

$$1. \quad (a) \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{3k+2}$$

$$3k+2=8$$

$$k=2$$

1A

$$\frac{1}{4} = e^{2h}$$

$$\ln \frac{1}{4} = 2h$$

$$h = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4}$$

$$= -\ln 2$$

1A

(b) 所求面積

$$= \int_0^2 \left(e^{-x \ln 2} - \frac{2}{3x+2} \right) dx + \int_2^4 \left(\frac{2}{3x+2} - e^{-x \ln 2} \right) dx$$

1M

$$= \left[\frac{e^{-x \ln 2}}{-\ln 2} - \frac{2}{3} \ln |3x+2| \right]_0^2 + \left[\frac{2}{3} \ln |3x+2| + \frac{e^{-x \ln 2}}{-\ln 2} \right]_2^4$$

1M

$$\approx 0.260$$

1A

$$2. \quad (a) \quad \int y e^{-y} dy = -y e^{-y} + \int e^{-y} dy$$

1M

$$= -y e^{-y} - e^{-y} + \text{常數}$$

1A

$$(b) \quad 0 = \frac{(1-y)(e^y-1)}{e^y}$$

$$y=1 \quad \text{或} \quad 0$$

1A

所求面積

$$= \int_0^1 \frac{(1-y)(e^y-1)}{e^y} dy$$

1M

$$= \int_0^1 (1 - e^{-y} - y + y e^{-y}) dy$$

$$= \left[y + e^{-y} - \frac{y^2}{2} - y e^{-y} - e^{-y} \right]_0^1$$

1M

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

1A

$$3. \quad (a) \quad \int u(4^u) du = \frac{u(4^u)}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} \int 4^u du$$

1M

$$= \frac{u(4^u)}{\ln 4} - \frac{4^u}{(\ln 4)^2} + \text{常數}$$

1A

$$= \frac{u(4^u)}{2 \ln 2} - \frac{4^u}{4(\ln 2)^2} + \text{常數}$$

(b) 所求面積

$$= \int_{-1}^0 x^2 (4^x) dx \quad 1A$$

$$= \left[\frac{x^2(4^x)}{\ln 4} \right]_{-1}^0 - \frac{2}{\ln 4} \int_{-1}^0 x(4^x) dx \quad 1M$$

$$= \frac{1}{8 \ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{x(4^x)}{\ln 4} - \frac{4^x}{(\ln 4)^2} \right]_{-1}^0 \quad 1M$$

$$= \frac{3 - 2 \ln 2 - 2(\ln 2)^2}{16(\ln 2)^3} \quad 1A$$

4. (a) $\int u(21^u) du = \frac{1}{\ln 21} \left[u(21^u) - \int 21^u du \right] \quad 1M$

$$= \frac{u(21^u)}{\ln 21} - \frac{21^u}{(\ln 21)^2} + \text{常數} \quad 1A$$

(b) 設 $u = 2x$ 。則 $du = 2 dx$ 。 1M

所求面積

$$= \int_0^1 x(21^{2x}) dx \quad 1M$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 u(21^u) du$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{u(21^u)}{\ln 21} - \frac{21^u}{(\ln 21)^2} \right]_0^2 \quad 1M$$

$$= \frac{441}{2 \ln 21} - \frac{110}{(\ln 21)^2} \quad 1A$$

5. (a) $y = e^{h-x}$
 $\frac{dy}{dx} = -e^{h-x}$ 1A

考慮 C 在 $x = h$ 時的斜率。

$$-h = -e^{h-h}$$

$$h = -1 \quad 1A$$

(b) 所求面積

$$= \int_0^1 [e^{1-x} - (-x + 2)] dx \quad 1M$$

$$= \left[-e^{1-x} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1 \quad 1A$$

$$= e - \frac{5}{2} \quad 1A$$

6. (a) $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx \quad 1M+1M$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + \text{常數} \quad 1A$$

(b) $x^2 = x^2 \ln x$

$$x^2(1 - \ln x) = 0$$

$$x = e \quad \text{或} \quad 0 \quad (\text{捨去})$$

1A

所求面積

$$= \int_1^e (x^2 - x^2 \ln x) dx$$

1M

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} \right]_1^e$$

1M

$$= \frac{e^3 - 4}{9}$$

1A

7. (a) $y = x - 3$

1A

(b) 所求面積 $= \int_2^3 \left[\left(x - 3 + \frac{16}{x^2 - 4x + 7} \right) - (x - 3) \right] dx$

1M

$$= \int_2^3 \frac{16}{x^2 - 4x + 7} dx$$

$$= \int_2^3 \frac{16}{(x - 2)^2 + 3} dx$$

1M

設 $x - 2 = \sqrt{3} \tan \theta$ 。則 $dx = \sqrt{3} \sec^2 \theta d\theta$ 。

1M

所求面積 $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{16\sqrt{3} \sec^2 \theta}{(\sqrt{3} \tan \theta)^2 + 3} d\theta$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta$$

1M

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}\pi}{9}$$

1A

8. (a) $\int (x^2 + 1) \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) dx$

1M

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} - x + \text{常數}$$

1A

(b) 所求面積

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} (9x^2 + 1) \ln 3x dx$$

1M

設 $u = 3x$ 。則 $du = 3 dx$ 。

所求面積

$$= \frac{1}{3} \int_1^e (u^2 + 1) \ln u \, du \quad 1M$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{u^3}{3} + u \right) \ln u - \frac{u^3}{9} - u \right]_1^e \quad 1M$$

$$= \frac{2e^3}{27} + \frac{10}{27} \quad 1A$$

9. (a) 設 $y = x^2 + 3$ 。則 $du = 2x \, dx$ 。

$$y = \int \frac{-48x}{(x^2 + 3)^2} \, dx \quad 1M$$

$$= - \int \frac{24}{u^2} \, du$$

$$= \frac{24}{x^2 + 3} + C$$

Γ 通過 $(0, 2)$ 。

$$2 = \frac{24}{0 + 3} + C \quad 1M$$

$$C = -6$$

$$\Gamma \text{ 的方程為 } y = \frac{24}{x^2 + 3} - 6。 \quad 1A$$

$$(b) \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-48(x^2 + 3)^2 - (-48x)(2)(x^2 + 3)(2x)}{(x^2 + 3)^4} \quad 1M$$

$$= \frac{-48(x^2 + 3 - 4x^2)}{(x^2 + 3)^3}$$

$$= \frac{144(x + 1)(x - 1)}{(x^2 + 3)^3}$$

當 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 時， $x = -1$ 或 1 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	+	-	+

1M

Γ 的拐點為 $(-1, 0)$ 及 $(1, 0)$ 。

1A

(c) 設 $x = \sqrt{3} \tan \theta$ 。則 $dx = \sqrt{3} \sec^2 \theta \, d\theta$ 。

1M

所求面積

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{24}{x^2 + 3} - 6 \right) dx && 1M \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{24\sqrt{3} \sec^2 \theta}{3 \tan^2 \theta + 3} d\theta - 6 \left[x \right]_{-1}^1 \\
 &= 8\sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta - 12 \\
 &= 8\sqrt{3} \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - 12 \\
 &= \frac{8\sqrt{3}\pi}{3} - 12 && 1A
 \end{aligned}$$

10. (a) $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ 1M
 L 的方程為

$$\begin{aligned}
 y - \cos h &= -\sin h(x - h) \\
 y &= -\sin h(x - h) + \cos h
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^h [-\sin h(x - h) + \cos h - \cos x] dx && 1M \\
 &= \left[-\sin h \left(\frac{x^2}{2} - hx \right) + (\cos h)x - \sin x \right]_0^h && 1M \\
 &= \frac{1}{2}h^2 \sin h + h \cos h - \sin h && 1A
 \end{aligned}$$

(b) $\frac{dh}{dt} = 2^{-t} \ln 2$ 1M

$$\begin{aligned}
 \frac{dA}{dt} &= \left(h \sin h + \frac{1}{2}h^2 \cos h + \cos h - h \sin h - \cos h \right) \frac{dh}{dt} && 1M \\
 &= \frac{1}{2}h^2 \cos h \frac{dh}{dt} \\
 &= \frac{1}{2}(2^{-2t}) \cos(2^{-t}) \cdot (-2^{-t}) \ln 2 && 1M \\
 &= -\frac{\ln 2}{2} (\cos 2^{-t}) 2^{-3t}
 \end{aligned}$$

代 $t = 1$ 。

$$\begin{aligned}
 \frac{dA}{dt} &= -\frac{\ln 2}{2} \cos \frac{1}{2} \cdot 2^{-3} \\
 &= -\frac{1}{16} (\ln 2) \cos \frac{1}{2} && 1A
 \end{aligned}$$

11. (a) $y = e^{-\frac{x}{3}+2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}+2} \quad 1M$$

考慮 L 的斜率。

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{3} e^{-\frac{6}{3}+2} &= \frac{0-1}{c-6} && 1M \\
 c &= 9 && 1A
 \end{aligned}$$

(b) L 的方程為 $y = -\frac{x}{3} + 3$ 。 1M

所求面積

$$= \int_6^9 \left(e^{-\frac{x}{3}+2} - \left(-\frac{x}{3} + 3 \right) \right) dx$$
 1M

$$= \left[-3e^{-\frac{x}{3}+2} + \frac{x^2}{6} - 3x \right]_6^9$$
 1M

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{e}$$
 1A

12. $\cos x = \cos 2x$ 1M

$$\cos x = 2\cos^2 x - 1$$

$$0 = 2\cos^2 x - \cos x - 1$$
 1A

$$\cos x = 1 \quad \text{或} \quad -\frac{1}{2}$$

對 $0 \leq x < \frac{3\pi}{2}$ ，可得 $x = 0$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$ 。 1A

所求面積

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos x - \cos 2x) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\cos 2x - \cos x) dx$$
 1M

$$= \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} + \left[\frac{\sin 2x}{2} - \sin x \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}$$
 1A

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4}$$
 1A

13. (a) $f(x) = \frac{(3-2x)^2}{(x+1)^2}$

$$= 4 - \frac{20}{x+1} + \frac{25}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{20}{(x+1)^2} - \frac{50}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{10(2x-3)}{(x+1)^3}$$
 1A

$$f''(x) = \frac{20}{(x+1)^2} - \frac{50}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{-10(4x-11)}{(x+1)^4}$$
 1

(b) 當 $f'(x) = 0$ 時， $x = \frac{3}{2}$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$f'(x)$	+	-	+

1M

沒有極大點。

極小點為 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 。

1A

當 $f''(x) = 0$ 時, $x = \frac{11}{4}$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < \frac{11}{4}$	$x > \frac{11}{4}$
$f''(x)$	+	+	-

拐點為 $\left(\frac{11}{4}, \frac{4}{9}\right)$ 。

1A

(c) 垂直漸近線為 $x = -1$ 。

1A

$$f(x) = 4 - \frac{20}{x+1} + \frac{25}{(x+1)^2}$$

1M

水平漸近線為 $y = 4$ 。

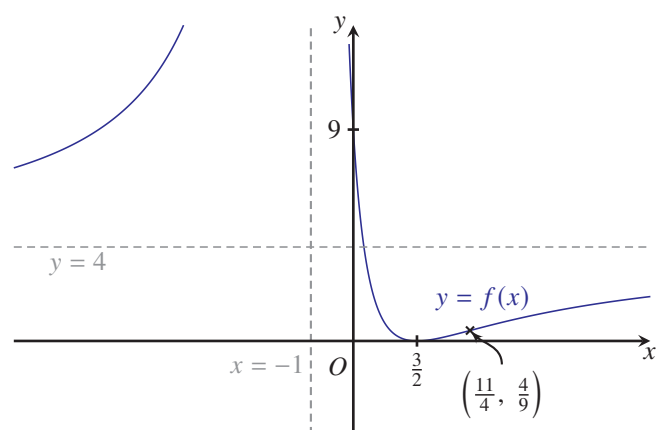
1A

(d) (形狀及漸近線)

1A

(特殊點及全確正確)

1A



(e) 所求面積

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} f(x) \, dx$$

1A

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \left(4 - \frac{20}{x+1} + \frac{25}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \left[4x - 20 \ln |x+1| - \frac{25}{x+1} \right]_0^{\frac{3}{2}}$$

1M

$$= 21 - 20 \ln \frac{5}{2}$$

1A

14. (a) 垂直漸近線為 $x = -3$ 。

1A

$$f(x) = \frac{-x^3 + 6x^2}{(x+3)^2}$$

$$= -x + 12 - \frac{63}{x+3} + \frac{81}{(x+3)^2}$$

1M

斜漸近線為 $y = -x + 12$ 。

1A

(b) $f'(x) = -1 + \frac{63}{(x+3)^2} - \frac{162}{(x+3)^3}$ 1M

$$f''(x) = \frac{-126}{(x+3)^3} + \frac{486}{(x+3)^4}$$

$$= \frac{-18(7x-6)}{(x+3)^4}$$
 1A

(c) $f'(x) = -1 + \frac{63}{(x+3)^2} - \frac{162}{(x+3)^3}$

$$= \frac{-x(x+12)(x-3)}{(x+3)^3}$$

當 $f'(x) = 0$ 時, $x = -12$ 或 0 或 3 。

x	$x < -12$	$-12 < x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$	-	+	-	+	-

1M

H 有兩極小點於 $x = -12$ 及 $x = 0$ 。

H 有一極大點於 $x = 3$ 。

H 有三個轉向點。

不同意該宣稱。

1A

(d) 當 $f''(x) = 0$ 時, $x = \frac{6}{7}$ 。

x	$x < -3$	$-3 < x < \frac{6}{7}$	$x > \frac{6}{7}$
$f''(x)$	+	+	-

1M

拐點為 $\left(\frac{6}{7}, \frac{16}{63}\right)$ 。

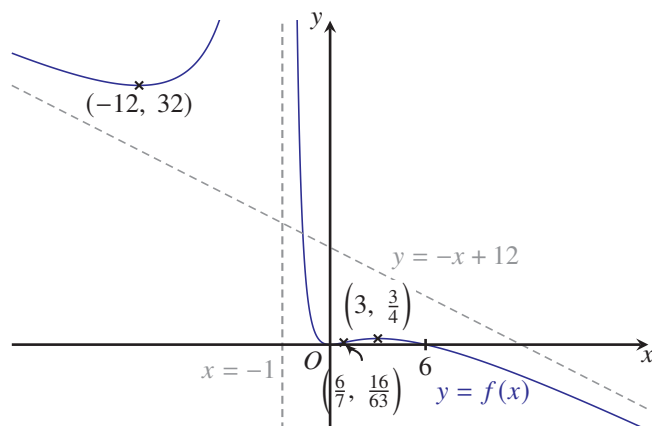
1A

(e) (極大點、極小點、拐點、截距)

1A

(全部正確)

1A



(f) 所求面積

$$= \int_0^6 \left(-x + 12 - \frac{63}{x+3} + \frac{81}{(x+3)^2} \right) dx$$
 1M

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 12x - 63 \ln|x+3| - \frac{81}{x+3} \right]_0^6$$
 1M

$$= 72 - 63 \ln 3$$
 1A

15. (a) 沒有垂直漸近線。

$$f(x) = x + 6 + \frac{11x + 2}{x^2 + 1} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = x + 6$ 。 1A

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad f'(x) &= \frac{3(x+2)^2(x^2+1) - (x+2)^3(2x)}{(x^2+1)^2} & 1M \\ &= \frac{(x+2)^2(x-1)(x-3)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

當 $f'(x) = 0$ 時, $x = -2$ 或 1 或 3 。 1M

x	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	+	-	+

1M

極小點為 $\left(3, \frac{25}{2}\right)$ 。 1A

極大點為 $\left(1, \frac{27}{2}\right)$ 。 1A

- (c) P 及 Q 的坐標分別為 $(0, 8)$ 及 $\left(1, \frac{27}{2}\right)$ 。

PQ 的方程為

$$\begin{aligned} \frac{y - \frac{27}{2}}{x - 1} &= \frac{8 - \frac{27}{2}}{0 - 1} \\ y &= \frac{11x}{2} + 8 \end{aligned} \quad 1M$$

所求面積

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left[f(x) - \left(\frac{11x}{2} + 8 \right) \right] dx & 1M \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{9x}{2} - 2 + \frac{11x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \right) dx \end{aligned}$$

設 $u = x^2 + 1$ 。則 $du = 2x dx$ 。 1M

設 $x = \tan \theta$ 。則 $dx = \sec^2 \theta d\theta$ 。 1M

所求面積

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{9x^2}{4} - 2x \right]_0^1 + \frac{11}{2} \int_1^2 \frac{du}{u} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta \\ &= -\frac{17}{4} + \frac{11}{2} \left[\ln |u| \right]_1^2 + 2 \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{17}{4} + \frac{11}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad 1A$$

16. (a) 垂直漸近線為 $x = -1$ 。 1A

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = x$ 。 1A

(b) (i) $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{6}{(x+1)^3}$ 1M

$$= \frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{(x+1)^3}$$

當 $f'(x) = 0$ 時, $x = 1$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	+

1M

當 $x = 1$ 時, C 有一極小點。

1

(ii) 所求坐標為 $\left(1, \frac{9}{4}\right)$ 。

1A

(c) (i) $b = \frac{0+0+0+4}{(0+1)^2}$

$$b = 4$$

1A

(ii) 所求面積

$$= \int_0^1 [4 - f(x)] dx$$

1M

$$= \int_0^1 \left(4 - x - \frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}\right) dx$$

1M

$$= \left[4x - \frac{x^2}{2} - \ln|x+1| + \frac{3}{x+1}\right]_0^1$$

1M

$$= 2 - \ln 2$$

1A

17. (a) $f(x) = \frac{(x-6)^3}{(x+6)^2}$

$$= x - 30 + \frac{432}{x+6} - \frac{1728}{(x+6)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{432}{(x+6)^2} + \frac{3456}{(x+6)^3}$$

1M

$$= \frac{(x+30)(x-6)^2}{(x+6)^3}$$

1A

$$f''(x) = \frac{864}{(x+6)^3} - \frac{10368}{(x+6)^4}$$

$$= \frac{864(x-6)}{(x+6)^4}$$

1A

(b) 當 $f'(x) = 0$ 時, $x = -30$ 或 6 。

x	$x < -30$	$-30 < x < -6$	$-6 < x < 6$	$x > 6$
$f'(x)$	+	-	+	+

1M

極大點為 $(-30, -81)$ 。

H 有 1 個轉向點。

1A

(c) 垂直漸近線為 $x = -6$ 。

1A

$$f(x) = x - 30 + \frac{432}{x+6} - \frac{1728}{(x+6)^2}$$

1M

斜漸近線為 $y = x - 30$ 。

1A

(d) (i) 可得 $f(3) = -\frac{1}{3}$ 及 $f'(3) = \frac{11}{27}$ 。

1M

所求方程為

$$\frac{y + \frac{1}{3}}{x - 3} = \frac{11}{27}$$

$$y = \frac{11x}{27} - \frac{14}{9}$$

1A

(ii) 所求面積

$$= \int_3^{\frac{42}{11}} \left[\left(\frac{11x}{27} - \frac{14}{9} \right) - f(x) \right] dx + \int_{\frac{42}{11}}^6 [-f(x)] dx$$

$$= \int_3^{\frac{42}{11}} \left(\frac{11x}{27} - \frac{14}{9} \right) dx - \int_3^6 \left(x - 30 + \frac{432}{x+6} - \frac{1728}{(x+6)^2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{11x^2}{54} - \frac{14x}{9} \right]_3^{\frac{42}{11}} - \left[\frac{x^2}{2} - 30x + 432 \ln |x+6| + \frac{1728}{x+6} \right]_3^6$$

$$= \frac{1368}{11} + 432 \ln \frac{3}{4}$$

1M

1M

1A

18. (a) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

$$= x - 5 + \frac{12}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{12}{(x+1)^2} + \frac{16}{(x+1)^3}$$

1M

$$= \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

1

$$f''(x) = \frac{24}{(x+1)^3} - \frac{48}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

1A

(b) 當 $f'(x) = 0$ 時, $x = 1$ 或 -5 。

x	$x < -5$	$-5 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	+	+

1M

極大點為 $\left(-5, -\frac{27}{2}\right)$ 。

1A

沒有極小點。

當 $f''(x) = 0$ 時, $x = 1$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	-	+

1M

拐點為 $(1, 0)$ 。

1A

(c) (i) $f'(3) = \frac{1}{2}$

所求方程為

$$\frac{y - \frac{1}{2}}{x - 3} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} - 1$$

1A

(ii) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

當 $1 < x < 3$ 時，可得 $(x-1)^3 > 0$ 及 $(x+1)^2 > 2$ 。

因此， $f(x) > 0$ 及在區間 $(1, 3)$ 內， G 在 x 軸以上。

1

當 $1 < x < 3$ 時， $f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4} > 0$ 。

G 在區間 $(1, 3)$ 內為凹以上的。

L 是 G 在 $x = 3$ 的切線。

因此， G 在 L 之上。

1

(iii) 所求面積

$$= \int_1^3 f(x) dx - \int_2^3 \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$$

1M

$$= \int_1^3 \left(x - 5 + \frac{12}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2}\right) dx - \int_2^3 \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 5x + 12 \ln|x+1| + \frac{8}{x+1}\right]_1^3 - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_2^3$$

1M

$$= 12 \ln 2 - \frac{33}{4}$$

1A

19. (a) $f(x) = \frac{x^2 + cx - 5}{x + 3}$

$$= x + c - 3 + \frac{4 - 3c}{x + 3}$$

斜漸近線為 $y = x + c - 3$ 。

1M

$$1 = 8 + c - 3$$

$$c = -4$$

1A

(b) $f(x) = x - 7 + \frac{16}{x + 3}$

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{(x + 3)^2}$$

1M

$$= \frac{(x + 7)(x - 1)}{(x + 3)^2}$$

1A

(c) 當 $f'(x) = 0$ 時， $x = -7$ 或 1 。

1M

x	$x < -7$	$-7 < x < -3$	$-3 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

極大點為 $(-7, -18)$ 。

1A

極小點為 $(1, -2)$ 。

1A

(d) R 的面積

$$= \int_0^m (x + 9 - f(x)) dx \quad 1M$$

$$= \int_0^m \left(16 - \frac{16}{x+3} \right) dx$$

$$= \left[16x - 16 \ln |x+3| \right]_0^m \quad 1M$$

$$= 16m - 16 \ln(m+3) + 16 \ln 3 \quad 1A$$

$$< 16m - 16 \ln 3 + 16 \ln 3$$

$$= 16m$$

R 的面積小於 $16m$ 。 1A

20. (a) $y = \sqrt{24 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(24 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \quad 1M$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{24 - x^2}}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=3\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{24 - (3\sqrt{2})^2}}$$

$$= -\sqrt{3}$$

L 的方程為

$$\frac{y - \sqrt{6}}{x - 3\sqrt{2}} = -\sqrt{3} \quad 1M$$

$$y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{6} \quad 1A$$

(b) (i) $\left(3\sqrt{k - x^2} \right)^2 = \left(-\sqrt{3}x + 4\sqrt{6} \right)^2 \quad 1M$

$$9(k - x^2) = 3x^2 - 24\sqrt{2}x + 96$$

$$0 = 12x^2 - 24\sqrt{2}x + (96 - 9k)$$

L 為 C_1 的切線。

$$(24\sqrt{2})^2 - 4(12)(96 - 9k) = 0$$

$$432k - 3456 = 0$$

$$k = 8$$

代 $k = 8$ 。

$$0 = 12x^2 - 24\sqrt{2}x + 24$$

$$0 = 12(x - \sqrt{2})^2$$

$$x = \sqrt{2}$$

L 為 C_1 在 $x = \sqrt{2}$ 的切線。

1

$$(ii) \quad (3\sqrt{8-x^2})^2 = (\sqrt{24-x^2})^2 \quad 1M$$

$$9(8-x^2) = 24-x^2$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \sqrt{6} \quad \text{或} \quad -\sqrt{6} \quad (\text{捨去})$$

$$\text{所求標為 } (\sqrt{6}, 3\sqrt{2})。 \quad 1A$$

(iii) 所求面積

$$= \int_2^{\sqrt{6}} (-\sqrt{3}x + 4\sqrt{6} - 3\sqrt{8-x^2}) dx + \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} (-\sqrt{3}x + 4\sqrt{6} - \sqrt{24-x^2}) dx \quad 1M+1A$$

$$= \int_2^{3\sqrt{2}} (-\sqrt{3}x + 4\sqrt{6}) dx - 3 \int_2^{\sqrt{6}} \sqrt{8-x^2} dx - \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \sqrt{24-x^2} dx$$

$$\text{考慮 } \int_2^{\sqrt{6}} \sqrt{8-x^2} dx。 \text{ 設 } x = \sqrt{8} \sin \theta。 \text{ 則 } dx = \sqrt{8} \cos \theta d\theta。 \quad 1M$$

$$\int_2^{\sqrt{6}} \sqrt{8-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{8-8\sin^2 \theta} \cdot \sqrt{8} \cos \theta d\theta$$

$$= 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \quad 1M$$

$$= 4 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -2 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{考慮 } \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \sqrt{24-x^2} dx。$$

$$\text{設 } x = \sqrt{24} \sin \beta。 \text{ 則 } dx = \sqrt{24} \cos \beta d\beta。$$

$$\int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \sqrt{24-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{24-24\sin^2 \beta} \cdot \sqrt{24} \cos \beta d\beta$$

$$= 24 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \beta d\beta$$

$$= 12 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\beta) d\beta$$

$$= 12 \left[\beta + \frac{\sin 2\beta}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\pi$$

所求面積

$$= \left[-\frac{\sqrt{3}x^2}{2} + 4\sqrt{6}x \right]_2^{3\sqrt{2}} - 3 \left(-2 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right) - 2\pi$$

$$= 6 + 14\sqrt{3} - 8\sqrt{6} - 3\pi \quad 1A$$

$$21. (a) \quad f'(x) = -2xe^{-x} + (p - x^2)(-e^{-x})$$

$$= (-p - 2x + x^2)e^{-x} \quad 1A$$

$$f''(x) = (-2 + 2x)e^{-x} + (-p - 2x + x^2)(-e^{-x})$$

$$= (-2 + p + 4x - x^2)e^{-x} \quad 1A$$

(b) H 有兩拐點，則 $f''(x) = 0$ 有至少兩個相異實根。
由於 $e^{-x} \neq 0$ ，方程 $-2 + p + 4x - x^2 = 0$ 有兩個相異實根。

$$\Delta = 4^2 - 4(-1)(-2 + p) > 0 \quad 1M$$

$$p > -\frac{9}{4} \quad 1A$$

(c) (i) 設 α 及 β 分別為兩拐點的 x 坐標。
可得 $\alpha + \beta = 4$ 及 $\alpha\beta = 2 - p$ 。 1M

$$(\alpha - \beta)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 20 \quad 1M$$

$$4^2 - 4(2 - p) = 20$$

$$p = 3 \quad 1$$

可得 $f'(x) = (x^2 - 2x - 3)e^{-x} = (x - 3)(x + 1)e^{-x}$ 。

當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 3$ 或 -1 。

由於 $f''(3) = 4e^{-3} > 0$ 及 $f''(-1) = -4e < 0$ ，

H 的極大值點為 $(-1, 2e)$ ；

H 的極小值點為 $(3, -6e^{-3})$ 。 1A

(ii) 面積 $= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2)e^{-x} dx$ 1M

$$= \left[(x^2 - 3)e^{-x} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} - 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} xe^{-x} dx \quad 1M$$

$$= 0 + 2 \left[xe^{-x} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} - 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} e^{-x} dx$$

$$= 2\sqrt{3}(e^{-\sqrt{3}} + e^{\sqrt{3}}) + 2 \left[e^{-x} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \quad 1M$$

$$= 2\sqrt{3}(e^{-\sqrt{3}} + e^{\sqrt{3}}) + 2(e^{-\sqrt{3}} - e^{\sqrt{3}}) \quad 1A$$

$$22. (a) \quad f(x) = \frac{(x - 6)(x + 3)}{x + 6}$$

$$= x - 9 + \frac{36}{x + 6}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{36}{(x + 6)^2} \quad 1M$$

$$= \frac{x(x + 12)}{(x + 6)^2} \quad 1A$$

(b) 當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 0$ 或 -12 。 1M

x	$x < -12$	$-12 < x < -6$	$-6 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

極大點為 $(-12, -27)$ 。

1A

極小點為 $(0, -3)$ 。

1A

(c) 垂直漸近線為 $x = -6$ 。

1A

$$f(x) = x - 9 + \frac{36}{x+6}$$

1M

斜漸近線為 $y = x - 9$ 。

G 只有兩漸近線。

同意該宣稱。

1A

(d) 所求面積

$$= \int_{-3}^6 -f(x) dx$$

1M

$$= \int_{-3}^6 \left(-x + 9 - \frac{36}{x+6} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 9x - 36 \ln |x+6| \right]_{-3}^6$$

1M

$$= \frac{135}{2} - 72 \ln 2$$

1A

23. (a) $h(x) = x^2 e^{2x^3}$

$$h'(x) = 2xe^{2x^3} + x^2 e^{2x^3} (6x^2)$$

1M

$$= 2xe^{2x^3} (1 + 3x^3)$$

1A

$$h''(x) = 2e^{2x^3} (6x^2)(x + 3x^4) + 2e^{2x^3} (1 + 12x^3)$$

$$= 2e^{2x^3} (1 + 18x^3 + 18x^6)$$

1A

(b) 當 $h'(x) = 0$ 時, $x = 0$ 或 $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ 。

1M

x	$x < -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{3}} < x < 0$	$x > 0$
$h'(x)$	+	-	+

1M

極大點為 $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}e^2} \right)$ 。

極小點為 $(0, 0)$ 。

1A

(c) (i) P 的坐標為 $(1, e^2)$ 。

$$h'(1) = 2e^2(1+3) = 8e^2$$

1M

所求方程為

$$y - e^2 = 8e^2(x - 1)$$

$$y = 8e^2x - 7e^2$$

1A

(ii) 留意當 $x > 0$ 時， $h''(x) = 2e^{2x^3}(1 + 18x^3 + 18x^6) > 0$ ，且 L 為 G 在 $x = 1$ 的切線。

對 $x > 0$ ， G 凹向上。

因此， G 在 L 之上。

設 $u = 2x^3$ 。則 $du = 6x^2 dx$ 。

所求面積

$$= \int_0^1 [x^2 e^{2x^3} - (8e^2 x - 7e^2)] dx$$

$$= \int_0^1 x^2 e^{2x^3} dx - \int_0^1 (8e^2 x - 7e^2) dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^2 e^u du - \left[4e^2 x^2 - 7e^2 x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} \left[e^u \right]_0^2 + 3e^2$$

$$= \frac{19e^2 - 1}{6}$$

1

1M

1M

1A

24. (a) 垂直漸近線為 $x = -2$ 。

1A

$$f(x) = x - 10 + \frac{48}{x+2} - \frac{64}{(x+2)^2}$$

1M

斜漸近線為 $y = x - 10$ 。

1A

(b) $f'(x) = 1 - \frac{48}{(x+2)^2} + \frac{128}{(x+2)^3}$

1M

$$f''(x) = \frac{96}{(x+2)^3} - \frac{384}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{96(x-2)}{(x+2)^4}$$

1A

(c) $f'(x) = \frac{(x-2)^2(x+10)}{(x+2)^3}$

當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 2$ 或 -10 。

x	$x < -10$	$-10 < x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	-	+	+

1M

只有一個轉向點在 $x = -10$ ，是一個極大點。

不同意該宣稱。

1A

(d) 當 $f''(x) = 0$ 時， $x = 2$ 。

x	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	-	-	+

1M

拐點為 $(2, 0)$ 。

1A

(e) 所求面積

$$= \int_0^2 \left(x - 10 + \frac{48}{x+2} - \frac{64}{(x+2)^2} \right) dx \quad 1M$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 10x + 48 \ln|x+2| + \frac{64}{x+2} \right]_0^2 \quad 1M$$

$$= 34 - 48 \ln 2 \quad 1A$$

25. (a) $f'(x) = \frac{2x(x-3) - (x^2+a)(1)}{(x-3)^2}$ 1M

$$= \frac{x^2 - 6x - a}{(x-3)^2}$$

$$f'(5) = 0 = \frac{5^2 - 6(5) - a}{(5-3)^2} \quad 1M$$

$$a = -5 \quad 1A$$

(b) $f'(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$

當 $f'(x) = 0$ 時, $x = 1$ 或 5 。 1M

x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 5$	$x > 5$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

C 的極大點為 $(1, 2)$ 。 1A

(c) 垂直漸近線 $x = 3$ 。 1A

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

$$= x + 3 + \frac{4}{x - 3} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = x + 3$ 。 1A

(d) 面積 $= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} f(x) dx$ 1M+1A

$$= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(x + 3 + \frac{4}{x-3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 4 \ln|x-3| \right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \quad 1A$$

$$= \left(\frac{5}{2} + 3\sqrt{5} + 4 \ln(3 - \sqrt{5}) \right) - \left(\frac{5}{2} - 3\sqrt{5} + 4 \ln(\sqrt{5} + 3) \right)$$

$$= 6\sqrt{5} + 4 \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \quad 1A$$

26. (a) 垂直漸近線為 $x = -\frac{1}{2}$ 。 1A

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x + 1}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{9}{4} + \frac{9}{4(2x+1)} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{4}$ 。

1A

$$(b) \quad f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{4}(2x+1)^{-2}(2)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{9}{2(2x+1)^2}$$

1M

1A

$$(c) \quad \frac{1}{2} - \frac{9}{2(2x+1)^2} = 0$$

$$(2x+1)^2 = 9$$

1M

$$x = -2 \quad \text{或} \quad 1$$

x	$x < -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

極大點為 $(-2, -4)$ 及極小點為 $(1, -1)$ 。

1A+1A

$$(d) \quad 0 = \frac{x^2 - 4x}{2x+1}$$

$$x = 0 \quad \text{或} \quad 4$$

$$\text{面積} = \int_0^4 [-f(x)] dx$$

1M+1A

$$= \int_0^4 \left(\frac{9}{4} - \frac{x}{2} - \frac{9}{4(2x+1)} \right) dx$$

$$= \left[\frac{9x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{9}{8} \ln |2x+1| \right]_0^4$$

1M

$$= 5 - \frac{9}{8} \ln 9$$

1A

$$27. (a) \quad \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2\theta d\theta$$

1M

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4\theta) d\theta$$

$$= \frac{\theta}{8} - \frac{\sin 4\theta}{32} + \text{常數}$$

1A

(b) 體積

$$= \pi \int_0^1 \left[6x(1-x^2)^{\frac{1}{4}} \right]^2 dx$$

1M

$$= 36\pi \int_0^1 x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

設 $x = \sin \theta$ 。則 $dx = \cos \theta d\theta$ 。

1M

體積

$$= 36\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \, d\theta$$

$$= 36\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= 36\pi \left[\frac{\theta}{8} - \frac{\sin 4\theta}{32} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

1M

$$= \frac{9\pi^2}{4}$$

1A

28. (a) $\frac{dy}{dx} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)$

1M

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

在 $A(0, 2)$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-0}} = -1$ 。 L 的斜率 $L = \frac{-1}{-1} = 1$ 。

1M

L 的方程為 $y = x + 2$ 。

1A

(b) $L: x = y - 2$ 及 $C: x = 1 - \frac{y^2}{4}$ 。

$$\text{所求體積} = \pi \int_0^2 [1 - (y - 2)]^2 \, dy - \pi \int_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{y^2}{4} \right) \right]^2 \, dy$$

1M+1A

$$= \pi \int_0^2 (9 - 6y + y^2) \, dy - \pi \int_0^2 \frac{y^4}{16} \, dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^3}{3} - 3y^2 + 9y \right]_0^2 - \pi \left[\frac{y^5}{80} \right]_0^2$$

1M

$$= \frac{124\pi}{15}$$

1A

29. (a) $\int \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$

1M

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \text{常數}$$

1A

(b) 設 $x = 2 \tan \theta$ 。則 $dx = 2 \sec^2 \theta \, d\theta$ 。

1M

所求體積

$$= \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4 + x^2} \right)^2 \, dx$$

1M

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec^2 \theta}{(4 + 4 \tan^2 \theta)^2} \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{8} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

1M

$$= \frac{\pi(\pi + 2)}{64}$$

1A

30. (a) $\cos^4 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2$ 1M

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x)$$

1

(b) 設 $x = \sin \theta$ 。則 $dx = \cos \theta d\theta$ 。

1M

所求體積

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - 1 - \sqrt{1 - x^2})^2 dx$$

1M

$$= \pi \int_0^1 [(x^2 - 1)^2 + (1 - x^2)] dx - 2\pi \int_0^1 (x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 2) dx - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 \theta) \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^3 + 2x \right]_0^1 + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta$$

1M

$$= \frac{6\pi}{5} + \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta) d\theta$$

1M

$$= \frac{6\pi}{5} + \frac{\pi}{4} \left[3\theta + 2 \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{6\pi}{5} + \frac{3\pi^2}{8}$$

1A

31. (a) $g'(x) = e^x (\cos x - \sin x)$

1A

當 $g'(x) = 0$,

$$\cos x - \sin x = 0$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

x	$0 < x < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < x < \pi$
$g'(x)$	+	-

因此， G 只有一個極大點。

1

(b) $\int e^{2x} \cos 2x dx = \frac{e^{2x} \cos 2x}{2} + \int e^{2x} \sin 2x dx$

1M

$$= \frac{e^{2x} \cos 2x}{2} + \frac{e^{2x} \sin 2x}{2} - \int e^{2x} \cos 2x dx$$

$$2 \int e^{2x} \cos 2x dx = \frac{e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x)}{2} + \text{常數}$$

1M

$$\int e^{2x} \cos 2x dx = \frac{e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x)}{4} + \text{常數}$$

1A

$$(c) \text{ 體積} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x \cos x)^2 dx \quad 1M$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x} \cos 2x dx + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x} dx \quad 1M$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ = \frac{3\pi(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)}{8} \quad 1A$$

$$32. (a) \int x^k \ln x dx = \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} - \frac{1}{k+1} \int x^k dx \quad 1M$$

$$= \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \text{常數} \quad 1A$$

(b) (i) 所求面積

$$= \int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx \quad 1M$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}} \ln x}{\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \right]_1^4 \quad 1M$$

$$= \frac{16}{3} \ln 4 - \frac{28}{9} \\ = \frac{32}{3} \ln 2 - \frac{28}{9} \quad 1A$$

(ii) 所求體積

$$= \pi \int_1^4 (\sqrt{x} \ln x)^2 dx \quad 1M$$

$$= \pi \int_1^4 x (\ln x)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x^2 (\ln x)^2 \right]_1^4 - \pi \int_1^4 x \ln x dx$$

$$= 8\pi (\ln 4)^2 - \pi \left[\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{2^2} \right]_1^4$$

$$= 8\pi (\ln 4)^2 - 8\pi \ln 4 + \frac{15\pi}{4}$$

$$= 32\pi (\ln 2)^2 - 16\pi \ln 2 + \frac{15\pi}{4} \quad 1A$$

$$33. (a) V = \pi \int_0^b [16 - (y-4)^2] dy \quad 1M$$

$$= \pi \left[16y - \frac{(y-4)^3}{3} \right]_0^h \quad 1A$$

$$= \frac{\pi h^2 (12 - h)}{3} \quad 1A$$

$$(b) \quad V = \frac{\pi}{3}(12h^2 - h^3)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}(24h - 3h^2) \frac{dh}{dt} \quad 1M$$

$$= \pi h(8 - h) \frac{dh}{dt} \quad 1A$$

當 $h = 3$ 時，

$$\pi = \pi(3)(8 - 3) \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{15} \quad 1A$$

所求變率為 $\frac{1}{15}$ cm/s。

$$34. (a) \text{ 所求體積} = \pi \int_0^h \left(\frac{y^2}{9} + r \right)^2 dy \quad 1M$$

$$= \pi \int_0^h \left(\frac{y^4}{81} + \frac{2ry^2}{9} + r^2 \right) dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^5}{5} + \frac{2ry^3}{27} + r^2 y \right]_0^h$$

$$= \pi \left(\frac{h^5}{405} + \frac{2rh^3}{27} + r^2 h \right) \quad 1$$

(b) (i) 當 $0 \leq h \leq 6$ 。

$$V = \pi \left[\frac{h^5}{405} + \frac{2(8)h^3}{27} + (8)^2 h \right]$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left(\frac{h^4}{81} + \frac{16h^2}{9} + 64 \right) \frac{dh}{dt} \quad 1A$$

當 $h = 3$ 。

$$4\pi = \pi \left[\frac{3^4}{81} + \frac{16(3)^2}{9} + 64 \right] \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{81}$$

所求變率為 $\frac{4}{81}$ cm/s。 1A

$$(ii) \text{ 平截頭體的底半徑} = \frac{6^2}{9} + 8$$

$$= 12 \text{ cm} \quad 1A$$

設 H cm 為該平截頭體的高。

$$2H = \sqrt{20^2 - 12^2}$$

$$H = 8 \quad 1A$$

當 $6 \leq h \leq T$ 。

$$V = \pi \left[\frac{6^5}{405} + \frac{16(6)^3}{27} + 64(6) \right] + \frac{1}{3}\pi(12)^2(16) \left[1 - \left(\frac{22-h}{16} \right)^3 \right] \quad 1M+1M+1A$$

$$= \frac{6496}{5}\pi - \frac{3}{16}\pi(22-h)^3 \quad 1$$

(iii) 當 $6 \leq h \leq T$ 。

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -\frac{9}{16}\pi(22-h)^2(-1)\frac{dh}{dt} \\ &= \frac{9}{16}\pi(22-h)^2\frac{dh}{dt}\end{aligned}\quad 1A$$

當 $h = 10$ 。

$$\begin{aligned}4\pi - k &= \frac{9}{16}\pi(22-10)^2\left(\frac{1}{27}\right) \\ k &= \pi\end{aligned}\quad 1A$$

35. (a) (i) $\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$
 $= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 1A

(ii) $y = \sin^{-1}x$
 $\sin y = x$
 $\cos y \frac{dy}{dx} = 1$ 1A+1A
 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$
 $\frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 1

(b) 利用 (a) 的結果。

$$\begin{aligned}\int (\sin^{-1}x)^2 dx &= x(\sin^{-1}x) - 2 \int x \sin^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & 1M \\ &= x(\sin^{-1}x) + 2\sqrt{1-x^2} \sin^{-1}x - 2 \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & 1M \\ &= x(\sin^{-1}x) + 2\sqrt{1-x^2} \sin^{-1}x - 2x + \text{constant} & 1\end{aligned}$$

(c) (i) 所求容量 $= \pi \int_0^1 (\sin^{-1}y)^2 dy$ 1M
 $= \pi \left[y(\sin^{-1}y)^2 + 2\sqrt{1-y^2} \sin^{-1}y - 2y \right]_0^1$
 $= \frac{\pi^3}{4} - 2\pi$ 1A

(ii) 設 h 單位及 V 立方單位分別為該酒的深度及體積。

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin x \\ x &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}\quad 1A$$

留意 $V = \pi \int_0^h (\sin^{-1} y)^2 dy$ 。

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$= \pi (\sin^{-1} h)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

1M

$$\frac{\pi^3}{3600} = \pi \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Big|_{h=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

1M

$$= \pi \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Big|_{h=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{dh}{dt} \Big|_{h=\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{400}$$

所求變率為每秒 $\frac{1}{400}$ 單位。

1A

36. (a) (i) $\cos^4 x \sin^2 x = \cos^2 x \left(\frac{2 \sin x \cos x}{2} \right)^2$

$$= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{\sin^2 2x}{4} \right)$$

1M

$$= \frac{\sin^2 2x + \cos 2x \sin^2 2x}{8}$$

1

(ii) 設 $x = \frac{\pi}{2} - u$ 。則 $dx = -du$ 。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - u \right) du$$

1M

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u \sin^2 u du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2u + \cos 2u \sin^2 2u}{8} du$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4u) du + \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u d(\sin 2u)$$

1M+1M

$$= \frac{1}{16} \left[u - \frac{\sin 4u}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{16} \left[\frac{\sin^3 2u}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{32}$$

1A

(b) (i) 設 $x = k - u$ 。則 $dx = -du$ 。

$$\int_0^k f(x) dx = \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{k}{2}}^k f(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{k}{2}}^0 f(k - u) du$$

1M

$$= \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) dx$$

1

(ii) 設 $x = k - w$ 。則 $dx = -dw$ 。

$$\begin{aligned}\int_0^k x f(x) dx &= - \int_k^0 (k - w) f(k - w) dw \\ &= k \int_0^k f(w) dw - \int_0^k w f(w) dw \\ &= k \int_0^k f(x) dx - \int_0^k x f(x) dx \\ 2 \int_0^k x f(x) dx &= k \int_0^k f(x) dx \\ \int_0^k x f(x) dx &= \frac{k}{2} \int_0^k f(x) dx \\ &= k \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) dx\end{aligned}$$

1M

1

(iii) 設 $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$ 。

$$\text{則 } f(\pi - x) = \cos^4(\pi - x) \sin^2(\pi - x) = \cos^4 x \sin^2 x = f(x)。$$

1M

$$\text{體積} = \pi \int_0^\pi x \sin^4 x \cos^2 x dx$$

1M

$$= \pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{32}$$

1A

37. (a) 垂直漸近線為 $x = -2$ 。

1A

$$f(x) = x - 7 + \frac{27}{x+2} - \frac{27}{(x+2)^2}$$

1M

斜漸近線為 $y = x - 7$ 。

1A

$$(b) \quad f'(x) = 1 - \frac{27}{(x+2)^2} + \frac{54}{(x+2)^3}$$

1M

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{54}{(x+2)^3} - \frac{162}{(x+2)^4} \\ &= \frac{54(x-1)}{(x+2)^4}\end{aligned}$$

1A

$$\begin{aligned}(c) \quad f'(x) &= 1 - \frac{27}{(x+2)^2} + \frac{54}{(x+2)^3} \\ &= \frac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3}\end{aligned}$$

當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 1$ 或 -8 。

x	$x < -8$	$-8 < x < -2$	$-2 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	+	+

1M

極大點為 $\left(-8, -\frac{81}{4}\right)$ 。

G 有一個轉向點。

1A

(d) 當 $f''(x) = 0$ 時， $x = 1$ 。

x	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$

1M

拐點為 $(1, 0)$ 。

1A

(e) 設 $u = x + 2$ 。則 $du = dx$ 。

所求體積

$$= \pi \int_0^1 [f(x)]^2 dx$$

1M

$$= \pi \int_2^3 \frac{(u-3)^6}{u^4} du$$

$$= \pi \int_2^3 \frac{u^6 - 18u^5 + 135u^4 - 540u^3 + 1215u^2 - 1458u + 729}{u^4} du$$

1M

$$= \pi \int_2^3 \left(u^2 - 18u + 135 - \frac{540}{u} + \frac{1215}{u^2} - \frac{1458}{u^3} + \frac{729}{u^4} \right) du$$

$$= \pi \left[\frac{u^3}{3} - 9u^2 + 135u - 540 \ln |u| - \frac{1215}{u} + \frac{729}{u^2} - \frac{243}{u^3} \right]_2^3$$

1M

$$= \pi \left(\frac{5255}{24} + 540 \ln \frac{2}{3} \right)$$

1A

38. (a) $\sin 16\theta \sec \theta \sec 2\theta \sec 4\theta \sec 8\theta$

$$= (2 \sin 8\theta \cos 8\theta) \sec \theta \sec 2\theta \sec 4\theta \sec 8\theta$$

1M

$$= 2(2 \sin 4\theta \cos 4\theta) \sec \theta \sec 2\theta \sec 4\theta$$

$$= 4(2 \sin 2\theta \cos 2\theta) \sec \theta \sec 2\theta$$

$$= 8(2 \sin \theta \cos \theta) \sec \theta$$

$$= 16 \sin \theta$$

1

(b) 利用 (a) 的結果。

$$y = \sqrt{\sin 16x \sec^2 x \sec 2x \sec 4x \sec 8x}$$

$$= \sqrt{16 \sin x \sec x}$$

1M

$$= 4\sqrt{\tan x}$$

設 $u = \cos x$ 。則 $du = -\sin x dx$ 。

1M

$$\text{所求容量} = \pi \int_0^d 16 \tan x dx$$

1M+1A

$$= -16\pi \int_1^{\cos d} \frac{du}{u}$$

$$= -16\pi \left[\ln |u| \right]_1^{\cos d}$$

1M

$$= -16\pi \ln(\cos d)$$

1

(c) (i) 所求容量 $= -16\pi \ln[\cos(0.1)]$

$$\approx 0.252 \text{ m}^3$$

1A

(ii) 設 p m 為容器中水的體積為 0.08 m^3 時的水的深度。

$$-16\pi \ln(\cos p) = 0.08$$

$$p \approx 0.0564$$

1A

設 k m 及 $V \text{ m}^3$ 分別為在時間 t s 時的水的深度及體積。

$$V = -16\pi \ln(\cos k)$$

$$\frac{dV}{dt} = 16\pi \tan k \frac{dk}{dt}$$

1M

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{k=p} = 16\pi \tan p \cdot \left. \frac{dk}{dt} \right|_{k=p}$$

$$\left. \frac{dk}{dt} \right|_{k=p} \approx 0.00106$$

所求變率為 0.00106 m/s 。

1A

39. (a) 垂直漸近線為 $x = -2$ 。

1A

$$f(x) = x + 5 + \frac{4}{x+2}$$

1M

斜漸近線為 $y = x + 5$ 。

1A

$$(b) f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+2)^2}$$

1M

$$= \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 0$ 或 -4 。

1M

x	$x < -4$	$-4 < x < -2$	$-2 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

極大點為 $(-4, -1)$ 。

1A

極小點為 $(0, 7)$ 。

1A

(c) (形狀)

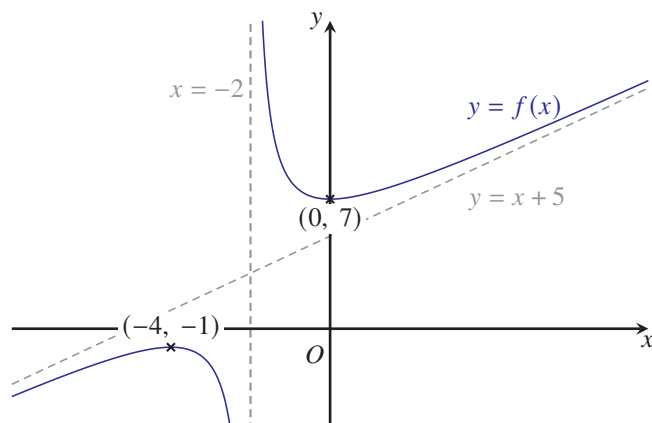
1A

(漸近線)

1A

(全部正確)

1A



$$(d) \frac{x^2 + 7x + 14}{x + 2} = 8$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = 2 \text{ 或 } -1$$

設 $u = x + 2$ 。則 $du = dx$ 。

所求體積

$$= \pi \int_{-1}^2 [f(x) - 8]^2 dx \quad 1M$$

$$= \pi \int_1^4 \left[(u - 5) + \frac{4}{u} \right]^2 du$$

$$= \pi \int_1^4 \left[(u - 5)^2 + \frac{8(u - 5)}{u} + \frac{16}{u^2} \right] du$$

$$= \pi \int_1^4 \left[(u - 5)^2 + 8 - \frac{40}{u} + \frac{16}{u^2} \right] du$$

$$= \pi \left[\frac{(u - 5)^3}{3} + 8u - 40 \ln |u| - \frac{16}{u} \right]_1^4 \quad 1M$$

$$= \pi(57 - 80 \ln 2) \quad 1A$$

40. (a) 垂直漸近線為 $x = -2$ 。 1A

$$f(x) = x - 8 + \frac{16}{x + 2} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = x - 8$ 。 1A

$$(b) f'(x) = 1 - \frac{16}{(x + 2)^2} \quad 1M$$

$$= \frac{(x + 6)(x - 2)}{(x + 2)^2}$$

當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 2$ 或 -6 。

x	$x < -6$	$-6 < x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

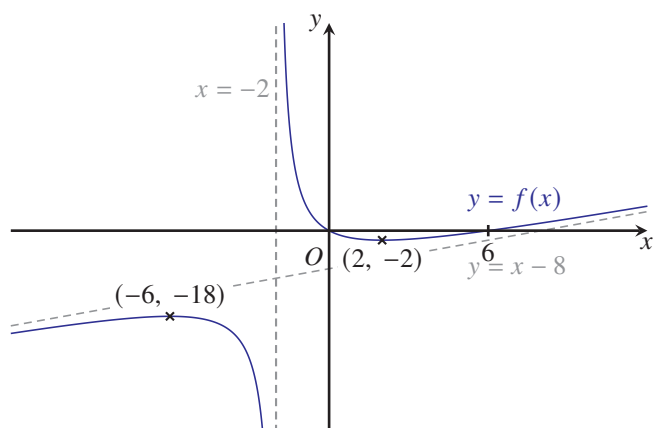
極大點為 $(-6, -18)$ 。 1A

極小點為 $(2, -2)$ 。 1A

(c) (形狀) 1A

(漸近線) 1A

(全部正確) 1A



(d) $\frac{x^2 - 6x}{x + 2} = 7$

$$x^2 - 13x - 14 = 0$$

$$x = 14 \quad \text{或} \quad -1$$

設 $u = x + 2$ 。則 $du = dx$ 。

所求體積

$$= \pi \int_{-1}^{14} [f(x) - 7]^2 dx$$

1M

$$= \pi \int_1^{16} \left[u - 17 + \frac{16}{u} \right]^2 du$$

$$= \pi \int_1^{16} \left[(u - 17)^2 + \frac{32(u - 17)}{u} + \frac{256}{u^2} \right] du$$

$$= \pi \int_1^{16} \left[(u - 17)^2 + 32 - \frac{544}{u} + \frac{256}{u^2} \right] du$$

$$= \pi \left[\frac{(u - 17)^3}{3} + 32u - 544 \ln |u| - \frac{256}{u} \right]_1^{16}$$

1M

$$= \pi(2085 - 2176 \ln 2)$$

1A

41. (a) 垂直漸近線為 $x = 4$ 。

1A

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 4}$$

1M

斜漸近線為 $y = x + 1$ 。

1A

(b) $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x - 4)^2}$

1M

$$= \frac{(x - 2)(x - 6)}{(x - 4)^2}$$

1A

(c) 當 $f'(x) = 0$ 時, $x = 2$ 或 $x = 6$ 。

1A

x	$x < 2$	$2 < x < 4$	$4 < x < 6$	$x > 6$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

極大點為 $(2, 1)$ 。

1A

極小點為 $(6, 9)$ 。

1A

(d) 設 $u = x - 4$ 。則 $du = dx$ 。

所求體積

$$= \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx \quad 1M$$

$$= \pi \int_{-4}^{-1} \left[(u+5) + \frac{4}{u} \right]^2 du \quad 1M$$

$$= \pi \int_{-4}^{-1} \left[(u+5)^2 + \frac{8(u+5)}{u} + \frac{16}{u^2} \right] du$$

$$= \pi \int_{-4}^{-1} \left[(u+5)^2 + 8 + \frac{40}{u} + \frac{16}{u^2} \right] du$$

$$= \pi \left[\frac{(u+5)^3}{3} + 8u + 40 \ln |u| - \frac{16}{u} \right]_{-4}^{-1} \quad 1M$$

$$= (57 - 80 \ln 2)\pi \quad 1A$$

42. (a) 設 $u = x^2 - 2x + 4$ 。則 $du = (2x - 2) dx$ 。 1M

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+4} dx &= \frac{1}{2} \int_4^3 \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln |u| \right]_4^3 \end{aligned} \quad 1A$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} \quad 1A$$

(b) (i) $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$ 1A

(ii) 設 $x-1 = \sqrt{3} \tan \theta$ 。則 $dx = \sqrt{3} \sec^2 \theta d\theta$ 。 1M

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+4} dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{\sqrt{3} \sec^2 \theta}{3 \tan^2 \theta + 3} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 d\theta \end{aligned} \quad 1M$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^0$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{18} \quad 1A$$

$$\begin{aligned} \text{(c) (i)} \quad \frac{A}{x+2} - \frac{B(x-4)}{x^2-2x+4} &= \frac{A(x^2-2x+4) - B(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \\ &= \frac{(A-B)x^2 + 2(B-A)x + (4A+8B)}{x^3+8} \end{aligned}$$

可得 $A-B=0$ 、 $B-A=0$ 及 $4A=8B=12$ 。

求解後，可得 $A=1$ 及 $B=1$ 。

1A

$$\text{(ii) 所求體積} = \pi \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{\sqrt{8-x^3}} \right)^2 dx \quad 1M$$

$$= \pi \int_{-1}^0 \frac{dx}{8-x^3}$$

設 $u = -x$ 。則 $du = -dx$ 。

1M

$$\begin{aligned}
\text{所求體積} &= \pi \int_0^1 \frac{du}{u^3 + 8} \\
&= \frac{\pi}{12} \int_0^1 \left(\frac{1}{u+2} - \frac{u-4}{u^2-2u+4} \right) du & 1M \\
&= \frac{\pi}{12} \int_0^1 \frac{du}{u+2} - \frac{\pi}{12} \left(\int_0^1 \frac{u-1}{u^2-2u+4} du - \int_0^1 \frac{3}{u^2-2u+4} du \right) & 1M \\
&= \frac{\pi}{12} \left[\ln|u+2| \right]_0^1 - \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} \right) + \frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{18} \right) \\
&= \frac{\pi \ln 3}{24} + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{24} & 1A
\end{aligned}$$

43. (a) 垂直漸近線為 $x = -1$ 。 1A

$$f(x) = x - 5 + \frac{12}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = x - 5$ 。 1A

(b) $f'(x) = 1 - \frac{12}{(x+1)^2} + \frac{16}{(x+1)^3}$ 1M

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{24}{(x+1)^3} - \frac{48}{(x+1)^4} \\
&= \frac{24(x-1)}{(x+1)^4} & 1A
\end{aligned}$$

(c) $f'(x) = 1 - \frac{12}{(x+1)^2} + \frac{16}{(x+1)^3}$
 $= \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$

當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 1$ 或 -5 。

x	$x < -5$	$-5 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	+	+

1M

極大點為 $\left(-5, -\frac{27}{2}\right)$ 。

Γ 有一個轉向點。

同意該宣稱。

1A

(d) 當 $f''(x) = 0$ 時， $x = 1$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	-	+

1M

拐點為 $(1, 0)$ 。

1A

(e) 設 $u = x + 1$ 。則 $du = dx$ 。

所求體積

$$= \pi \int_0^1 [f(x)]^2 dx \quad 1M$$

$$= \pi \int_1^2 \frac{(u-2)^6}{u^4} du$$

$$= \pi \int_1^2 \frac{u^6 - 12u^5 + 60u^4 - 160u^3 + 240u^2 - 192u + 64}{u^4} du \quad 1M$$

$$= \pi \int_1^2 \left(u^2 - 12u + 60 - \frac{160}{u} + \frac{240}{u^2} - \frac{192}{u^3} + \frac{64}{u^4} \right) du$$

$$= \pi \left[\frac{u^3}{3} - 6u^2 + 60u - 160 \ln |u| - \frac{240}{u} + \frac{96}{u^2} - \frac{64}{3u^3} \right]_1^2 \quad 1M$$

$$= (111 - 160 \ln 2) \pi \quad 1A$$

44. (a) -6 1A

(b) (i) 垂直漸近線為 $x = 10$ 。 1A

(ii) $f(x) = x - 6 + \frac{36}{x-10}$

$$f'(x) = 1 - \frac{36}{(x-10)^2} \quad 1M$$

$$= \frac{(x-4)(x-16)}{(x-10)^2}$$

當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 4$ 或 16 。 1A

x	$x < 4$	$4 < x < 10$	$10 < x < 16$	$x > 16$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

極大點為 $(4, -8)$ 。 1A

極小點為 $(16, 16)$ 。 1A

(c) $x - 6 + \frac{36}{x-10} = 24$

$$(x-6)(x-10) + 36 = 24(x-10)$$

$$x^2 - 40x + 336 = 0$$

$$x = 12 \quad \text{或} \quad 28 \quad 1A$$

設 $u = x - 10$ 。則 $du = dx$ 。

所求體積

$$= \pi \int_{12}^{28} [f(x) - 24]^2 dx \quad 1M$$

$$= \pi \int_2^{18} \left[(u - 20) + \frac{36}{u} \right]^2 du$$

$$= \pi \int_2^{18} \left[(u - 20)^2 + \frac{72(u - 20)}{u} + \frac{1296}{u^2} \right] du \quad 1M$$

$$= \pi \int_2^{18} \left[(u - 20)^2 + 72 - \frac{1440}{u} + \frac{1296}{u^2} \right] du$$

$$= \pi \left[\frac{(u - 20)^3}{3} + 72u - 1440 \ln |u| - \frac{1296}{u} \right]_2^{18} \quad 1M$$

$$= \left(\frac{11\,008}{3} - 2880 \ln 3 \right) \pi \quad 1A$$

45. (a) 垂直漸近線為 $x = -1$ 。 1A

$$f(x) = x - 8 + \frac{27}{x + 1} - \frac{27}{(x + 1)^2} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = x - 8$ 。 1A

(b) $f'(x) = 1 - \frac{27}{(x + 1)^2} + \frac{54}{(x + 1)^3}$ 1M

$$= \frac{(x + 7)(x - 2)^2}{(x + 1)^3}$$

當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 2$ 或 -7 。

x	$x < -7$	$-7 < x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	-	+	+

1M

G 有恰好一個轉向點，為於 $x = -7$ 時的極大值點。 1

(c) $f''(x) = \frac{54}{(x + 1)^3} - \frac{162}{(x + 1)^4}$ 1A

$$= \frac{54(x - 2)}{(x + 1)^4}$$

當 $f''(x) = 0$ 時， $x = 2$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	-	-	+

1M

拐點為 $(2, 0)$ 。 1A

(d) 設 $u = x + 1$ 。則 $du = dx$ 。

所求體積

$$= \pi \int_0^2 \left[\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2} \right]^2 dx \quad 1M$$

$$= \pi \int_1^3 \frac{(u-3)^6}{u^4} du$$

$$= \pi \int_1^3 \frac{u^6 - 18u^5 + 135u^4 - 540u^3 + 1215u^2 - 1458u + 729}{u^4} du \quad 1M$$

$$= \pi \int_1^3 (u^2 - 18u + 135 - 540u^{-1} + 1215u^{-2} - 1458u^{-3} + 729u^{-4}) du$$

$$= \pi \left[\frac{u^3}{3} - 9u^2 + 135u - 540 \ln |u| - 1215u^{-1} + \frac{729}{u^2} - \frac{243}{u^3} \right]_1^3$$

$$= \pi \left(\frac{1808}{3} - 540 \ln 3 \right) \quad 1A$$

46. (a) 所求體積 $= \pi \int_0^k (12y - y^2) dy \quad 1M+1A$

$$= \pi \left[6y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^k$$

$$= \pi \left(6k^2 - \frac{k^3}{3} \right) \quad 1$$

(b) (i) 當 $0 \leq h \leq$ 。

$$V = \pi \left[6(h+2)^2 - \frac{(h+2)^3}{3} \right] - \pi \left[6(2)^2 - \frac{2^3}{3} \right] \quad 1M$$

$$= \pi \left[6(h+2)^2 - \frac{1}{3}(h+2)^3 \right] - \frac{64\pi}{3} \quad 1$$

(ii) 當 $4 \leq h \leq 11$ 。

$$V = \pi(6)^2(h-4) + \pi \left[6(4+2)^2 - \frac{1}{3}(4+2)^3 \right] - \frac{64\pi}{3} \quad 1M$$

$$= 36\pi(h-4) + \frac{368\pi}{3}$$

$$\frac{dV}{dt} = 36\pi \cdot \frac{dh}{dt} \quad 1A$$

$$-3 = 36\pi \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{12\pi}$$

所求變率為 $\frac{1}{12\pi}$ cm/s。 1A

(iii) 當 $0 \leq h \leq 4$ 。

$$V = \pi \left[6(h+2)^2 - \frac{1}{3}(h+2)^3 \right] - \frac{64\pi}{3}$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left[12(h+2) \frac{dh}{dt} - (h+2)^2 \frac{dh}{dt} \right] \quad 1A$$

當 $h = 1$ 時, $\frac{dV}{dt} = 5 - 3 = 2$ 。

$$2 = \pi \left[12(1+2) \frac{dh}{dt} - (1+2)^2 \frac{dh}{dt} \right] \quad 1M$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{27\pi}$$

所求變率為 $\frac{2}{27\pi}$ cm/s。 1A

47. (a) (i) $h + 1 = x^2 + 1$

$$x = \sqrt{h} \quad \text{或} \quad -\sqrt{h} \quad (\text{捨去})$$

A 的坐標為 $(\sqrt{h}, h + 1)$ 。 1A

(ii) $y = x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad 1A$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\sqrt{h}} = 2\sqrt{h}$$

L 的方程為

$$\frac{y - (h + 1)}{x - \sqrt{h}} = 2\sqrt{h} \quad 1M$$

$$y = 2\sqrt{h}x - h + 1 \quad 1$$

(b) (i) 考慮杯的容量。

$$\pi \int_0^{h+1} \left(\frac{y + h - 1}{2\sqrt{h}} \right)^2 dy - \pi \int_1^{h+1} (y - 1) dy = \frac{31}{10}\pi \quad 1M+1A$$

$$\frac{\pi}{4h} \left[\frac{(y + h - 1)^3}{3} \right]_0^{h+1} - \pi \left[\frac{(y - 1)^2}{2} \right]_1^{h+1} = \frac{31}{10}\pi \quad 1M$$

$$\frac{\pi}{6}h^2 - \frac{\pi}{12h}(h - 1)^3 = \frac{31}{10}\pi$$

$$10h^3 - 5(h^3 - 3h^2 + 3h - 1) = 186h$$

$$5h^3 + 15h^2 - 201h + 5 = 0$$

$$(h - 5)(5h^2 + 40h - 1) = 0 \quad 1A$$

$$h = 5 \quad \text{或} \quad h = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)}$$

$$h = 5 \quad \text{或} \quad h = \frac{-40 \pm \sqrt{1620}}{10} \quad (\text{捨去}) \quad 1A$$

(ii) 設 $V \text{ cm}^3$ 、 $A \text{ cm}^2$ 及 $H \text{ cm}$ 分別為在時間 $t \text{ s}$ 時, 杯中的水的體積、水平面的面積

及水的深度。

$$V = \pi \int_1^{H+1} (y-1) dy \quad 1M$$

$$= \pi \left[\frac{(y-1)^2}{2} \right]_1^{H+1}$$

$$= \frac{\pi}{2} H^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi H \frac{dH}{dt} \quad 1M$$

當 $H = 3$ 及 $\frac{dV}{dt} = 1$ 。

$$1 = \pi(3) \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{3\pi} \quad 1A$$

當 $y = H + 1$ 。

$$H + 1 = x^2 + 1$$

$$x^2 = H$$

可得 $A = \pi H$ 。

$$\frac{dA}{dt} = \pi \frac{dH}{dt} \quad 1M$$

當 $H = 3$, $\frac{dH}{dt} = \frac{1}{3\pi}$ 。

$$\frac{dA}{dt} = \pi \left(\frac{1}{3\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

所求變率為 $\frac{1}{3} \text{ cm}^2/\text{s}$ 。 1A

48. (a) $x^2 - x + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 1M

設 $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tan \theta$ 。則 $dx = \frac{1}{2} \sec^2 \theta d\theta$ 。

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 \theta}{\frac{1}{4} \tan^2 \theta + \frac{1}{4}} d\theta \quad 1M$$

$$= 2\theta + \text{常數}$$

$$= 2 \tan^{-1}(2x - 1) + \text{常數} \quad 1A$$

(b) 設 $u = \lambda - x$ 。則 $du = -dx$ 。

$$\int_0^\lambda x f(x) dx = - \int_\lambda^0 (\lambda - u) f(\lambda - u) du \quad 1M$$

$$= \int_0^\lambda (\lambda - x) f(x) dx \quad 1M$$

$$2 \int_0^\lambda x f(x) dx = \lambda \int_0^\lambda f(x) dx$$

$$\int_0^\lambda x f(x) dx = \frac{\lambda}{2} \int_0^\lambda f(x) dx \quad 1$$

(c) 體積 $= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \quad 1M+1A$

設 $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ 。

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin^4\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x \sin x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = f(x)。$$

$$\text{體積} = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \quad 1M$$

設 $u = \sin^2 x$ 。則 $du = 2 \sin x \cos x dx$ 。

$$\text{體積} = \frac{\pi^2}{8} \int_0^1 \frac{du}{u^2 + (1-u)^2} \quad 1M$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \int_0^1 \frac{du}{u^2 - u + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} \left[\tan^{-1}(2u - 1) \right]_0^1 \quad 1M$$

$$= \frac{\pi^3}{16} \quad 1A$$

49. (a) 垂直漸近線為 $x = -2$ 。 1A

$$f(x) = x - 6 + \frac{9}{x+2} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = x - 6$ 。 1A

(b) $f'(x) = 1 - \frac{9}{(x+2)^2} \quad 1M$

$$= \frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2} \quad 1A$$

(c) 當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 1$ 或 -5 。 1M

x	$x < -5$	$-5 < x < -2$	$-2 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

極大點為 $(-5, -14)$ 。 1A

極小點為 $(1, -2)$ 。 1A

(d) 所求體積

$$= \pi \int_0^1 \left(x - 6 + \frac{9}{x+2} \right)^2 dx \quad 1M$$

$$= \pi \int_0^1 \left[(x-6)^2 + \frac{18(x-6)}{x+2} + \frac{81}{(x+2)^2} \right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left[(x-6)^2 + \left(18 - \frac{144}{x+2} \right) + \frac{81}{(x+2)^2} \right] dx \quad 1M$$

$$= \pi \left[\frac{(x-6)^3}{3} + 18x - 144 \ln|x+2| - \frac{81}{x+2} \right]_0^1 \quad 1M$$

$$= \pi \left(\frac{371}{6} - 144 \ln \frac{3}{2} \right) \quad 1A$$

$$\begin{aligned} 50. \quad (a) \quad (i) \quad f(x) &= \frac{162(x-1)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{162}{(x+1)^2} - \frac{324}{(x+1)^3} \\ f'(x) &= -\frac{324}{(x+1)^3} + \frac{972}{(x+1)^4} \\ &= \frac{324(2-x)}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

1A

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{972}{(x+1)^4} - \frac{3888}{(x+1)^5} \\ &= \frac{972(x-3)}{(x+1)^5} \end{aligned}$$

1A

(ii) 當 $f'(x) = 0$, $x = 2$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	+	-

1M

極大點為 $(2, 6)$ 。

1A

沒有極小點。

當 $f''(x) = 0$, $x = 3$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	+	-	+

1M

拐點為 $\left(3, \frac{81}{16} \right)$ 。

1A

(b) 垂直漸近線為 $x = -1$ 。

1A

水平漸近線為 $y = 0$ 。

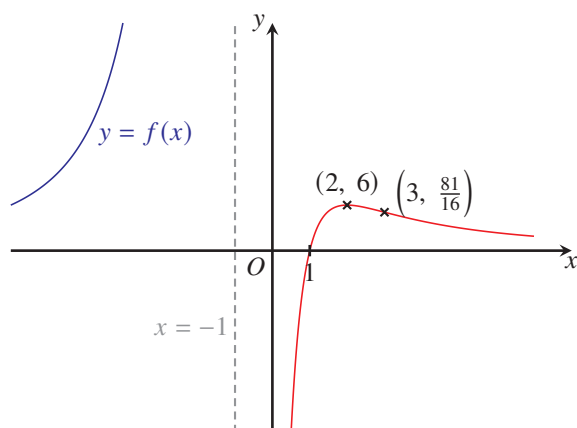
1A

(c) (形狀、極值點及拐點)

1A

(全部正確)

1A



(d) 設 $u = x + 1$ 。則 $du = dx$ 。

$$\text{體積} = \pi \int_0^1 \left[\frac{162(x-1)}{(x+1)^3} \right]^2 dx$$

1M

$$= 26\,244\pi \int_1^2 \frac{(u-2)^2}{u^6} du$$

$$= 26\,244\pi \int_1^2 (u^{-4} - 4u^{-5} + 4u^{-6}) du$$

1M

$$= 26\,244 \left[\frac{u^{-3}}{-3} + u^{-4} - \frac{4u^{-5}}{5} \right]_1^2$$

$$= \frac{67\,797\pi}{20}$$

1A

51. (a) $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x - 1}$

$$= ax + (a + b) + \frac{a + b + 3}{x - 1}$$

1M

斜漸近線為 $y = ax + (a + b)$ 。

可得 $a = 4$ 及 $a + b = 1$ 。

求解後，可得 $a = 4$ 及 $b = -3$ 。

1A

(b) $f(x) = 4x + 1 + \frac{4}{x - 1}$

$$f'(x) = 4 - \frac{4}{(x - 1)^2}$$

1M

$$= \frac{4x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

1A

(c) 當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 0$ 或 2 。

1M

x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

極大點為 $(0, -3)$ 。

1A

極小點為 $(2, 13)$ 。

1A

(d) 設 $u = x - 1$ 。則 $du = dx$ 。

所求體積

$$= \pi \int_2^4 (f(x) - 1)^2 dx \quad 1M$$

$$= \pi \int_2^4 \left(4x + \frac{4}{x-1}\right)^2 dx$$

$$= 16\pi \int_2^4 \left[x + \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx$$

$$= 16\pi \int_1^3 \left[(u+1)^2 + 2 + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right] du$$

$$= 16\pi \left[\frac{(u+1)^3}{3} + 2u + 2 \ln |u| - \frac{1}{u} \right]_1^3 \quad 1M$$

$$= \frac{1120\pi}{3} + 32\pi \ln 3 \quad 1A$$

(e) 留意 $f(3) = 15$ 及 $f'(3) = 3$ 。

設 $(\alpha, 0)$ 為 A 的坐標。

$$\frac{0-15}{\alpha-3} = 3$$

$$\alpha = -2$$

A 的坐標為 $(-2, 0)$ 。 1M

當 P 最接近 x 軸時， $\triangle OAP$ 的面積最小。

P 的坐標為 $(0, -3)$ 。

$\triangle OAP$ 的最小面積

$$= \frac{1}{2}(0+2)(0+3)$$

$$= 3$$

因此， $\triangle OAP$ 的面積不可能小於 3。 1A