1. (a) $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,\ 5)} = \left(2 \cdot 1 - \frac{1}{1}\right)^3 = 1$ 1A

切線方程為

$$y - 5 = 1(x - 1)$$

$$x - y + 4 = 0$$ 1A

(b) (i) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3(2x)\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^3$ 1M

$= 8x^3 - 12x + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}$ 1A

(ii) $y = \int \left(2x - \frac{1}{x}\right)^3 \mathrm{d}x$

$= \int \left(8x^3 - 12x + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{d}x$

$= 2x^4 - 6x^2 + 6\ln|x| + \frac{1}{2x^2} + C$ 1M

由於 $P(1,\ 5)$ 在 S，可得 $C = \frac{17}{2}$。 1M

S 的方程為 $y = 2x^4 - 6x^2 + 6\ln x + \frac{1}{2x^2} + \frac{17}{2}$ for $x > 0$。 1A

2. (a) $y = \int (e^x - 1)\,\mathrm{d}x = e^x - x + C$ 1A

代 $(1,\ e)$，可得 $C = 1$。 1M

因此，$y = e^x - x + 1$。 1A

(b) 當 $x = 0$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$。 1M

所求方程為 $y = 2$。 1A

3. (a) $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ 1M

$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, \mathrm{d}x$ 1A

$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 +$ 常數 1A

(b) $y = \int 9x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$ 1M

$= 9\left(\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3\right) + C$ 1M

$= 3x^3 \ln x - x^3 + C$

代 $(1, 4)$，可得 $C = 5$。 1M

$\varGamma$ 的方程為 $y = 3x^3 \ln x - x^3 + 5$。 1A

4. (a) 設 $u = 1 + x^2$。則 $\mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x$。 1M

$\int x^3 \sqrt{1 + x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (u - 1)\sqrt{u} \, \mathrm{d}u$ 1M

$= \frac{1}{2} \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) \, \mathrm{d}u$

$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} +$ 常數

$= \frac{(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} +$ 常數 1A

(b) $y = \int 15x^3 \sqrt{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$ 1M

$= 3(1 + x^2)^{\frac{5}{2}} - 5(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ 1M

代 $(0, 2)$，可得 $C = 4$。 1M

$\varGamma$ 的方程為 $y = 3(1 + x^2)^{\frac{5}{2}} - 5(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} + 4$。 1A

5. (a) 設 $x+1=2\tan\theta$。則 $\mathrm{d}x=2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{2\sec^2\theta}{(2\tan\theta)^2+4}\,\mathrm{d}\theta &&\text{1M+1A}\\&=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\theta+\text{常數}\\&=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\text{常數} &&\text{1A}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}y&=\int\frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}-\int\frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x &&\text{1M}\\&=\ln|x^2+2x+5|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C\quad\text{其中 }C\text{ 為一常數}\end{aligned}$$

$$\ln 2=\ln|(-3)^2+2(-3)+5|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{-3+1}{2}+C \qquad \text{1M}$$

$$C=-\frac{\pi}{8}-2\ln 2 \qquad \text{1A}$$

當 $x=-1$ 時，

$$\begin{aligned}y&=\ln|1-2+5|-\frac{1}{2}\tan^{-1}0-\frac{\pi}{8}-2\ln 2\\&=-\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

G 通過點 $\left(-1,\ \frac{-\pi}{8}\right)$。 1A

6. (a) 在 P 的切線斜率 $= f'(e^3) = \dfrac{1}{e^3}\ln\left(e^3\right)^2 = 6e^{-3}$ 1M

所求方程為

$$y - 7 = 6e^{-3}(x - e^3)$$

$$0 = 6e^{-3}x - y + 1$$ 1A

(b) $y = \displaystyle\int \frac{2}{x}\ln x \, \mathrm{d}x$

設 $u = \ln x$。$\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$。

$$y = 2\int u \, \mathrm{d}u$$ 1M

$$= u^2 + C$$

$$= (\ln x)^2 + C$$

代 $\left(e^3,\ 7\right)$，可得 $C = -2$。 1M

Γ 的方程為 $y = (\ln x)^2 - 2$。 1A

(c) $f''(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}\ln x$ 1A

當 $f''(x) = 0$，

$$\frac{2}{x^2}(1 - \ln x) = 0$$

$$x = e$$

x	$0 < x < e$	$x > e$
$f''(x)$	$+$	$-$

1M

當 $x = e$，$y = (\ln e)^2 - 2 = -1$。

拐點為 $(e,\ -1)$。 1A

7. (a) 對 $x > 0$，

$$h'(x) = \frac{1}{x}\left[2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}\right]$$ 1M

$$= \frac{2}{x}\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{15}{8x}$$

$$\geq \frac{15}{8x} > 0$$

因此，$h(x)$ 為遞增函數。 1A

(b) (i) $h(x) = \int (2x - 7 + 8x^{-1})\,\mathrm{d}x$ 1M

$= x^2 - 7x + 8\ln|x| +$ 常數

當 $x = 1$，$1^2 - 7(1) + 8\ln 1 + C = 3$，可得 $C = 9$。 1M

H 的方程為 $y = x^2 - 7x + 8\ln x - 9$。 1A

(ii) $h''(x) = 2 - 8x^{-2}$ 1M

當 $h''(x) = 0$，

$$2 = \frac{8}{x^2}$$

$x = 2$ 或 -2（捨去）

x	$0 < x < 2$	$x > 2$
$h''(x)$	$-$	$+$

1M

當 $x = 2$，$y = 2^2 - 7(2) + 8\ln 2 - 9 = 8\ln 2 - 1$

H 的拐點為 $(2,\ 8\ln 2 - 1)$。 1A

8. (a) 設 $x = 2\sin\theta$。則 $\mathrm{d}x = 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$。 1M

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{k-3x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{k-6\sin\theta}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{1M} \\ &= \int (k-6\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= k\theta + 6\cos\theta + C \\ &= k\sin^{-1}\frac{x}{2} + 3\sqrt{4-x^2} + C \end{aligned}$$

其中 C 為一常數。

Γ 通過原點。

$$0 = 0 + 3\sqrt{4} + C$$

$$C = -6$$

所求方程為 $y = k\sin^{-1}\frac{x}{2} + 3\sqrt{4-x^2} - 6$。 1A

(b) (i) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{k-3x}{\sqrt{4-x^2}}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-3(4-x^2)^{\frac{1}{2}} - (k-3x)\left(\frac{1}{2}\right)(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{4-x^2}$$

$$= \frac{kx-12}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

當 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ 時，$x = \frac{k}{3}$。 1M

當 $x = \frac{k}{3}$ 時，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{3x^2-12}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-3}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}} < 0$。

因此，Γ 在 $x = \frac{k}{3}$ 有一極大點。

由於 $-2 < x < 2$, 可得 $-6 < k < 6$。 1A

(ii) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{kx-12}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ 1M

對 $-2 < x < 2$ 及 $-6 < k < 6$，可得 $-12 < kx < 12$。

對 $-2 < x < 2$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} < 0$。

由此，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在區間 $(-2,\ 2)$ 內沒有轉號。

因此，Γ 沒有拐點。 1A

9. (a) $V = \int -2t \, \mathrm{d}t$ 1M

$= -t^2 + C$

當 $t = 0$，$V = 580$。故此，$C = 580$。 1M

液體 X 在結束時的體積 $= -24^2 + 580 = 4 > 0$

該宣稱正確。 1A

(b) 當 $t = 18$，$V = -18^2 + 580 = 256$。

$256 = h^2 + 24h$ 1M

$0 = h^2 + 24h - 256$

$h = 8$　或　-32（捨去）

$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = (2h + 24)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ 1M

$-2(18) = [2(8) + 24]\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$

$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{9}{10}$ 1A

10. $y = \int (4\sin^2 x + 1) \, \mathrm{d}x$ 1M

$= \int [2(1 - \cos 2x) + 1] \, \mathrm{d}x$ 1M

$= 3x - \sin 2x + C$

當 $x = \frac{\pi}{2}$，$y = 0$。故此，可得 $C = -\frac{3\pi}{2}$。 1M

所求方程為 $y = 3x - \sin 2x - \frac{3\pi}{2}$。 1A

11. 設 $u = x^3 - 2x + 1$。則 $\mathrm{d}u = (3x^2 - 2)\,\mathrm{d}x$。 1M

$$y = \int (3x^2 - 2)(x^3 - 2x + 1)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int u^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}u \quad \text{1A}$$

$$= \frac{3}{4}(x^3 - 2x + 1)^{\frac{4}{3}} + C \quad \text{1A}$$

代 $x = 0$ 及 $y = 0$，可得 $C = -\dfrac{3}{4}$。 1M

該曲線的方程為 $y = \dfrac{3}{4}(x^3 - 2x + 1)^{\frac{4}{3}} - \dfrac{3}{4}$。 1A

12. (a) $y = \displaystyle\int (x^2 - 2)\,\mathrm{d}x$ 1M

$= \dfrac{x^3}{3} - 2x + k$

代 $x = 3$ 及 $y = 4$，可得 $k = 1$。 1M

C 的方程為 $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x + 1$。 1A

(b) $x^2 - 2 = -2$ 1M

$x = 0$

當 $x = 0$，$y = 1$。該點的坐標為 $(0,\ 1)$。 1A

13. (a) $y = \displaystyle\int (3x^2 - 6x - 1)\,\mathrm{d}x$ 1M

$= x^3 - 3x^2 - x + k$

代 $x = 1$ 及 $y = 0$，可得 $k = 3$ 1M

C 的方程為 $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$。 1A

(b) 在 $x = 0$，$y = 3$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1$ 1A

切線方程為 $y = -x + 3$。 1A

14. 設 $u = x^2 + 1$。則 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$。 1M

$$y = \int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{1A}$$

$$= \frac{2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + k$$

代 $x = 0$ 及 $y = 1$，可得 $k = \dfrac{1}{3}$ 1M

C 的方程為 $y = \dfrac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{3}$。 1A

15. $y = \displaystyle\int \left(6x + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ 1M

$= 3x^2 - \dfrac{1}{x} + C$ 1A

代 $x = 1$ 及 $y = 0$，可得 $C = -2$ 1M

該曲線的方程為 $y = 3x^2 - \dfrac{1}{x} - 2$。 1A

16. $y = \displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ 1M

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (1 + \cos 2x)\,\mathrm{d}x$ 1M

$= \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$ 1A

代 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 及 $y = \pi$，可得 $C = \dfrac{3\pi}{4}$。 1M

所求方程為 $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{3\pi}{4}$。 1A

17. $y = \int (3x^2 + 1)\, \mathrm{d}x$ 1M

$= x^3 + x + k$

代 $x = 1$ 及 $y = 0$，可得 $k = -2$。 1M

C 的方程為 $y = x^3 + x - 2$。 1A

18. (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x(x+1)^n] = (x+1)^n + nx(x+1)^{n-1}$ 1M

$= (x+1)^{n-1}[(n+1)x + 1]$ 1

(b) $y = \int (x+1)^{2004}(2006x + 1)\, \mathrm{d}x$ 1M

$= x(x+1)^{2005} + k$ 1A

$1 = (-1)(0)^{2005} + k$ 1M

$k = 1$

所求方程為 $y = x(x+1)^{2005} + 1$。 1A

19. $y = \int (3 + 2\cos 2x)\, \mathrm{d}x$ 1M

$= 3x + \sin 2x + C$ 1M+1A

$\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{2} + C$ 1M

$C = -1$

所求方程為 $y = 3x + \sin 2x - 1$。 1A

20. (a) 當 $x = 2$，$\frac{dy}{dx} = 0$，

$$0 = 3(2) - 2(2) + k \qquad \text{1M}$$

$$k = -2 \qquad \text{1A}$$

(b) $y = \int (3x^2 - 2x - 2)\,dx$ 1M

$= x^3 - x^2 - 2x + C$

代 $x = 2$ 及 $y = 0$，可得 $C = 0$ 1M

該曲線的方程為 $y = x^3 - x^2 - 2x$。 1A

21. (a) $y = -x + 1$ 的斜率為 -1。在點 A，$\frac{dy}{dx} = -1$，

$$2x + 3 = -1 \qquad \text{1M}$$

$$x = -2$$

當 $x = -2$，$y = -(-2) + 1 = 3$。

A 的坐標為 $(-2,\ 3)$。 1A

(b) $y = \int (2x + 3)\,dx$ 1M

$= x^2 + 3x + k$

代 $x = -2$ 及 $y = 3$，可得 $k = 5$。 1M

該曲線的方程為 $y = x^2 + 3x + 5$。 1A

22. (a) 當 $\dfrac{ds}{dt}=0$，$t=60$。該船需要 60 s 到達 B。 1A

$$s=\int\sqrt{2}\left(2-\frac{t}{30}\right)dt$$ 1M

$$=2\sqrt{2}t-\frac{t^2\sqrt{2}}{60}+C$$

當 $t=0$，$s=0$。可得 $C=0$。 1M

所求距離 $=2\sqrt{2}(60)-\dfrac{60^2\cdot\sqrt{2}}{60}=60\sqrt{2}\text{ m}$ 1A

(b) 設 $AP=x$ m 及所需時間為 T s。

$PB^2=(60\sqrt{2})^2+x^2-2(60\sqrt{2})x\cos 45°$ 1M

$PB=\sqrt{x^2-120x+7200}$

$$T=\frac{x}{5}+\frac{\sqrt{x^2-120x+7200}}{3}$$ 1M+1A

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}(x^2-120x+7200)^{-\frac{1}{2}}(2x-120)$$ 1M

當 $\dfrac{dT}{dx}=0$，

$$\frac{1}{5}=\frac{60-x}{3\sqrt{x^2-120x+7200}}$$

$$9(x^2-120x+7200)=25(x^2-120x+3600)$$

$$0=16x^2-1920x+25\,200$$

$x=15$ 或 105（捨去） 1A

x	$0<x<15$	$x>15$
$\dfrac{dT}{dx}$	$-$	$+$

1M

T 在 $x=15$ 為極小值。

所需的最短時間 $=\dfrac{15}{5}+\dfrac{\sqrt{15^2-120(15)+7200}}{3}=28\text{ s}$ 1A