{\mathrm{d}AB}{\mathrm{d}h} = 0$。

$$(h - 2)(2h^2 + 4h + 9) = 0 \qquad \text{1M}$$

$$h = 2 \quad 或 \quad 2h^2 + 4h + 9 = 0$$

考慮方程 $2h^2 + 4h + 9 = 0$，$\Delta = 4^2 - 4(2)(9) = -56 < 0$。

該方程沒有實根。

因此，可得 $a = 2$。 1A

(b) (i) 設 $p$ 單位為長方形 $ABDC$ 的周界。

$$p = 2(AB + h) \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = 2\frac{\mathrm{d}AB}{\mathrm{d}h} + 2 \qquad \text{1M}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h}\right|_{h=2} = 2(0) + 2 \qquad \text{1M}$$

$$= 2 \neq 0$$

當 $h = 2$ 時，$p$ 不達至其極小值。

不同意該宣稱。 1A

(ii) $OB = \sqrt{h^2 + (-h^4 + 12)^2}$

$$\frac{\mathrm{d}OB}{\mathrm{d}h} = \frac{2h + 2(-h^4 + 12)(-4h^3)}{2\sqrt{h^2 + (-h^4 + 12)^2}}$$ 1M

$$\left.\frac{\mathrm{d}OB}{\mathrm{d}h}\right|_{h=2} = \frac{4 + 2(-16 + 12)(-32)}{2\sqrt{4 + (-16 + 12)^2}}$$

$$= \frac{65}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\mathrm{d}OB}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}OB}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$-12 = \left(\frac{65}{\sqrt{5}}\right) \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=2}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=2} = -\frac{12\sqrt{5}}{65}$$ 1M

設 $S$ 平方單位為長方形 $ABDC$ 的面積。

$$S = (AB)h$$ 1M

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = h\frac{\mathrm{d}AB}{\mathrm{d}t} + AB\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$ 1M

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{h=2} = 2(0) + [2^4 + 2^2 - 36(2) + 412]\left(-\frac{12\sqrt{5}}{65}\right)$$

$$= -\frac{864\sqrt{5}}{13}$$ 1A

所求變率為每秒 $-\frac{864\sqrt{5}}{13}$ 平方單位。

52. (a) (i) (2, 16) 為 $C_1$ 的駐點。

$$y = ax + bx^3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a + 3bx^2$$

$$0 = a + 3b(2)^2$$ 1M

(2, 16) 為 $C_1$ 上的一點。

$$16 = 2a + b(2)^3$$ 1M

求解後，可得 $a = 12$ 及 $b = -1$。 1A

(ii) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 12 - 3x^2$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -6x$$ 1M

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=2} = -12 < 0$$

因此，(2, 16) 為 $C_1$ 的極大點。 1A

(iii) 當 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ 時，$x = 0$。

| $x$ | $x < 0$ | $x > 0$ |
| --- | --- | --- |
| $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ | $+$ | $-$ |

1M

拐點為 $(0,\ 0)$。 1A

(b) (i) $PQ = (12r - r^3) - \ln\left(12r - r^3\right)$

$= 12r - r^3 - \ln\left(12r - r^3\right)$ 1A

(ii) 設 $A$ 平方單位為 $\triangle OPQ$ 的面積。

$A = \dfrac{1}{2}r[12r - r^3 - \ln\left(12r - r^3\right)]$ 1M

$= \dfrac{1}{2}[12r^2 - r^4 - r\ln\left(12r - r^3\right)]$

$\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}\left[24r - 4r^3 - \ln\left(12r - r^3\right) - \dfrac{r(12 - 3r^2)}{12r - r^3}\right]\dfrac{dr}{dt}$ 1M

$\left.\dfrac{dA}{dt}\right|_{r=2} = \dfrac{1}{2}\left[24(2) - 4(2)^3 - \ln\left(12(2) - 2^3\right) - \dfrac{2(12 - 3(2)^2)}{12(2) - 2^3}\right](4)$ 1M

$= 32 - 2\ln 16$ 1A

所求變率為每分鐘 $32 - 2\ln 16$ 平方單位。

53. (a) $\angle POQ = \dfrac{\pi}{2}$

$\angle OQP = \pi - \dfrac{\pi}{2} - \theta = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

$\angle QCR = \pi - 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\theta$ 1M

$A = \pi(1)^2 \times \dfrac{2\theta}{2\pi} - \dfrac{1}{2}(1)^2 \sin 2\theta$ 1M+1M

$= \theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ 1

(b) $x = \dfrac{2}{\tan\theta}$ 1A

(c) 當 $x = 2\sqrt{3}$ 時，

$2\sqrt{3} = \dfrac{2}{\tan\theta}$

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 1A

考慮方程 $x = \dfrac{2}{\tan\theta}$。

$\tan\theta = \dfrac{2}{x}$

$\sec^2\theta\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{2}{x^2}\dfrac{dx}{dt}$ 1M

$\sec^2\dfrac{\pi}{6}\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{2}{(2\sqrt{3})^2}(-2)$ 1A

$\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{4}$

考慮方程 $A = \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$。

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \cos 2\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$ 1M

$$= \frac{1}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}$$ 1M

$$= \frac{1}{8}$$ 1A

所求變率為 $\frac{1}{8}$ m/s$^2$。

54. (a) $S$ 的坐標為 $\left(a,\ e^{a^2+a}\right)$。

$$y = e^{x^2+x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x^2+x}(2x+1)$$ 1M

設 $(r,\ 0)$ 為 $R$ 的坐標。

$$\frac{0 - e^{a^2+a}}{r-a} = e^{a^2+a}(2a+1)$$ 1M

$$r = a - \frac{1}{2a+1}$$ 1A

(b) $$A = \frac{1}{2}\left[a - \left(a - \frac{1}{2a+1}\right)\right]e^{a^2+a}$$ 1M+1M

$$= \frac{e^{a^2+a}}{2(2a+1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}a} = \frac{e^{a^2+a}(2a+1)(2a+1) - e^{a^2+a}(2)}{2(2a+1)^2}$$ 1M

$$= e^{a^2+a}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(2a+1)^2}\right]$$ 1A

(c) 留意 $ST = e^{a^2+a}$。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ST) \le 2$$

$$e^{a^2+a}(2a+1)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \le 2$$ 1M

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \le \frac{2}{(2a+1)e^{a^2+a}}$$

留意對 $a > \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2} - \frac{1}{(2a+1)^2} > 0$。

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}a}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$ 1M

$$= e^{a^2+a}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(2a+1)^2}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

$$\le e^{a^2+a}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(2a+1)^2}\right]\cdot\frac{2}{(2a+1)e^{a^2+a}}$$ 1M

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \le \frac{1}{2a+1} - \frac{2}{(2a+1)^3}$$

設 $f(a) = \dfrac{1}{2a+1} - \dfrac{2}{(2a+1)^3}$。

$$f'(a) = -\frac{2}{(2a+1)^2} + \frac{12}{(2a+1)^4}$$ 1M

$$= \frac{-2(4a^2+4a-5)}{(2a+1)^4}$$

當 $f'(a) = 0$ 時，$a = \dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$ 或 $\dfrac{-1-\sqrt{6}}{2}$（捨去）。 1M

| $a$ | $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$ | $a > \dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$ |
|---|---|---|
| $f'(a)$ | $+$ | $-$ |

1M

$f(a)$ 的極大值為 $f\left(\dfrac{-1-\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{9} < 0.3$。 1M

可得 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \le f(a) < 0.3$。

同意該宣稱。 1A

55. (a) (i) $T = \dfrac{\sqrt{3^2+x^2}}{10} + \dfrac{20-4-x}{24} + \dfrac{\sqrt{3^2+4^2}}{\left(\frac{600}{16-x}\right)}$ 1M

$$= \frac{\sqrt{9+x^2}}{10} - \frac{x}{20} + \frac{4}{5}$$ 1

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} - \dfrac{1}{20}$ 1M

$$= \frac{x}{10\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{20}$$

當 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0$ 時，

$$\frac{x}{10\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{20}$$

$$(2x)^2 = (\sqrt{9+x^2})^2$$

$$x^2 = 3$$

$x = \sqrt{3}$　或　$-\sqrt{3}$（捨去）

| $x$ | $0 < x < \sqrt{3}$ | $\sqrt{3} < x < 16$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ | $-$ | $+$ |

1M

$T$ 在 $x = \sqrt{3}$ 達至極小值。

$T$ 的極小值 $= \dfrac{\sqrt{9+3}}{10} - \dfrac{\sqrt{3}}{20} + \dfrac{4}{5}$

$$= \frac{3\sqrt{3}+16}{20}$$ 1A

$SM = \sqrt{3^2 + 3}$

$= \sqrt{12}$ km 1A

(b) (i) $SC = (\sqrt{12})(\sqrt{3}) = 6$ km 1M

$CN = \sqrt{3^2 + (16-6)^2} = \sqrt{109}$ km

$\sin\beta = \dfrac{3}{\sqrt{109}}$ 及 $\cos\beta = \dfrac{10}{\sqrt{109}}$。 1A

$$\frac{RN}{\sin\alpha} = \frac{CN}{\sin\angle CRN} \quad \text{1M}$$

$$\begin{aligned} RN &= \frac{\sqrt{109}\sin\alpha}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} \\ &= \frac{\sqrt{109}\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sqrt{109}\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha} \quad \text{1M} \\ &= \frac{\sqrt{109}\sin\alpha}{\sin\alpha\left(\frac{10}{\sqrt{109}}\right) + \cos\alpha\left(\frac{3}{\sqrt{109}}\right)} \\ &= \frac{109\tan\alpha}{10\tan\alpha + 3} \quad \text{1} \end{aligned}$$

(ii) $$\frac{\mathrm{d}RN}{\mathrm{d}t} = 109\frac{\sec^2\alpha(10\tan\alpha + 3) - 10\sec^2\alpha\tan\alpha}{(10\tan\alpha + 3)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \quad \text{1M}$$

$$= \frac{327\sec^2\alpha}{(10\tan\alpha + 3)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}RN}{\mathrm{d}t} = \frac{-24}{3600} = -\frac{1}{150} \text{ km/s}$$

$$-\frac{1}{150} = \frac{327\sec^2 1}{(10\tan 1 + 3)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \approx -0.0021$$

所求變率為 $-0.0021$ rad/s。 1A

56. (a) 該角錐的體積 $= \dfrac{1}{3}(12)^2(6) = 288 \text{ cm}^3$。

水面下的角錐的體積

$$= 288\left[1 - \left(\frac{6-h}{6}\right)^3\right] \quad \text{1M}$$

$$= \frac{4}{3}[6 - (6-h)][6^2 + 6(6-h) + (6-h)^2]$$

$$= \frac{4h^3}{3} - 24h^2 + 144h$$

$$V = 12h^2 - \left(\frac{4h^3}{3} - 24h^2 + 144h\right) \quad \text{1M}$$

$$= 24h^2 - \frac{4}{3}h^3 \quad \text{1}$$

(b) $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 48h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - 4h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad \text{1M}$$

代 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 1$，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 48h - 4h^2 > 140$$

$$-4h^2 + 48h - 140 > 0 \qquad \text{1M}$$

$$5 < h < 7 \qquad \text{1M}$$

藉考慮容器的高，$h \le 5$，因此不可能使 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} > 140$。

不同意該宣稱。 1A

(c) 代 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -(12 - h)(\ln h + 1)^2$，

$$-(12 - h)(\ln h + 1)^2 = (48h - 4h^2)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{(\ln h + 1)^2}{4h}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{2(\ln h + 1)\left(\frac{1}{h}\right)(h) - (\ln h + 1)^2}{-4h^2} \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{(\ln h + 1)(\ln h - 1)}{4h^2}$$

當 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right) = 0$，

$$\ln h = \pm 1$$

$$h = e \quad \text{或} \quad \frac{1}{e}$$

| $h$ | $0 < h < \frac{1}{e}$ | $\frac{1}{e} < h < e$ | $e < h < 5$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)$ | + | − | + |

1M

$\left.\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=\frac{1}{e}} = 0$ 及 $\left.\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=e} = -\dfrac{1}{e}$ 及 $\left.\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=5} = -\dfrac{(\ln 5 + 1)^2}{20}$.

當水深由 5 cm 減小至 $e$ cm，水深的變率由 $-\dfrac{(\ln 5 + 1)^2}{20}$ cm/s 減小至局部極小值 $-\dfrac{1}{e}$ cm/s。 1M

當水深由 $e$ cm 減小至 $\dfrac{1}{e}$ cm，水深的變率由 $-\dfrac{1}{e}$ cm/s 增加至局部極大值 0 cm/s。

當水深由 $\dfrac{1}{e}$ cm 減小至 0 cm，水深的變率減小。 1A

57. (a) $AD = 2\cos\theta + 2 + 2\cos\theta$ 1M

$$= (4\cos\theta + 2)\ \mathrm{m}$$

$$V = \left[\frac{1}{2}(AD + BC)(BX)\right](5)$$

$$= \frac{1}{2}(4\cos\theta + 2 + 2)(2\sin\theta)(5)$$ 1M

$$= 20(\sin\theta\cos\theta + \sin\theta)\ \mathrm{m}^3$$ 1

(b) $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 20[\sin\theta(-\sin\theta) + (\cos\theta)\cos\theta + \cos\theta]$$ 1M

$$= 20(-(1 - \cos^2\theta) + \cos^2\theta + \cos\theta)$$

$$= 20(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)$$

$$= 20(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

當 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$ 時， 1M

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ 或 $-1$（捨去）

$\theta = \frac{\pi}{3}$

| $\theta$ | $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}$ | + | − |

1M

$V$ 在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時最大。

所求 $\theta$ 的值為 $\frac{\pi}{3}$。 1A

(c) (i) 設 $h$ m 及 $Y$ m$^3$ 分別為水的深度及水的體積。

考慮平面 $ABCD$ 內水的橫切面。

水平面的長度

$$= \frac{h}{\tan\frac{\pi}{3}} + 2 + \frac{h}{\tan\frac{\pi}{3}}$$ 1M

$$= \left(\frac{2h}{\sqrt{3}} + 2\right)\ \mathrm{m}$$

考慮水的體積。

$$W = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2h}{\sqrt{3}} + 2 + 2\right)(h)\right](5)$$ 1M

$$= \frac{5h^2}{\sqrt{3}} + 10h$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{10h}{\sqrt{3}} + 10\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$ 1M

$$5 = \left[\frac{10}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 10\right]\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}$$ 1A

所求變率為 $\frac{1}{3}$ m/h。

(ii) 水平面的面積

$= \left(\frac{2h}{\sqrt{3}} + 2\right) \times 5$ 1M

$= \left(\frac{10h}{\sqrt{3}} + 10\right)\ \mathrm{m}^2$

留意 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ 為常數。

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{10h}{\sqrt{3}} + 10\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$= (\text{水平面的面積})\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

同意該宣稱。 1A

58. (a) $P$ 的坐標為 $(r,\ \ln(2r+1))$。

$$y = \ln(2x+1)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{2x+1}$$ 1M

設 $(q,\ 0)$ 為 $Q$ 的坐標。

$$\frac{0 - \ln(2r+1)}{q-r} = -1 \div \frac{2}{2r+1}$$ 1M

$$\frac{2\ln(2r+1)}{2r+1} = q - r$$

$$q = \frac{2\ln(2r+1)}{2r+1} + r$$ 1

(b) 設 $A$ 為 $\triangle PQR$ 的面積。

$$A = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\ln(2r+1)}{2r+1} + r\right) - r\right]\ln(2r+1)$$ 1M

$$= \frac{[\ln(2r+1)]^2}{2r+1}$$ 1A

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = \frac{(2r+1)(2)\left[\frac{2\ln(2r+1)}{2r+1}\right] - [\ln(2r+1)]^2(2)}{(2r+1)^2}$$ 1M

$$= \frac{2\ln(2r+1)[2 - \ln(2r+1)]}{(2r+1)^2}$$

當 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = 0$ 時，

$\ln(2r+1) = 0$ 或 $2$

$r = 0$（捨去） 或 $\frac{e^2-1}{2}$

| $r$ | $0 < r < \frac{e^2-1}{2}$ | $r > \frac{e^2-1}{2}$ |
|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}$ | + | − |

1M

當 $r = \dfrac{e^2-1}{2}$ 時，$A$ 為極大值。

所求面積

$$= \frac{\left[\ln\left(2\left(\frac{e^2-1}{2}\right)+1\right)\right]^2}{2\left(\frac{e^2-1}{2}\right)+1}$$

$$= \frac{4}{e^2}$$ 1A

(c) $OP = \sqrt{r^2 + [\ln(2r+1)]^2}$ 1M

$$\frac{\mathrm{d}OP}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{r^2+[\ln(2r+1)]^2}}\left[2r + \frac{4\ln(2r+1)}{2r+1}\right]\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$ 1M

當 $r = \dfrac{e-1}{2}$ 時，

$$\frac{\mathrm{d}OP}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{e-1}{2}\right)^2+(\ln e)^2}}\left[(e-1)+\frac{4\ln e}{e}\right]\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(e-1)^2+4}}\left(\frac{e^2-e+4}{e}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

考慮當 $y = \dfrac{e-1}{2}$ 時，$\triangle PQR$ 的面積的變率。

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{2\ln e[2-\ln e]}{e^2}\cdot\frac{e\sqrt{(e-1)^2+4}}{e^2-e+4}\cdot\frac{\mathrm{d}OP}{\mathrm{d}t}$$ 1M

$$= \frac{2\sqrt{(e-1)^2+4}}{e(e^2-e+4)}\cdot\frac{\mathrm{d}OP}{\mathrm{d}t}$$

留意 $0 \le \dfrac{\mathrm{d}OP}{\mathrm{d}t} \le \dfrac{e^2-e+4}{e}$。

$$0 \le \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \le \frac{2\sqrt{(e-1)^2+4}}{e(e^2-e+4)}\cdot\frac{e^2-e+4}{e}$$

$$0 \le \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \le \frac{2\sqrt{(e-1)^2+4}}{e^2}$$

$$0 \le \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} < \frac{6}{e^2}$$

該宣稱正確。 1A

**– 試卷完 –**