

M2REG-AOI-2425-ASM-SET 4-MATH

建議題解

$$1. \quad (a) \quad \int_0^k \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx = \int_k^3 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx \quad 1M+1M$$

$$\left[-2\sqrt{4-x} \right]_0^k = \left[-2\sqrt{4-x} \right]_k^3$$

$$4 - 2\sqrt{4-k} = 2\sqrt{4-k} - 2$$

$$\sqrt{4-k} = \frac{3}{2}$$

$$k = \frac{7}{4}$$

1A

(b) 所求體積

$$= \pi \int_0^{\frac{7}{4}} \frac{1}{4-x} dx \quad 1M$$

$$= \pi \left[-\ln|4-x| \right]_0^{\frac{7}{4}} \quad 1M$$

$$= \pi \ln \frac{16}{9} \quad 1A$$

$$2. \quad (a) \quad y = x - 3 \quad 1A$$

$$(b) \quad \text{所求面積} = \int_2^3 \left[\left(x - 3 + \frac{16}{x^2 - 4x + 7} \right) - (x - 3) \right] dx \quad 1M$$

$$= \int_2^3 \frac{16}{x^2 - 4x + 7} dx$$

$$= \int_2^3 \frac{16}{(x-2)^2 + 3} dx \quad 1M$$

$$\text{設 } x - 2 = \sqrt{3} \tan \theta \circ \text{ 則 } dx = \sqrt{3} \sec^2 \theta d\theta \circ \quad 1M$$

$$\text{所求面積} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{16\sqrt{3} \sec^2 \theta}{(\sqrt{3} \tan \theta)^2 + 3} d\theta$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta \quad 1M$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}\pi}{9} \quad 1A$$

3. (a) 設 $w = x + 1$ 。則 $dw = dx$ 。 1M

$$\text{面積} = \int_0^u \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int_1^{u+1} \frac{w-1}{\sqrt{w}} dw$$

1A

$$= \int_1^{u+1} \left(w^{\frac{1}{2}} - w^{-\frac{1}{2}} \right) dw$$

$$= \left[\frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} - 2w^{\frac{1}{2}} \right]_1^{u+1}$$

1M

$$= \frac{2}{3}(u-2)\sqrt{u+1} + \frac{4}{3}$$

1A

- (b) 設 $A = \frac{2}{3}(u-2)\sqrt{u+1} + \frac{4}{3}$ 。

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$= \frac{2}{3} \left[(u-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{u+1}} + \sqrt{u+1} \right] \frac{du}{dt}$$

1M+1A

$$= \frac{u}{\sqrt{u+1}} \cdot \frac{du}{dt}$$

當 $OQ = 8$ ，

$$\frac{dA}{dt} = \frac{8}{\sqrt{8+1}} \cdot 3$$

$$= 8$$

所求之率為每秒 8 平方單位。

1A

4. (a) 設 $x = 3 + 3 \sin \theta$ 。則 $dx = 3 \cos \theta d\theta$ 。

$$\int \sqrt{x(6-x)} dx = \int \sqrt{(3+3\sin\theta)(3-3\sin\theta)} 3 \cos \theta d\theta \quad 1M$$

$$= 9 \int \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \quad 1A$$

$$= \frac{9\theta}{2} + \frac{9 \sin 2\theta}{4} + \text{常數} \quad 1A$$

$$= \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x-3}{3} + \frac{9}{2} \sin \theta \cos \theta + \text{常數}$$

$$= \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x-3}{3} + \frac{9}{2} \left(\frac{x-3}{3} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3} \right)^2} + \text{常數} \quad 1M$$

$$= \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x-3}{3} + \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2} + \text{常數} \quad 1A$$

- (b) 在第一象限中， $y^2 = \sqrt{6x-x^2} = \sqrt{x(6-x)}$ 。 1M

$$\text{體積} = \pi \int_0^6 \sqrt{x(6-x)} dx \quad 1M$$

$$= \pi \left[\frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x-3}{3} + \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2} \right]_0^6 \quad 1M$$

$$= \frac{9\pi^2}{2} \quad 1A$$

5. (a) 體積 = $\pi \int_4^{4+h} y \, dy$ 1M

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_4^{4+h}$$

$$= \frac{\pi}{2} (h^2 + 8h)$$

1

(b) (i) $V = V_1 + \frac{\pi}{2} (h^2 + 8h)$ ，其中 V_1 為該平截頭體的體積，對 $4 \leq H \leq 12$ ， $h = H - 4$ 。

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi(2h+8)}{2} \frac{dh}{dt}$$

1A

$$8 = \frac{\pi[2(7-4)+8]}{2} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{8}{7\pi}$$

所求之率為 $\frac{8}{7\pi}$ cm/s。

1A

(ii) 考慮形成該平截頭體的圓錐。設該圓錐的高為 H_0 cm。

$$\frac{H_0 - 4}{H_0} = \frac{2}{4}$$

1M

$$H_0 = 8$$

1A

$$V = \frac{\pi}{3} (4^2)(8) \left[1 - \left(\frac{8-H}{8} \right)^3 \right]$$

1M+1A

$$= \frac{128\pi}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{H}{8} \right)^3 \right]$$

1

(iii) 上半部的體積 = $\frac{\pi}{2} [8^2 + 8(8)] = 64\pi \text{ cm}^3$

已漏出的奶 = $\frac{\pi}{2} \times 130 = 65\pi \text{ cm}^3 > 64\pi \text{ cm}^3$

餘下的奶的深度小於 4 cm。

$$64\pi + \frac{128\pi}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{4}{8} \right)^3 \right] - 65\pi = \frac{128\pi}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{H}{8} \right)^3 \right]$$

1M

$$\left(1 - \frac{H}{8} \right)^3 = \frac{19}{128}$$

$$1 - \frac{H}{8} = \left(\frac{19}{128} \right)^{\frac{1}{3}}$$

1A

$$V = \frac{128\pi}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{H}{8} \right)^3 \right]$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{128\pi}{3} \left[0 - 3 \left(1 - \frac{H}{8} \right)^2 \left(-\frac{1}{8} \right) \frac{dH}{dt} \right]$$

$$= 16\pi \left(1 - \frac{H}{8} \right)^2 \frac{dH}{dt}$$

1A

$$-\frac{\pi}{2} = 16\pi \left(\frac{19}{128} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dH}{dt} \approx -0.111$$

所求之率為 0.111 cm/s。

1A

6. (a) (i) 代 $y = 0$ 至 $3x^2 - 2y - 4 = 0$ ，可得 $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ 。 1A
- 點 $\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}, 0\right)$ 在曲線 $3x^2 + 2y + k = 0$ 上，
- $$3 \times \frac{4}{3} + 2(0) + k = 0$$
- $$k = -4$$
- 1A
- (ii) BC 的方程可寫成 $y = -\frac{3}{2}x^2 + 2$ 。
頂點的坐標為 $(0, 2)$ 。 1A
- (b) (i) 當 $0 \leq h \leq 2$ ，
體積 $= \pi \int_0^h \left[\frac{2y+4}{3} - \frac{4-2y}{3} \right] dx$ 1M+1A
- $$= \pi \int_0^h \frac{4y}{3} dy$$
- $$= \pi \left[\frac{2y^2}{3} \right]_0^h$$
- 1M
- $$= \frac{2\pi h^2}{3} \text{ 立方單位}$$
- 1A
- (ii) 當 $2 < h \leq 6$ ，
體積 $= \frac{2\pi(2)^2}{3} + \pi \int_2^h \frac{2y+4}{3} dy$ 1M
- $$= \frac{8\pi}{3} + \pi \left[\frac{4y}{3} + \frac{y^2}{3} \right]_2^h$$
- $$= \pi \left(\frac{h^2}{3} + \frac{4h}{3} - \frac{4}{3} \right) \text{ 立方單位}$$
- 1A
- (c) 設 V 立方單位為杯中的水在時間 t 秒時的體積。
當 $V = \frac{28\pi}{3}$ ，可得 $V > \frac{8\pi}{3}$ 及故此 $h > 2$ 。 1M
- $$\frac{28\pi}{3} = \pi \left(\frac{h^2}{3} + \frac{4h}{3} - \frac{4}{3} \right)$$
- $$h^2 + 4h - 32 = 0$$
- 1M
- $$h = 4 \text{ 或 } -8 \text{ (捨去)}$$
- 對 $2 < h \leq 6$ ， $\frac{dV}{dt} = \pi \left(\frac{2h}{3} + \frac{4}{3} \right) \frac{dh}{dt}$ 。 1M
- 當 $\frac{dV}{dt} = \frac{8\pi}{3}$ 及 $h = 4$ ，
- $$\frac{8\pi}{3} = \pi \left(\frac{2 \times 4}{3} + \frac{4}{3} \right) \frac{dh}{dt}$$
- $$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{3}$$
- 所求變率為每秒 $\frac{2}{3}$ 單位。 1A

7. (a) $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 8x + 16} = 10 - \sqrt{x^2 + y^2 - 8x + 16} \quad 1M$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 16 = 100 + x^2 + y^2 - 8x + 16 - 20\sqrt{x^2 + y^2 - 8x + 16}$$

$$5\sqrt{x^2 + y^2 - 8x + 16} = 25 - 4x \quad 1M$$

$$25(x^2 + y^2 - 8x + 16) = 625 - 200x + 16x^2$$

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad 1$$

(b) (i) 設 V 立方單位為水的體積。

$$V = \pi \int_{-3}^{-3+h} 25 \left(1 - \frac{y^2}{9} \right) dy \quad 1M$$

$$= \frac{25\pi}{9} \int_{-3}^{-3+h} (9 - y^2) dy$$

$$= \frac{25\pi}{9} \left[9y - \frac{y^3}{3} \right]_{-3}^{-3+h} \quad 1A$$

$$= \frac{25\pi}{27} (9h^2 - h^3) \quad 1A$$

(ii) $\frac{dV}{dh} = \frac{25\pi}{27} (18h - 3h^2) \frac{dh}{dt} \quad 1M$

$$30 - 5 = \frac{25\pi}{9} (6h - h^2) \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi(6h - h^2)} \quad 1A$$

$$= \frac{9}{-\pi(h-3)^2 + 9\pi} \quad 1M$$

由於 $0 < h < 6$ ， $\frac{dh}{dt}$ 在當分母為最小時達至最大值。

所求水深為 3 單位。 1A

(iii) $V = \int \frac{-\pi}{800} (t + 100) dt \quad 1M$

$$= -\frac{\pi t^2}{1600} - \frac{\pi t}{8} + C$$

當 $t = 0$ ， $h = 3$ 及 $V = \frac{25\pi}{27} [9(3)^2 - 3^3] = 50\pi$ 。

故此， $C = 50\pi$ 。 1A

當 $V = 0$ ，

$$-\frac{\pi t^2}{1600} - \frac{\pi t}{8} + 50\pi = 0 \quad 1M$$

$$t^2 + 200t - 80\,000 = 0$$

$$t = 200 \quad \text{或} \quad -400 \quad (\text{捨去})$$

所求時間為 200 分鐘。 1A

8. (a) $f(-2) = (-2)^3 + p(-2)^2 + q(-2) + 1 = 9$ 1M

$$4p - 2q = 16$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2px + q$$
 1A

$$3(-2)^2 + 2p(-2) + q = 0$$

$$4p - q = 12$$

求解後，可得 $p = 2$ 及 $q = -4$ 。 1A

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 4$ 。故此， $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=-2} = 6(-2) + 4 = -8 < 0$ 。 1M

故此， P 為極大點，而非極小點。 1A

(c) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 4 = 0$ 1M

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{或} \quad -2$$

當 $x = \frac{2}{3}$ ， $y = -\frac{13}{27}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2} = 8 > 0$ 。

故此，極大點為 $(-2, 9)$ 而極小點為 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{13}{27}\right)$ 。 1A

(d) 當 $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 4 = 0$ ， $x = -\frac{2}{3}$ 。

x	$x < -\frac{2}{3}$	$x > -\frac{2}{3}$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	-	+

1M

拐點為 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{115}{27}\right)$ 。 1A

(e) L 的方程為 $y = 9$ 。

$$x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 9$$
 1M

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$(x+2)^2(x-2) = 0$$

$$x = \pm 2$$

面積 = $\int_{-2}^2 [9 - (x^3 + 2x^2 - 4x + 1)] dx$ 1M

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 8x \right]_{-2}^2$$
 1M

$$= \frac{64}{3}$$
 1A