

REG-LOG-2425-ASM-SET 5-MATH

建議題解

多項選擇題

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B | 2. B | 3. B | 4. C | 5. D |
| 6. A | 7. C | 8. D | 9. C | 10. B |
| 11. A | 12. D | 13. D | 14. A | 15. B |
| 16. C | 17. D | 18. B | 19. A | 20. C |
| 21. D | 22. A | 23. A | 24. C | 25. A |
| 26. D | 27. D | 28. D | 29. A | 30. A |

1. B

對所有數字取其對數。

$$A. 600 \log 0.1 = -600$$

$$B. 900 \log 0.2 \approx -629$$

$$C. 1200 \log 0.3 \approx -627$$

$$D. 1500 \log 0.4 \approx -597$$

選項 B 的數字對數為最小。

答案為 B。

2. B

$$420\,000 \times (1 - 6\%)^t < 250\,000$$

$$0.94^t < \frac{25}{42}$$

$$t \log 0.94 < \log \frac{25}{42}$$

$$t > 8.38$$

需要 9 年。

3. B

$$50\,000 \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^n > 12\,000 + 50\,000$$

$$1.01^n > 1.24$$

$$n \log 1.01 > \log 1.24$$

$$n > 21.6$$

需要 22 個月。

4. C

設需時 n 個月。

$$4000(1 - 8\%)^n < 1000$$

$$0.92^n < 0.25$$

$$n \log 0.92 < \log 0.25$$

$$n > 16.6$$

需時 17 個月。

5. D

設需時 n 年。

$$550\,000(1 + 3\%)^3(1 + 2.5\%)^{n-3} > 800\,000$$

$$1.025^{n-3} > \frac{16}{11(1.03)^3}$$

$$(n - 3) \log 1.025 > \log \frac{16}{11(1.03)^3}$$

$$n > 14.6$$

需時 15 年。

6. A

對較大指數的數字取其對數。

$$\text{A. } \log 2013^{2014} = 2014 \log 2013 \approx 6654$$

$$\text{B. } \log 2015^{2012} = 2012 \log 2015 \approx 6648$$

2013^{2014} 的數值最大。

7. C

$$\log_2 6789^{2345} = 2345 \log_2 6789$$

$$\approx 30\,000$$

$$6789^{2345} \approx 2^{30\,000}$$

$$6789^{2345} \approx 8^{10\,000}$$

8. D

留意當 $t = 0$ ， $N = A$ 。

假設需時 n 年。

$$A(5^{-n}) = \frac{1}{4}A$$

$$5^{-n} = \frac{1}{4}$$

$$-n \log 5 = \log \frac{1}{4}$$

$$n = \frac{-\log 4}{-\log 5}$$

$$= \log_5 4$$

9. C

$$\log 123^{456} = 456 \log 123$$

$$\approx 953$$

$$123^{456} \approx 10^{953}$$

答案為 C。

10. B

對「正數部分」取對數。

$$\text{A. } 589 \log 111 \approx 1205$$

$$\text{B. } 577 \log 123 \approx 1206$$

$$\text{C. } 565 \log 135 \approx 1204$$

$$\text{D. } 553 \log 147 \approx 1199$$

選項 B 中的「正數部分」最大。故此，B 的實際數值為最小。

11. A

$$\log_2 y = \frac{3-0}{0-3} \log_2 x + 3$$

$$\log_2 y = -\log_2 x + 3$$

$$\frac{\log y}{\log 2} = -\frac{\log x}{\log 2} + 3$$

$$\log y = -\log x + 3 \log 2$$

$$\log y = \log(2^3 x^{-1})$$

$$y = 8x^{-1}$$

因此， $m = 8$ 及 $n = -1$ 。

I. ✓。

II. ✗。

III. ✗。

$y = 8x^{-1}$ 的圖像不是直線。

12. D

$$\log_{27} y = \log_{27} a + x \log_{27} b$$

$$\text{Slope} = \log_{27} b = \frac{0+1}{3-0}$$

$$b = 27^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3$$

13. D

$$\log_3 y - 4 = \frac{4-0}{0-(-4)}(x-0)$$

$$\log_3 y = x + 4$$

$$y = 3^{x+4}$$

$$y = 81(3^x)$$

14. A

$$\log_8 y - (-2) = \frac{-2-0}{0-3}(x-0)$$

$$\log_8 y = \frac{2x}{3} - 2$$

$$y = 8^{\frac{2x}{3}-2}$$

$$y = \frac{1}{64} \times 4^x$$

可得 $a = \frac{1}{64}$ 及 $b = 4$ 。

因此， $\frac{a}{b} = \frac{1}{64} \div 4 = \frac{1}{256}$ 。

15. B

$\log_3 y$ 的底數為 3，較 1 大。

所求圖像同為遞增。

當 $x = 0$ 時， $\log_3 y = \log_3 0.5 < 0$ 。

所求圖像為遞增且在鉛垂軸上有負值截距。

16. C

當 $x = 0$ 時，可得 $y = 4$ 及 $\log_2 y = 2$ 。

A 的坐標為 (0, 2)。

17. D

$$y = \frac{0 - (-1)}{2 - 0} \log_4 x - 1$$

$$y = \frac{1}{2} \log_4 x - 1$$

$$\log_4 x = 2y + 2$$

$$x = 4^{2y+2}$$

$$x = 2^{4y+4}$$

$$x = 16 \cdot 16^y$$

可得 $m = n = 16$ 。

I. ✗。

II. ✓。

III. ✓。

18. B

$$\log_{27} y = \frac{3 - 0}{0 - 2} \log_9 x + 3$$

$$\frac{\log y}{3 \log 3} = -\frac{3}{2} \times \frac{\log x}{2 \log 3} + 3$$

$$4 \log y + 9 \log x = 36 \log 3$$

$$\log(x^9 y^4) = \log 3^{36}$$

$$x^9 y^4 = 3^{36}$$

$$x^9 y^4 = 9^{18}$$

19. A

考慮點 $(0, 2)$ 。

$$\begin{array}{lcl} \log_3 x = 0 & \text{及} & \log_3 y = 2 \\ x = 1 & & y = 3^2 = 9 \end{array}$$

考慮點 $(4, 0)$ 。

$$\begin{array}{lcl} \log_3 x = 4 & \text{及} & \log_3 y = 0 \\ x = 3^4 = 81 & & y = 1 \end{array}$$

利用 x 及 y 的值檢查各關係式。

	<u>$x = 1 \text{ \& } y = 9$</u>	<u>$x = 81 \text{ \& } y = 1$</u>
A.	✓	✓
B.	✗	
C.	✓	✗
D.	✗	

答案為 A。

20. C

$(0, -1)$

$$\begin{array}{lcl} \log_7 x = 0 & \text{及} & \log_7 y = -1 \\ x = 1 & & y = 7^{-1} \end{array}$$

可得 $7^{-1} = a(1)^b$ ，及 $a = \frac{1}{7}$ 。

$(2, 0)$

$$\begin{array}{lcl} \log_7 x = 2 & \text{及} & \log_7 y = 0 \\ x = 49 & & y = 1 \end{array}$$

可得 $1 = \frac{1}{7}(49)^b$ ，及 $b = \frac{1}{2}$ 。

21. D

$$\log y - 0 = 3(\log x - 2)$$

$$\log y = 3 \log x - 6$$

$$y = 10^{\log x^3 - 6}$$

$$y = 10^{-6} x^3$$

$$y = \frac{x^3}{1\,000\,000}$$

22. A

當 $x = 1$ 時，可得 $\log_2 x = 0$, $y = 4$ 及 $\log_2 y = 2$ 。

$\log_2 y$ 對 $\log_2 x$ 的圖像通過點 $(0, 2)$ 。

當 $y = 1$ 時，可得 $\log_2 y = 0$, $x = 2$ 及 $\log_2 x = 1$ 。

$\log_2 y$ 對 $\log_2 x$ 的圖像通過點 $(1, 0)$ 。

答案為 A。

23. A

設 $\log y = mx + c$ ，其中 m 為一常數。

從該線性圖像，可得 $m > 0$ 及 $c < 0$ 。

$$\log y = mx + c$$

$$y = 10^{mx+c}$$

$$y = 10^c \cdot (10^m)^x$$

考慮 y 對 x 的圖像。

$$y \text{ 截距} = 10^c < 10^0 = 1$$

由於 $10^m > 10^0 = 1$ ，該圖像為遞增曲線。

答案為 A。

24. C

$\log_4 x$ 與 $\log_4 y$ 的底數均為 4，較 1 大。

結果的圖像同為遞減。

當 $\log_4 x = 0$ 時，可得 $x = 1$ 及 $\log_4 y = \log_4(4 \cdot 1^n) = 1 > 0$ 。

縱軸截距為正值。只有選項 C 滿足上述條件。

25. A

$$\frac{\log_3 y - 0}{\log_9 x - (-1)} = 10$$

$$\log_3 y = 10 \log_9 x + 10$$

$$\frac{\log y}{\log 3} = 10 \times \frac{\log x}{2 \log 3} + 10$$

$$\log y = 5 \log x + 10 \log 3$$

$$\log y = \log(3^{10} x^5)$$

$$y = 59049x^5$$

26. D

$$y = a + b^x$$

$$y - a = b^x$$

$$\log(y - a) = x \log b$$

$\log(y - a)$ 對 x 的圖像為一直線。

斜率 = $\log b$ 且通過原點。

27. D

$$x^a y^b = 81^c$$

$$a \log x + b \log y = c \log 81$$

$$\frac{2a \log x}{2 \log 3} + \frac{3b \log y}{3 \log 3} = \frac{c \log 81}{\log 3}$$

$$2a \log_3 x + 3b \log_3 y = 4c$$

$$\text{代 } \log_3 x = 0, \text{ 可得 } \log_3 y = \frac{4c}{3b}。$$

$$\text{代 } \log_3 y = 0, \text{ 可得 } \log_3 x = \frac{2c}{a}。$$

P 及 Q 的坐標分別為 $\left(0, \frac{4c}{3b}\right)$ 及 $\left(\frac{2c}{a}, 0\right)。$

$$\begin{aligned} OP : OQ &= \frac{4c}{3b} : \frac{2c}{a} \\ &= 2a : 3b \end{aligned}$$

28. D

$$\log_2 y = \frac{2-0}{0-4}x^3 + 2$$

$$\log_2 y = -\frac{1}{2}x^3 + 2$$

$$\text{代 } x = -2。$$

$$\log_2 y = -\frac{1}{2}(-2)^3 + 2$$

$$\log_2 y = 6$$

$$y = 2^6$$

$$y = 64$$

29. A

$$\text{對點 } \left(\frac{1}{3}, 0\right),$$

$$\log_8 x = \frac{1}{3} \quad \text{及 } \log_4 y = 0$$

$$x = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \quad y = 1$$

只有選項 A 滿足以上結果。

30. A

設 m 及 c 分別為該圖像的斜率及垂直軸的截距。

$$\log_5 y = mx + c$$

$$y = 5^{mx+c}$$

$$y = (5^m)^x \cdot 5^c$$

由於 $m < 0$ ，可得 $5^m < 1$ 及 y 的值遞減。

由於 $c > 1$ ，可得 $5^c > 5$ 及所求圖像的 y 截距大於 5。

答案為 A。

結構式試題

31. 斜率 = $\frac{-1}{3}$ 。
 $\log_2 y = -\frac{1}{3} \log_2 x + 1$ 1M
 $y = 2^{-\frac{1}{3} \log_2 x + 1}$
 $y = 2x^{-\frac{1}{3}}$
 因此， $a = 2$ 及 $b = -\frac{1}{3}$ 。 1A+1A
32. 斜率 = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 $\log_{16} y = \frac{1}{2}x - 2$ 1M
 $y = 16^{\frac{x}{2} - 2}$ 1M
 $= \frac{1}{256} \cdot 4^x$
 因此， $a = \frac{1}{256}$ 及 $b = 4$ 。 1A
33. $\log_{0.25} y - 0 = \frac{1}{2}(x + 4)$ 1M
 $\log_{0.25} y = \frac{x}{2} + 2$
 $y = 0.25^{\frac{x}{2} + 2}$ 1M
 $= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 1A
34. $\log_{16} y - 0 = -\frac{1}{4}(\log_8 x - 4)$ 1M
 $\log_{16} y = \log_8 8x^{-\frac{1}{4}}$
 $\frac{\log y}{4 \log 2} = \frac{\log 8x^{-\frac{1}{4}}}{3 \log 2}$ 1M
 $y = \left(8x^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$
 $= 16x^{-\frac{1}{3}}$ 1A
35. $\frac{\log_{16} y - 1}{x - 0} = \frac{0 - 1}{-4 - 0}$ 1M
 $\log_{16} y = \frac{x}{4} + 1$
 $y = 16^{\frac{x}{4} + 1}$ 1M
 $= 2^{x+4}$ 1A