

1 結構式試題

1. (a) $x^2 - 4x + 2 = kx - 3k$ 1M

$$x^2 + (-4 - k)x + (3k + 2) = 0$$

$$\Delta = (-4 - k)^2 - 4(1)(3k + 2)$$
 1M

$$= k^2 - 4k + 8$$

$$= (k - 2)^2 + 4$$

$$> 0$$

因此， L 與 P 相交於兩相異點。 1

(b) (i) α 及 β 為方程 $x^2 + (-4 - k)x + (3k + 2) = 0$ 的相異根。

$$(\alpha - 4)(\beta - 4) = \alpha\beta - 4(\alpha + \beta) + 16$$

$$= (3k + 2) - 4(4 + k) + 16$$
 1M

$$= -k + 2$$
 1A

(ii) $(\alpha - 4)(\beta - 4) < 0$ 1M

$$-k + 2 < 0$$

$$k > 2$$

$$AB \text{ 的中點的 } y \text{ 坐標} = \frac{[k\alpha - 3k] + [k\beta - 3k]}{2}$$
 1M

$$= \frac{k(4 + k) - 6k}{2}$$

$$= \frac{k(k - 2)}{2}$$

$$> 0 \quad (\text{對 } k > 2)$$

因此， A 與 B 的中點不可能位於 x 軸之下方。 1A

2. (a) 設 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} 5 = 2a + \frac{b}{2} \\ -10 = -3a + \frac{b}{-3} \end{cases}$$
 1M

求解後，可得 $a = 4$ 及 $b = -6$ 。 1A

因此， $f(x) = 4x - \frac{6}{x}$ 。

(b) $4x - \frac{6}{x} = 23$

$$4x^2 - 23x - 6 = 0$$
 1M

$$x = -\frac{1}{4} \text{ 或 } 6$$
 1A

3. (a) $\log(x+2) + \log(x-7) = 1$
 $\log[(x+2)(x-7)] = 1$ 1M
 $(x+2)(x-7) = 10^1$
 $x^2 - 5x - 24 = 0$ 1M
 $x = 8$ 或 -3 (捨去) 1A
- (b) $9^x - 2(3^{x+1}) - 27 = 0$
 $(3^x)^2 - 6(3^x) - 27 = 0$ 1M
 $3^x = 9$ 或 -3 (捨去) 1A
 $3^x = 3^2$
 $x = 2$ 1A
4. (a) $z = \frac{5(a+i)}{a-i} \times \frac{a+i}{a+i}$ 1M
 $= \frac{5(a^2-1) + 10ai}{a^2+1}$
 $= \frac{5(a^2-1)}{a^2+1} + \frac{10a}{a^2+1}i$ 1A
- (b) $\frac{5(a^2-1)}{a^2+1} - \frac{10a}{a^2+1} = 1$ 1M
 $5a^2 - 10a - 5 = a^2 + 1$
 $4a^2 - 10a - 6 = 0$
 $a = 3$ 或 -0.5 (捨去) 1A
 $z = 4 + 3i$, 方程的兩根為 $4 \pm 3i$ 。
 $s = (4 + 3i)(4 - 3i) = 25$ 1A

2 多項選擇題

1. A

$$mx + c = -x^2 + px + q$$

$$0 = -x^2 + (p-m)x + (q-c)$$

方程的根為交點的 x 坐標，即 α 及 β 。

因此， $\alpha + \beta = -\frac{(p-m)}{-1} = p-m$ 。

2. D

$$2kx + 1 = x^2 + 1$$

$$0 = x^2 - 2kx$$

$$x = 0 \quad \text{或} \quad 2k$$

AB 的中點的 x 坐標

$$= \frac{0 + 2k}{2}$$

$$= k$$

AB 的中點的 y 坐標

$$= 2k(k) + 1$$

$$= 2k^2 + 1$$

3. C

A. ✗ $\circ (\sqrt{2}i)^2 = -2 \neq 2i \circ$

B. ✗ $\circ (-\sqrt{2}i)^2 = -2 \neq 2i \circ$

C. ✓ $\circ (1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \circ$

D. ✗ $\circ (1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i \circ$

4. D

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 + 1 = 0$$

$$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 1 = 0$$

$$\log_2 x = 1$$

$$x = 2$$

5. D

$$x = \log_9 y$$

$$x = \frac{\log y}{2 \log 3}$$

$$2x = \log_3 y$$

$$x^3 - 5 \log_3 y = -6x$$

$$x^3 - 5(2x) = -6x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{或} \quad \pm 2$$

$$\log_3 y = 0 \quad \text{或} \quad \pm 4$$

$$y = 1 \quad \text{或} \quad 3^4 \quad \text{或} \quad 3^{-4}$$

$$y = 1 \quad \text{或} \quad 81 \quad \text{或} \quad \frac{1}{81}$$

6. B

$$9(\log_8 y)^2 = 3(\log_8 y + 1) - 1$$

$$9(\log_8 y)^2 - 3(\log_8 y) - 2 = 0$$

$$\log_8 y = -\frac{1}{3} \quad \text{或} \quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{\log_2 y}{\log_2 8} = -\frac{1}{3} \quad \text{或} \quad \frac{2}{3}$$

$$\log_2 y = -1 \quad \text{或} \quad 2$$

7. C

m 及 n 為方程 $\pi^{2x} - 9\pi^x + 18 = 0$ 的根。

$u = \pi^m$ 及 $u = \pi^n$ 為方程 $u^2 - 9u + 18 = 0$ 的根。

$$\pi^m \times \pi^n = \frac{18}{1}$$

$$\pi^{m+n} = 18$$

$$m + n = \log_{\pi} 18$$

8. A

$$(x+2)^2 = 10 + 3x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{或} \quad 2$$

$$\log_2 y = -3 + 2 \quad \text{或} \quad \log_2 y = 2 + 2$$

$$y = 2^{-1} \qquad y = 2^4$$

$$y = \frac{1}{2} \qquad y = 16$$

9. D

設 $u = \log_3 x$ 及 $v = \log_3 y$ 。

可得 $u = 2v - 1$ 及 $4v^2 = 6(u + v) - 2$ 。

$$4v^2 = 6(2v - 1) + 6v - 2$$

$$4v^2 - 18v + 8 = 0$$

$$v = \log_3 y = 4 \quad \text{或} \quad \frac{1}{2}$$

$$y = 3^4 \quad \text{或} \quad 3^{\frac{1}{2}}$$

$$y = 81 \quad \text{或} \quad \sqrt{3}$$

10. C

a 及 b 為方程 $(\log_k x)^2 - 8 \log_k x + 12 = 0$ 的根。

$u = \log_k a$ 及 $u = \log_k b$ 為方程 $u^2 - 8u + 12 = 0$ 的根。

$$\log_k a + \log_k b = -\frac{-8}{1}$$

$$\log_k ab = 8$$

$$ab = k^8$$

11. A

α 及 β 為方程 $(\log_9 x)^2 + \log_9 x - 12 = 0$ 的根。

$u = \log_9 \alpha$ 及 $u = \log_9 \beta$ 為方程 $u^2 + u - 12 = 0$ 的根。

$$\log_9 \alpha + \log_9 \beta = -\frac{1}{1}$$

$$\frac{\log_3 \alpha}{\log_3 9} + \frac{\log_3 \beta}{\log_3 9} = -1$$

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = -2$$

12. B

$$\log_3 y - (\log_3 y)^2 = (3x - 1) - (3x + 11)$$

$$-(\log_3 y)^2 + \log_3 y + 12 = 0$$

$$\log_3 y = -3 \quad \text{或} \quad 4$$

$$\text{因此, } \log_9 y = \frac{\log_3 y}{\log_3 9} = \frac{\log_3 y}{2} = -\frac{3}{2} \text{ 或 } 2。$$

13. D

α 及 β 為方程 $a^{2x} - 10a^x + 9 = 0$ 的根。

$u = a^\alpha$ 及 $u = a^\beta$ 為方程 $u^2 - 10u + 9 = 0$ 的根。

$$a^\alpha \times a^\beta = \frac{9}{1}$$

$$a^{\alpha+\beta} = 9$$

$$\alpha + \beta = \log_a 9$$

14. B

$$(\log_x 2)^2 - 4\log_x 4 + 12 = 0$$

$$(\log_x 2)^2 - 8\log_x 2 + 12 = 0$$

$$\log_x 2 = 2 \quad \text{或} \quad 6$$

$$\log_x 2 = 2$$

$$\text{or } \log_x 2 = 6$$

$$x^2 = 2$$

$$x^6 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \quad \text{或} \quad -\sqrt{2} \quad (\text{捨去})$$

$$x = 2^{\frac{1}{6}} \quad \text{或} \quad -2^{\frac{1}{6}} \quad (\text{捨去})$$

該方程有 2 個實根。

15. C

$$\log_3 y^2 = 2(\log_3 y)^2 - 4$$

$$0 = 2(\log_3 y)^2 - 2\log_3 y - 4$$

$$\log_3 y = 2 \quad \text{或} \quad -1$$

$$\frac{\log_9 y}{\log_9 3} = 2 \quad \text{或} \quad -1$$

$$\log_9 y = 1 \quad \text{或} \quad -\frac{1}{2}$$

16. D

$$(\log_3 y)^3 - 2 \log_3 y = 2(\log_3 y)$$

$$(\log_3 y)[(\log_3 y)^2 - 4] = 0$$

$$\log_3 y = 0 \quad \text{或} \quad \pm 2$$

$$y = 1 \quad \text{或} \quad 3^{\pm 2}$$

$$y = 1 \quad \text{或} \quad 9 \quad \text{或} \quad \frac{1}{9}$$

17. D

$$m^{2x} - 9m^x + 20 = 3m^x$$

$$m^{2x} - 12m^x + 20 = 0$$

$$m^x = 2 \quad \text{或} \quad 10$$

$$x = \log_m 2 \quad \text{或} \quad \log_m 10$$

$$\alpha + \beta = \log_m 2 + \log_m 10 = \log_m 20$$

18. B

$$(\log_9 x)^2 - 5 \log_9 x = 4 \log_9 x - 18$$

$$(\log_9 x)^2 - 9 \log_9 x + 18 = 0$$

$$\log_9 x = 3 \quad \text{或} \quad 6$$

$$x = 9^3 \quad \text{或} \quad 9^6$$

$$x = 729 \quad \text{或} \quad 531\,441$$

$$\alpha + \beta = 729 + 531\,441 = 532\,170$$

19. B

$$2(1 + \log_4 y)^2 = 9(\log_4 y - 1) + 14$$

$$2(\log_4 y)^2 - 5(\log_4 y) - 3 = 0$$

$$\log_4 y = 3 \quad \text{或} \quad -\frac{1}{2}$$

$$y = 4^3 \quad \text{或} \quad 4^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = 64 \quad \text{或} \quad \frac{1}{2}$$

20. D

$$9^{x+1} - 3^x + k = 0$$

$$9(3^x)^2 - 3^x + k = 0$$

$$9u^2 - 3u + k = 0 \quad (\text{其中 } u = 3^x)$$

$u = 3^\alpha$ 及 $u = 3^\beta$ 為方程 $9u^2 - 3u + k = 0$ 的根。

考慮兩根之積。

$$3^\alpha \times 3^\beta = \frac{k}{9}$$

$$3^{\alpha+\beta} = \frac{k}{9}$$

$$\alpha + \beta = \log_3 \frac{k}{9}$$

$$= \log_3 k - \log_3 9$$

$$= \log_3 k - 2$$

21. C

$$\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 1} = 1$$

$$1 - \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = (x+1)(x-1)$$

$$1 - (x-1) = x^2 - 1$$

$$0 = x^2 + x - 3$$

由於 α 及 β 為根，可得 $\alpha + \beta = -1$ 及 $\alpha\beta = -3$ 。

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= (-1)^2 - 2(-3)$$

$$= 7$$

22. D

$$16^x + 2^{2x-1} - \frac{15}{2} = 0$$

$$(4^x)^2 + 2^{-1}(4^x) - \frac{15}{2} = 0$$

$$4^x = \frac{5}{2} \quad \text{或} \quad -3 \quad (\text{捨去})$$

$$x \log 4 = \log \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{\log 5 - \log 2}{\log 4}$$

23. D

α 及 β 為方程 $(\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x - 6 = 0$ 的根。

$u = \log_2 \alpha$ 及 $u = \log_2 \beta$ 為方程 $u^2 - 5u - 6 = 0$ 的根。

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = -\frac{-5}{1}$$

$$\log_2(\alpha\beta) = 5$$

$$\alpha\beta = 2^5$$

$$= 32$$

24. C

設 $u = \log x$ 。

$$\frac{1}{5u-3} + 3 = \frac{13}{u+5}$$

$$(u+5) + 3(5u-3)(u+5) = 13(5u-3)$$

$$15u^2 + 2u - 1 = 0$$

$$u = \log x = -\frac{1}{3} \quad \text{或} \quad \frac{1}{5}$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x = \frac{1}{3} \quad \text{或} \quad -\frac{1}{5}$$

25. A

$$2(1 + \log_4 y)^2 = 9 \left(\frac{3}{2} \log_8 y - 1 \right) + 14$$

$$2(1 + \log_4 y)^2 = 9 \left[\frac{3}{2} \times \frac{\log_4 y}{\log_4 8} - 1 \right] + 14$$

$$2(1 + \log_4 y)^2 = 9(\log_4 y - 1) + 14$$

$$2(\log_4 y)^2 - 5 \log_4 y - 3 = 0$$

$$\log_4 y = -\frac{1}{2} \quad \text{或} \quad 3$$

$$y = 4^{-\frac{1}{2}} \quad \text{或} \quad 4^3$$

$$y = \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad 64$$

26. C

$$2^{\log_3 x^2} - 18(2^{\log_3 x}) + 32 = 0$$

$$(2^{\log_3 x})^2 - 18(2^{\log_3 x}) + 32 = 0$$

$$2^{\log_3 x} = 2 \quad \text{或} \quad 16$$

$$\log_3 x = 1 \quad \text{或} \quad 4$$

$$x = 3 \quad \text{或} \quad 3^4$$

$$x = 3 \quad \text{或} \quad 81$$

27. B

$$5 \log_2 \alpha + 5 \log_2 \beta = \frac{10}{3}$$

$$\log_2 \alpha \beta = \frac{2}{3}$$

$$\alpha \beta = 2^{\frac{2}{3}}$$

28. A

$$\frac{5y+3}{2} \leq 3y+2 \quad \text{及} \quad 3y+2 < 2y+5$$

$$-\frac{y}{2} \leq \frac{1}{2} \qquad y < 3$$

$$y \geq -1$$

因此， $-1 \leq y < 3$ 。

29. B

$$8x - 6(x+1) > 3 \quad \text{或} \quad \frac{7-4x}{2} < -1$$

$$x > \frac{9}{2} \qquad x > \frac{9}{4}$$

因此，可得 $x > \frac{9}{4}$ 。

最小的整數為 3。

30. A

$$-4x < 6-x \quad \text{及} \quad 5(x+1) > 17+x$$

$$-3x < 6 \qquad 4x > 12$$

$$x > -2 \qquad x > 3$$

因此， $x > 3$ 。

31. D

$$\frac{5-3x}{2} \leq 3-x \quad \text{或} \quad 7+7x < 21$$

$$x \geq -1 \qquad x < 2$$

因此， x 可為任意實數。

32. A

$$-5x < \frac{2}{3} \quad \text{及} \quad \frac{2}{3} < 4x$$

$$x > -\frac{2}{15} \qquad x > \frac{1}{6}$$

因此， $x > \frac{1}{6}$ 。

33. D

$$-3(x-2)+7 \leq 4 \quad \text{或} \quad \frac{7-2x}{3} \geq -1$$

$$x \geq 3 \qquad x \leq 5$$

因此， x 可為任意實數。

34. A

$$\frac{6-7x}{4} \leq 5 \quad \text{或} \quad 2+3x \geq -7$$

$$x \geq -2 \qquad x \geq -3$$

因此， $x \geq -3$ 。

35. D

$$\frac{2x-3}{5} > -10 \quad \text{或} \quad 2(x-7) < 14$$

$$x > -\frac{47}{2} \qquad x < 14$$

因此， x 可為任意實數。

36. B

$$-2-3x > 1 \quad \text{及} \quad \frac{x}{2} + 1 < 2$$

$$-3x > 3 \qquad \frac{x}{2} < 1$$

$$x < -1 \qquad x < 2$$

因此， $x < -1$ 。

37. [B]

$$\begin{array}{ll} 2x + 9 < 1 & \text{或} \quad 1 - \frac{x}{2} \geq 0 \\ 2x < -8 & -\frac{x}{2} \geq -1 \\ x < -4 & x \leq 2 \end{array}$$

因此， $x \leq 2$ 。

38. [C]

$$\begin{array}{ll} 2x - 5 \leq 5x + 1 & \text{及} \quad 5x + 1 < 16 \\ -3x \leq 6 & 5x < 15 \\ x \geq -2 & x < 3 \end{array}$$

因此， $-2 \leq x < 3$ 。

39. [B]

$$\begin{array}{ll} x - \frac{2x - 24}{5} < 3 & \text{或} \quad -6 + 2x < 4x \\ 5x - (2x - 24) < 15 & x > -3 \\ & x < -3 \end{array}$$

因此， $x \neq -3$ 。

40. [D]

$$\begin{array}{ll} 3x - 5 > -8 & \text{及} \quad 9 - x \leq 3 \\ 3x > -3 & -x \leq -6 \\ x > -1 & x \geq 6 \end{array}$$

因此， $x \geq 6$ 。

41. [D]

$$\begin{array}{ll} 6x - 5(x + 1) > -6 & \text{或} \quad 3 < \frac{8 - x}{3} \\ x > -1 & \frac{x}{3} < -\frac{1}{3} \\ & x < -1 \end{array}$$

因此， $x \neq -1$ 。

42. [A]

$$\begin{array}{ll} 7 \geq 5x + 22 & \text{及} \quad 5x + 22 \geq 11x - 26 \\ x \leq -3 & x \leq 8 \end{array}$$

因此，可得 $x \leq -3$ 。

43. A

$$-3x - 2 > \frac{x + 10}{2} \quad \text{或} \quad -9 - 2x > -1$$

$$-\frac{7x}{2} > 7 \qquad -2x > 8$$

$$x < -4$$

$$x < -2$$

因此， $x < -2$ 。

44. B

$$x - \frac{x - 3}{2} > 7 \quad \text{或} \quad 3 < x - 12$$

$$\frac{x}{2} > \frac{11}{2} \qquad x > 15$$

$$x > 11$$

因此， $x > 11$ 。

45. B

$$-7 < 1 - 2x \quad \text{及} \quad 1 - 2x < x + 4$$

$$2x < 8 \qquad -3x < 3$$

$$x < 4 \qquad x > -1$$

因此， $-1 < x < 4$ 。

46. C

$$3a + 1 < 4 \quad \text{及} \quad 4 \leq 5 + 6a$$

$$a < 1 \qquad a \geq -\frac{1}{6}$$

因此， $-\frac{1}{6} \leq a < 1$ 。

47. B

$$2 - 2x \geq \frac{4 - x}{3} \quad \text{或} \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{6}$$

$$x \leq \frac{2}{5} \qquad x < -\frac{1}{3}$$

因此， $x \leq \frac{2}{5}$ 。

48. [D]

$$3x + a > \frac{x-2}{2} \quad \text{或} \quad 2x - 8 > 0$$

$$\frac{5x}{2} > -1 - a \quad x > 4$$

$$x > \frac{2(-1-a)}{5}$$

由於該複合不等式的解為 $x > -4$ ，可得 $\frac{2(-1-a)}{5} = -4$ 。

$$\frac{2(-1-a)}{5} = -4$$

$$a = 9$$

49. [C]

$$x - 11 < \frac{7-5x}{3} \quad \text{及} \quad \frac{7-5x}{3} < 19$$

$$x < 5 \quad x > -10$$

因此， $-10 < x < 5$ 。

50. [B]

$$3(1-4x) \leq 15 \quad \text{或} \quad \frac{2x-1}{4} - \frac{x}{6} > -\frac{13}{12}$$

$$x \geq -1 \quad x > -\frac{5}{2}$$

因此， $x > -\frac{5}{2}$ 。

所求整數為 -2 。

51. [C]

$$-3(4-x) \leq 9 \quad \text{或} \quad \frac{7x+2}{5} < -8$$

$$3x \leq 21 \quad \frac{7x}{5} < -\frac{42}{5}$$

$$x \leq 7 \quad x < -6$$

因此， $x \leq 7$ 。

最大的整數為 7 。

52. [A]

$$\frac{9-x}{4} \geq 3x-1 \quad \text{或} \quad -2x \geq 4$$

$$x \leq 1 \quad x \leq -2$$

因此， $x \leq 1$ 。

53. C

$$5x - 11 < 9 \quad \text{或} \quad 4 - 3x > 7$$

$$5x < 20 \qquad -3x > 3$$

$$x < 4 \qquad x < -1$$

因此， $x < 4$ 。

54. B

$$-\frac{4}{3}(x - 5) \geq 8 \quad \text{或} \quad 2x - 1 \leq -5$$

$$x \leq -1 \qquad x \leq -2$$

因此，可得 $x \leq -1$ 。

55. D

$$3x + 1 \leq 7 \quad \text{及} \quad \frac{6 - x}{2} \leq x$$

$$x \leq 2 \qquad x \geq 2$$

因此， $x = 2$ 。

56. A

$$\frac{3x - 4}{5} \leq 5x + 8 \quad \text{或} \quad 5 - 4x < 13$$

$$x \geq -2 \qquad x > -2$$

因此， $x \geq -2$ 。

57. C

$$\frac{3x - 10}{4} \leq 2x \quad \text{及} \quad 5 > 1 - 2(x - 3)$$

$$x \geq -2 \qquad x > 1$$

因此， $x > 1$ 。

58. A

方程 $2x^2 + 2kx + k + 12 = 0$ 有至多一個實根。

$$\Delta = (2k)^2 - 4(2)(k + 12) \leq 0$$

$$4k^2 - 8k - 96 \leq 0$$

$$-4 \leq k \leq 6$$

59. B

$$\Delta = (2p)^2 - 4(1)(p+2) < 0$$

$$4p^2 - 4p - 8 < 0$$

$$-1 < p < 2$$

60. A

對任意實數 x ， $x^2 - 2kx + (-k+2) \geq 0$ 。

$$(2k)^2 - 4(1)(-k+2) \leq 0$$

$$4k^2 + 4k - 8 \leq 0$$

$$-2 \leq k \leq 1$$

61. A

$y = -x^2 - 2cx + c - 20$ 的圖像在 x 軸或在 x 軸的下方。

方程 $-x^2 - 2cx + c - 20 = 0$ 有二重根或沒有實根。

$$\Delta = (-2c)^2 - 4(-1)(c-20) \leq 0$$

$$4c^2 + 4c - 80 \leq 0$$

$$-5 \leq c \leq 4$$

62. A

$$\pi^{2x} - 9\pi^x + 20 < 2$$

$$(\pi^x)^2 - 9\pi^x + 18 < 0$$

$$3 < \pi^x < 6$$

$$\log 3 < x \log \pi < \log 6$$

$$\frac{\log 3}{\log \pi} < x < \frac{\log 6}{\log \pi}$$

$$\log_{\pi} 3 < x < \log_{\pi} 6$$

63. C

$y = f(x)$ 的圖像在 x 軸的下方。

$$\Delta = (2k)^2 - 4(-1)(-4) < 0$$

$$4k^2 - 16 < 0$$

$$-2 < k < 2$$

k 的最大整數值為 1。