

REG-LOCUS-2425-ASM-SET 4-MATH

建議題解

結構式試題

1. (a) L_1 的斜率 $= \frac{2-0}{0-8} = -\frac{1}{4}$
 L_2 的斜率 $= \frac{4-0}{0-16} = -\frac{1}{4}$
 可得 $L_1 \parallel L_2$ 。

因此， Γ 平行於 L_1 。

1A

(b) (i) B 的坐標為 $(0, 3)$ 。

Γ 的方程為

$$\frac{y-3}{x-0} = -\frac{1}{4}$$

$$x + 4y - 12 = 0$$

1M

1A

(ii) A 的坐標為 $(12, 0)$ 。

留意 $\angle AOB = 90^\circ$ 。

AB 為 C 的一直徑。

C 的半徑

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(12-0)^2 + (0-3)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{153}$$

1M

C 的面積

$$= \pi \left(\frac{1}{2} \sqrt{153} \right)^2$$

$$= \frac{153\pi}{4}$$

1M

1A

2. (a) D 的坐標為 $(-5, 4)$ 。

設 (h, k) 為 E 的坐標。

將 P 的軌跡記為 Γ 。

留意 $\Gamma \perp DE$ 。

$$\frac{-4}{3} \times \frac{k-4}{h+5} = -1$$

1M

$$3h - 4k + 31 = 0$$

DE 的中點在 Γ 上。

$$4 \left(\frac{-5+h}{2} \right) + 3 \left(\frac{4+k}{2} \right) - 17 = 0$$

1M

$$4h + 3k - 42 = 0$$

求解後，可得 $h = 3$ 及 $k = 10$ 。

1A

E 的坐標為 $(3, 10)$ 。

(b) C 的半徑

$$= \sqrt{5^2 + 4^2 - 25}$$

$$= 4$$

DE 的中點的坐標為 $(-1, 7)$ 。

由 DE 的中點至 C 的圓心的距離

$$= \sqrt{(-1 + 5)^2 + (7 - 4)^2}$$

$$= 5 > 4$$

P 至 D 的最短距離為 5，大於 C 的半徑。

P 必定在 C 外。

同意該宣稱。

1M

1M

1A

3. (a) G 的坐標為 $(1, 6)$ 。

$$AG = \sqrt{(1 - 19)^2 + (6 - 30)^2}$$

$$= 30$$

1M

1A

(b) (i) Γ 為 AG 的垂直平分線。

$$(ii) C \text{ 的半徑} = \sqrt{1^2 + 6^2 + 25^2} = 17$$

留意 $AM = AN = GM = GN = 17$ 。

$$MN = 2\sqrt{17^2 - 15^2}$$

1A

1M

1M

$$= 16$$

$\triangle AMN$ 的周界

$$= 17 + 17 + 16$$

1M

$$= 50$$

1A

4. (a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (5 + 1)^2 + (10 - 2)^2$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$$

1M

1A

(b) (i) 留意 $(-11 + 1)^2 + (2 - 2)^2 = 100$ 。

Γ 通過 H 。

1A

$$(ii) AH = \sqrt{(-11 - 5)^2 + (2 - 10)^2} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$$

1A

(iii) 設 M 為 AH 的中點。

$\triangle AHK$ 的面積在當 $MK \perp AH$ 及 $\angle HAK < 90^\circ$ 時達至其最大值。

$$BM = \sqrt{10^2 - \left(\frac{\sqrt{320}}{2}\right)^2} = \sqrt{20}$$

1M

所求面積

$$= \frac{(\sqrt{320})(\sqrt{20} + 10)}{2}$$

1M

$$\approx 129$$

$$< 130$$

同意該宣稱。

1A

5. (a) $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = (14 - 7)^2 + (-28 + 4)^2$ 1M

$(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 625$ 1A

(b) (i) Γ 為 GH 的垂直平分線。 1A

(ii) 設 M 為 GH 的中點。

M 的坐標為 $(-2, 8)$ 。

$GM = \sqrt{(7 + 2)^2 + (-4 - 8)^2} = 15 < 25$ 1M

M 在 C_1 內。

因此， Γ 與 C_1 相交於兩相異點。

1

(c) 設 r_2 為 C_2 的半徑。

$$GH = 25 + r_2$$

$$2(15) = 25 + r_2$$

$$r_2 = 5$$

可得 $GQ = GH + r_2 = 35$ 。 1M

$$AB = 2\sqrt{25^2 - 15^2} = 40$$
 1M

留意 $AGBQ$ 為鷁形。

所求面積

$$= \frac{(40)(35)}{2}$$

$$= 700$$

1A

6. (a) P 至 AB 的垂直距離 $= \frac{20 \times 2}{5} = 8$ 1M

P 的軌跡為一對平行於 AB 的直線，與 AB 維持距離 8。

設 θ 為 AB 的傾角。

$$\tan \theta = \frac{6 - 3}{4 - 0} = \frac{3}{4}$$
。故此， $\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$ 。

設 c 為 Γ 的 y 截距。

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{\pm(c - 3)}$$

$$c = -7 \text{ 或 } 13$$

Γ 的方程為 $y = \frac{3}{4}x - 7$ 或 $y = \frac{3}{4}x + 13$ 。 1A

(b) P 至 AB 的垂直距離 $= 8 > 5$

故此不可能使 $AP = AB$ 或 $BP = AB$ 。

當 $AP = BP$ ， P 在 AB 的垂直平分線上。

AB 的垂直平分線的方程為

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{4}{3}(x - 2)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{43}{6}$$

解 $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{43}{6} \\ y = \frac{3}{4}x - 7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{43}{6} \\ y = \frac{3}{4}x + 13 \end{cases}$,

1M

P 的坐標為 $\left(\frac{34}{5}, -\frac{19}{10}\right)$ 或 $\left(-\frac{14}{5}, \frac{109}{10}\right)$ 。

1A+1A

7. (a) G 的坐標為 $(4, 10)$ 。

1M

所求方程為

$$(x - 4)^2 + (y - 10)^2 = (14 - 4)^2 + (20 - 10)^2$$

1M

$$(x - 4)^2 + (y - 10)^2 = 200$$

1A

(b) L_1 的方程為

$$\frac{y - 0}{x + 6} = \frac{20 - 0}{14 + 6}$$

1M

$$y = x + 6$$

圍成的區域的三個頂點的坐標為 $(0, 6)$ 、 $(0, k)$ 及 $(k - 6, k)$ 。

1M

$$\frac{(k - 6)(k - 6 - 0)}{2} = 200$$

$$k - 6 = \pm 20$$

$$k = 26 \text{ 或 } -14 \text{ (捨去)}$$

1A

(c) $\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 10)^2} = \sqrt{(y - 26)^2}$

1M+1M

$$x^2 + y^2 - 8x - 20y + 116 = y^2 - 52y + 676$$

1M

$$x^2 - 8x + 32y - 560 = 0$$

1A