

1. (a) 設水面的半徑為 a cm。藉考慮相似三角形，

$$\frac{a-3}{4-3} = \frac{h}{10} \quad 1M$$

$$a = \frac{h+30}{10}$$

故此，

$$V = \frac{\pi}{3}h \left[3^2 + 3 \left(\frac{h+30}{10} \right) + \left(\frac{h+30}{10} \right)^2 \right] \quad 1M$$

$$= \frac{\pi}{300}h[900 + 30(h+30) + (h^2 + 60h + 900)]$$

$$= \frac{\pi}{300}(h^3 + 90h^2 + 2700h) \quad 1$$

(b) $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{300}(3h^2 + 180h + 2700)\frac{dh}{dt}$ 1M+1A
 當 $h = 5$ ，

$$7\pi = \frac{\pi}{300}[3(5)^2 + 180(5) + 2700]\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{7} \quad 1A$$

水深的遞增速率為 $\frac{4}{7}$ cm/s。

2. 設 V cm³ 及 r cm 分別為氣球的體積及半徑。

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad 1M$$

$$-100 = 4\pi \cdot 10^2 \frac{dr}{dt} \quad 1M$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \quad 1A$$

半徑的變率為 $-\frac{1}{4\pi}$ cm/s。

3. (a) 圓錐的曲面面積 $= \pi(15)(\sqrt{20^2 + 15^2}) = 375\pi \text{ cm}^2$ 1A

$$\frac{A}{375\pi} = \left(\frac{h}{20}\right)^2 \quad 1M$$

$$A = \frac{15}{16}\pi h^2 \quad 1$$

(b) 圓錐的體積 $= \frac{1}{3}(15)^2(20) = 1500\pi \text{ cm}^3$

當水的體積為 $96\pi \text{ cm}^3$,

$$\frac{96\pi}{1500\pi} = \left(\frac{h}{20}\right)^3 \quad 1M$$

$$h = 8 \quad 1A$$

根據 (a) , $A = \frac{15}{16}\pi h^2$ 。可得 $\frac{dA}{dt} = \frac{15\pi}{8}h \frac{dh}{dt}$ 。 1M

代 $\frac{dh}{dt} = \frac{3}{\pi}$, $h = 8$,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{15\pi}{8} \times 8 \times \frac{3}{\pi} = 45 \quad 1A$$

所求之率為 $45 \text{ cm}^2/\text{s}$ 。

4. (a) Q 的坐標為 $(0, 2e^u)$ 。

$$\triangle OPQ \text{ 的面積} = \frac{u(2e^u)}{2} = ue^u \quad 1A$$

(b) 設 v 為 P 的 y 坐標 。

$$v = 2e^u$$

$$\frac{dv}{dt} = 2e^u \frac{du}{dt} \quad 1M$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2e^u} \cdot \frac{dv}{dt}$$

設 A 平方單位為 $\triangle OPQ$ 的面積 , 則 $A = ue^u$ 。

$$\frac{dA}{dt} = (e^u + ue^u) \frac{du}{dt} \quad 1M+1M$$

$$= \left(\frac{1+u}{2}\right) \frac{dv}{dt}$$

當 $u = 4$, $\frac{dA}{dt} = \left(\frac{1+4}{2}\right)(6) = 15 \quad 1A$

因此 , 所求變率為每秒 15 平方單位 。

5. (a) $y = \frac{1}{2} \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}$$

1M

C 在 P 的切線斜率 $= \frac{1}{2r}$; C 在 P 的法線斜率 $= -2r$ 。

設 Q 的坐標為 $(q, 0)$ 。

$$\frac{0 - \frac{1}{2} \ln r}{q - r} = -2r$$

1M

$$\ln r = -4qr + 4r^2$$

$$q = \frac{4r^2 + \ln r}{4r}$$

1

Q 的 x 坐標為 $\frac{4r^2 + \ln r}{4r}$ 。

(b) 設 $\triangle PQR$ 的面積為 A 。

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{4r^2 + \ln r}{4r} - r \right) \left(\frac{1}{2} \ln r \right)$$

1M

$$= \frac{(\ln r)^2}{16r}$$

1A

$$\frac{dA}{dr} = \frac{2}{16r} (\ln r) \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{(\ln r)^2}{16r^2}$$

1M

$$= \frac{\ln r (2 - \ln r)}{16r^2}$$

當 $\frac{dA}{dt} = 0$,

$$\ln r = 2 \quad \text{或} \quad 0$$

$$r = e^2 \quad \text{或} \quad 1 \quad (\text{捨去})$$

r	$1 < r < e^2$	$r > e^2$
$\frac{dA}{dr}$	+	-

1M

$$A \text{ 在 } r = e^2 \text{ 達至最大值。最大面積} = \frac{(\ln e^2)^2}{16e^2} = \frac{1}{4e^2}$$

1A

(c) $OP = \sqrt{r^2 + (\ln \sqrt{r})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 + (\ln r)^2}$

1M

$$\frac{dOP}{dt} = \frac{4r^2 + \ln r}{2r \sqrt{4r^2 + (\ln r)^2}} \cdot \frac{dr}{dt}$$

1M

$$\text{當 } r = e, \frac{dOP}{dt} = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(2e + \frac{1}{2e} \right) \frac{dr}{dt} = \frac{1}{e} \left(e^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{dr}{dt}$$

由於 $\frac{dOP}{dt} \leq 32e^2$,

$$\frac{1}{e} \cdot \left(e^2 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{dt} \leq 32e^2$$

$$\frac{dr}{dt} \leq 32e^3 \left(e^2 + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

當 $r = e$,

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{\ln r(2 - \ln r)}{16r^2} \cdot \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{1}{16e^2} \cdot \frac{dr}{dt} \\ &\leq \frac{1}{16e^2} \cdot 32e^3 \left(e^2 + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &< 2e \cdot (e^2)^{-\frac{1}{2}} = 2\end{aligned}$$

1M

該宣稱正確。

1A

6. (a) 設 A 平方單位為該圓的面積。

$$A = \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2}\right)^2 \pi$$

1M

$$= \frac{\pi}{4} S$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi}{4} \times \frac{dS}{dt}$$

1M

$$5\pi = \frac{\pi}{4} \times \frac{dS}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = 20$$

S 以勻率每秒 20 平方單位增加。

1A

(b) P 及 Q 的坐標分別為 $(u, 2^{u-1})$ 及 $(u, 2^u)$ 。

1A

當 $u = 2$ 時，

$$S = u^2 + 2^{2u-2}$$

$$\frac{dS}{dt} = (2u + 2^{2u-2} \cdot 2 \ln 2) \frac{du}{dt}$$

1M

$$20 = (4 + 8 \ln 2) \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{5}{1 + 2 \ln 2}$$

設 $\triangle OPQ$ 的面積為 β 平方單位。當 $u = 2$ 時，

$$\beta = \frac{u(2^u - 2^{u-1})}{2}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = [(2^{u-1} - 2^{u-2}) + u(2^{u-1} - 2^{u-2}) \ln 2] \frac{du}{dt}$$

1M

$$= (1 + 2 \ln 2) \frac{du}{dt}$$

$$= (1 + 2 \ln 2) \times \frac{20}{4 + 8 \ln 2}$$

$$= 5$$

所求變率為每秒 5 平方單位。

1A

$$7. \quad (a) \quad PQ = \sqrt{u^2 + 36} + \sqrt{(20-u)^2 + 16} \quad 1M$$

$$\frac{dPQ}{du} = u(u^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} + (u-20)[(20-u)^2 + 16]^{-\frac{1}{2}} \quad 1M$$

當 $\frac{dPQ}{du} = 0$ 時，

$$u(u^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} = (20-u)[(20-u)^2 + 16]^{-\frac{1}{2}} \quad 1M$$

$$u^2[(20-u)^2 + 16] = (20-u)^2(u^2 + 36)$$

$$0 = 20u^2 - 1440u + 14400$$

$$u = 12 \quad \text{或} \quad 60 \quad (\text{捨去})$$

u	$0 < u < 12$	$12 < u < 20$
$\frac{dPQ}{du}$	-	+

PQ 在 $u = 12$ 達至極小值。

因此， $a = 12$ 。

(b) (i) 設 β 為長方形 $PQSR$ 的面積。

$$\beta = (PQ)u \quad 1M$$

$$\frac{d\beta}{du} = u \frac{dPQ}{du} + PQ \quad 1M$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\beta}{du} \right|_{u=12} &= (12)(0) + \sqrt{12^2 + 36} + \sqrt{(20-12)^2 + 16} \\ &= 10\sqrt{5} \neq 0 \end{aligned} \quad 1M$$

因此，當 $u = 12$ 時， β 不達至其極小值。

不同意該宣稱。

(ii) 在時間 t min 後，

$$OP = \sqrt{u^2 + (u^2 + 36)}$$

$$\frac{dOP}{dt} = 2u(2u^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dt} \quad 1M$$

$$28 = 2(12)(2(12)^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} \left(\left. \frac{du}{dt} \right|_{u=12} \right) \quad 1M$$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{u=12} = 21$$

設長方形 $PQSR$ 的周界為 p 。

$$p = 2(PQ + u) \quad 1M$$

$$\frac{dp}{dt} = 2 \frac{dPQ}{du} \frac{du}{dt} + 2 \frac{du}{dt} \quad 1M$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dp}{dt} \right|_{u=12} &= 2(0)(21) + 2(21) \\ &= 42 \end{aligned}$$

所求變率為每分鐘 42 單位。

1A

$$8. \quad (a) \quad (i) \quad T = \frac{PQ}{7} + \frac{BQ}{1.4} \quad 1M$$

$$= \frac{x}{7} + \frac{5\sqrt{30^2 + (40-x)^2}}{7}$$

$$= \frac{x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 2500}}{7} \quad 1A$$

$$(ii) \quad \text{當 } T \text{ 為極小值, } \frac{dT}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} (x^2 - 80x + 2500)^{-\frac{1}{2}} (2x - 80) = 0 \quad 1M$$

$$(\sqrt{x^2 - 80x + 2500})^2 = [-5(x - 40)]^2$$

$$2x^2 - 160x + 3125 = 0 \quad 1$$

$$x = 40 - \frac{5\sqrt{6}}{2} \quad \text{或} \quad 40 + \frac{5\sqrt{6}}{2} \quad (\text{捨去})$$

x	$0 < x < 40 - \frac{5\sqrt{6}}{2}$	$40 - \frac{5\sqrt{6}}{2} < x < 40$
$\frac{dT}{dx}$	-	+

$$\text{當 } T \text{ 為極小值, } x = 40 - \frac{5\sqrt{6}}{2} \text{。} \quad 1M$$

$$QB = \sqrt{30^2 + \left[40 - \left(40 - \frac{5\sqrt{6}}{2}\right)\right]^2} = \frac{25\sqrt{6}}{2} \text{ m} \quad 1$$

$$(b) \quad (i) \quad \sin \beta = \frac{30}{\left(\frac{25\sqrt{6}}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad 1A$$

$$\cos \beta = \frac{40 - \left(40 - \frac{5\sqrt{6}}{2}\right)}{\frac{25\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{5} \quad 1A$$

在 $\triangle MAB$,

$$\frac{MB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} \quad 1M$$

$$MB = \frac{40 \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{40 \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \quad 1M$$

$$= \frac{40 \tan \alpha}{\frac{1}{5} \tan \alpha + \frac{2\sqrt{6}}{5}}$$

$$= \frac{200 \tan \alpha}{\tan \alpha + 2\sqrt{6}} \quad 1$$

$$(ii) \quad \frac{dMB}{dt} = 200 \cdot \frac{\sec^2 \alpha (\tan \alpha + 2\sqrt{6}) - \tan \alpha \sec^2 \alpha}{(\tan \alpha + 2\sqrt{6})^2} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \quad 1M$$

$$-1.4 = \frac{400\sqrt{6} \sec^2 0.2}{(\tan 0.2 + 2\sqrt{6})^2} \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} \approx -0.0357 \text{ rad/s} \quad 1A$$

9. (a) $\ell = 2\sqrt{1^2 + x^2 + (\sqrt{2})^2} + 2 - x = 2\sqrt{x^2 + 3} + 2 - x$ 1A
 $\frac{d\ell}{dt} = (x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}}(2x) - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$ 1

(b) (i) 當 $\frac{d\ell}{dx} = 0$,

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}} = 1$$
 1M

$$4x^2 = x^2 + 3$$

$$x = 1 \quad \text{或} \quad -1 \quad (\text{捨去})$$

x	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{3}{2}$
$\frac{d\ell}{dx}$	-	+

 1M

ℓ 在 $x = 1$ 時達至最小值。 1A

(ii) ℓ 在 $x = 0$ 或 $x = \frac{3}{2}$ 達至最大值。

當 $x = 0$, $\ell = 2\sqrt{3} + 2$; 當 $x = \frac{3}{2}$, $\ell = \sqrt{21} + \frac{1}{2} < 2\sqrt{3} + 2$ 1M

故此, ℓ 在 $x = 0$ 達至最大值。 1A

(c) (i) $E = \frac{k}{(2-x)^2} + \frac{2k}{x^2 + 3}$ 1A

(ii) $\frac{dE}{dx} = \frac{2k}{(2-x)^3} - \frac{4kx}{(x^2 + 3)^2}$
 根據 (b), ℓ 在 $x = 1$ 達至最小值。

當 $x = 1$, $\frac{dE}{dx} = 2k - \frac{4k}{16} = \frac{7k}{4} > 0$ 1M

故此, E 在 $x = 1$ 時不會達至最大值。該猜想不正確。 1A

$$10. \quad (a) \quad S = \frac{r^2}{2} \sin 2\theta + \frac{r^2}{2} \sin(\beta - \theta) + \frac{r^2}{2} \sin(2\pi - 2\beta) + \frac{r^2}{2} \sin(\beta - \theta) \quad 1M+1A$$

$$= \frac{r^2}{2} [\sin 2\theta - \sin 2\beta + 2 \sin(\beta - \theta)] \quad 1$$

$$(b) \quad S = \frac{r^2}{2} [\sin 2\theta - \sin 2\beta + 2 \sin(\beta - \theta)]$$

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{r^2}{2} [2 \cos 2\theta - 2 \cos(\beta - \theta)] \quad 1M$$

$$\text{當 } \frac{dS}{d\theta} = 0,$$

$$\cos 2\theta = \cos(\beta - \theta) \quad 1M$$

$$2\theta = \beta - \theta \quad \text{或} \quad 2\pi - (\beta - \theta) \quad (\text{捨去}) \quad \text{或} \quad 2\pi + (\beta - \theta) \quad (\text{捨去})$$

$$\theta = \frac{\beta}{3} \quad 1$$

$$\frac{d^2S}{d\theta^2} = -r^2 [2 \sin 2\theta + \sin(\beta - \theta)]$$

$$\text{當 } \theta = \frac{\beta}{3},$$

$$\frac{d^2S}{d\theta^2} = -r^2 \left[2 \sin \frac{2\beta}{3} + \sin \left(\beta - \frac{\beta}{3} \right) \right]$$

$$= -3r^2 \sin \frac{2\beta}{3} < 0 \quad 1M$$

S 在 $\theta = \frac{\beta}{3}$ 時達至極大值。

$$S_\beta = \frac{r^2}{2} \left[\sin \frac{2\beta}{3} - \sin 2\beta + 2 \sin \left(\beta - \frac{\beta}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{r^2}{2} \left(3 \sin \frac{2\beta}{3} - \sin 2\beta \right)$$

$$= \frac{r^2}{2} \left[3 \sin \frac{2\beta}{3} - \left(3 \sin \frac{2\beta}{3} - 4 \sin^3 \frac{2\beta}{3} \right) \right] \quad 1M$$

$$= 2r^2 \sin^3 \frac{2\beta}{3} \quad 1$$

(c) 對 β 的所有可取值， S_β 在當 $\sin \frac{2\beta}{3} = 1$ 達至最大值。 1A

$$\frac{2\beta}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{故此, } \theta = \frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{4} \quad 1M$$

$$\angle COD = 2\theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$\angle BOC = \angle AOD = \beta - \theta = \frac{\pi}{2}$$

故此， COA 及 BOD 均為直線且 $CA \perp BD$ 。

因此， $ABCD$ 為正方形。該說法正確。 1

11. (a) (i) $A = \pi(1)^2 - \pi(\cos \theta)^2 - \left(\pi(1)^2 \times \frac{2\theta}{2\pi} - \frac{1}{2}(1)^2 \sin 2\theta \right)$ 1M+1A

$$= \pi \sin^2 \theta - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta$$
 1

(ii) $\frac{dA}{d\theta} = \pi(2 \sin \theta \cos \theta) - 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\theta)(2)$ 1A

$$= \pi \sin 2\theta - 1 + (1 - 2 \sin^2 \theta)$$

$$= \pi \sin 2\theta + 2 \sin \theta (\cos \theta \tan \theta)$$

$$= (\pi - \tan \theta) \sin 2\theta$$
 1

(b) $\frac{dA}{d\theta} = (\pi - \tan \theta) \sin 2\theta = 0$ 1M

$$\tan \theta = \pi \quad \text{或} \quad \sin 2\theta = 0 \text{ (rejected)}$$
 1M

$$\theta = \tan^{-1} \pi$$

θ	$0 < \theta < \tan^{-1} \pi$	$\tan^{-1} \pi < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\frac{dA}{d\theta}$	+	-

當 $\tan \theta = \pi$ 時， A 達至其最大值。 1A

(c) 周界 $s = 2\pi(1) \times \frac{2\pi - 2\theta}{2\pi} + 2 \sin \theta + 2\pi(\cos \theta)$

$$= 2\pi - 2\theta + 2 \sin \theta + 2\pi \cos \theta$$
 1A

當 A 為極大時， $\tan \theta = \pi$ 。

可得 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}$ 及 $\sin \theta = \frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}$ 。

$$\frac{ds}{d\theta} = -2 + 2 \cos \theta - 2\pi \sin \theta$$
 1M

$$\left. \frac{ds}{d\theta} \right|_{\tan \theta = \pi} = -2 + \frac{2}{\sqrt{1+\pi^2}} - \frac{2\pi^2}{\sqrt{1+\pi^2}} \approx -7.38 \neq 0$$
 1M

由此當 A 達至其最大值時，周界不達至其最大值。

該學生不正確。 1A

12. (a) (i) $\angle BOC = 4\theta$

$$\angle AOB = \angle AOC = \pi - 2\theta$$

$$S = \frac{1}{2}(1)(1)\sin 4\theta + \frac{1}{2}(1)(1)\sin(\pi - 2\theta) + \frac{1}{2}(1)(1)\sin(\pi - 2\theta) \quad 1M$$

$$= \frac{\sin 4\theta}{2} + \sin 2\theta \quad 1$$

$$(ii) \frac{dS}{d\theta} = 2\cos 4\theta + 2\cos 2\theta \quad 1A$$

$$\text{當 } \frac{dS}{d\theta} = 0,$$

$$\cos 3\theta \cos \theta = \quad 1M$$

$$\cos 3\theta = 0 \quad \text{或} \quad \cos \theta = 0 \quad (\text{捨去})$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad 1A$$

$$\frac{d^2S}{d\theta^2} = -8\sin 4\theta - 4\sin 2\theta$$

$$\left. \frac{d^2S}{d\theta^2} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = -6\sqrt{3} < 0 \quad 1M$$

S 在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 時達至極大值。

$$\begin{aligned} S \text{ 的極大值} &= \frac{1}{2}\sin \frac{4\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \quad 1A$$

$$(b) \angle BOD = \angle DOA = \angle AOE = \angle EOC = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{\pi - 2\theta}{2}$$

$$\triangle AOD \text{ 的面積} = \frac{1}{2}(1)(1)\sin \frac{\pi - 2\theta}{2} \quad 1A$$

$$= \frac{1}{2}\cos \theta$$

$$P = \frac{1}{2}(1)(1)\sin 4\theta + 4 \times \frac{1}{2}\cos \theta \quad 1M$$

$$= \frac{\sin 4\theta}{2} + 2\cos \theta \quad 1A$$

$$\frac{dP}{d\theta} = 2\cos 4\theta - 2\sin \theta$$

$$\text{當 } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{dP}{d\theta} = -2 \neq 0 \quad 1M$$

由此，當 S 達至極大值時， P 不會達至極大值。 1

$$13. \quad (a) \quad A = \frac{(PQ)(a)}{2} + \frac{(QR)(a)}{2} + \frac{(RP)(a)}{2} \quad 1M$$

$$= \frac{a}{2}(2s)$$

$$a = \frac{A}{s} \quad 1$$

$$(b) \quad (i) \quad EF = 2 \sin \theta$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}(1)(1) \sin 2\theta}{\frac{1}{2}(1 + 1 + 2 \sin \theta)} \quad 1M$$

$$= \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta(1 + \sin \theta) - \cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$= \cos \theta - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \quad 1$$

$$(ii) \quad \frac{dr}{d\theta} = -\sin \theta - \frac{-\sin \theta(1 + \sin \theta) - \cos \theta(\cos \theta)}{(1 + \sin \theta)^2} \quad 1M$$

$$= -\sin \theta - \frac{-\sin \theta - 1}{(1 + \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \sin \theta} - \sin \theta \quad 1A$$

$$\text{當 } \frac{dr}{d\theta} = 0,$$

$$\frac{1}{1 + \sin \theta} - \sin \theta = 0$$

$$\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0 \quad 1A$$

$$\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{或} \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (rej.)}$$

$$\theta \approx 0.666 \text{ rad}$$

$$\text{對 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{-\cos \theta}{(1 + \sin \theta)^2} - \cos \theta < 0 \quad 1M$$

$$\text{所求之值為 } 0.666 \text{ rad}。 \quad 1A$$

$$(iii) \quad \text{當 } \theta = \frac{\pi}{12}, \text{ 周界達至最小值。} \quad 1A$$

$$\text{根據 (b)(ii), 當 } \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12} \text{ 時, } r \text{ 只有一個極大值。}$$

$$\text{因此當 } \theta = \frac{\pi}{12} \text{ 或 } \frac{5\pi}{12} \text{ 時, } r \text{ 達至最小值。} \quad 1M$$

$$\text{當 } \theta = \frac{\pi}{12}, r \approx 0.199; \text{ 當 } \theta = \frac{5\pi}{12}, r \approx 0.127。$$

$$\text{因此當 } \theta = \frac{5\pi}{12} \text{ 時, } r \text{ 以及圓的面積達至最小值。}$$

$$\text{不同意該宣稱。} \quad 1A$$

14. (a) (i) $PB = PC = \sqrt{x^2 + 4}$ 及 $PA = 3 - x$
 $r = PA + PB + PC = 2\sqrt{x^2 + 4} + (3 - x)$ 1A

$$\frac{dr}{dx} = 2 \times \frac{1}{2} (x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} (2x) - 1$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 1$$
 1

(ii) (1) 當 $\frac{dr}{dx} = 0$,

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 1$$
 1M

$$4x^2 = x^2 + 4$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{或} \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad (\text{捨去})$$

x	$0 < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} < x < 3$
$\frac{dr}{dx}$	-	+

當 $\frac{2}{\sqrt{3}} \leq x < 3$ 時, r 為遞增. (接受 $x \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$) 1A

(2) 當 $0 \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ 時, r 為遞減。 1A

故此, r 在 $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 時達至最小值。 1M

$$r \text{ 的最小值} = 2\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4} + 3 - \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 3$$
 1A

(iii) r 在 $x = 0$ 或 $x = 3$ 達至最大值。

當 $x = 0$, $r = \sqrt{4} + 3 = 7$; 當 $x = 3$, $r = \sqrt{3^2 + 4} + 3 - 3 = 2\sqrt{13}$ 1M

r 的最大值為 $2\sqrt{13}$ 。 1A

(b) $r = 2\sqrt{x^2 + 4} + 1 - x$ 。故此, $\frac{dr}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 1$ 。 1A

根據 (a), 當 $0 \leq x \leq 1$ 時, r 為遞減。故此, r 在 $x = 1$ 時達至最小值。 1M

r 的最小值 $= 2\sqrt{1 + 4} + 1 - 1 = 2\sqrt{5}$ 1A

15. (a) (i) $f'(x) = -(x^2 + 9) + (14 - x)(2x)$

$$= -3x^2 + 28x - 9$$

1A

$$f''(x) = -6x + 28$$

當 $f'(x) = 0$ 時, $x = \frac{1}{3}$ 或 9 。

1M

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 26 > 0 \text{ 及 } f''(9) = -26 < 0$$

1M

因此, 極小點為 $\left(\frac{1}{3}, \frac{3362}{27}\right)$ 且極大點為 $(9, 450)$ 。

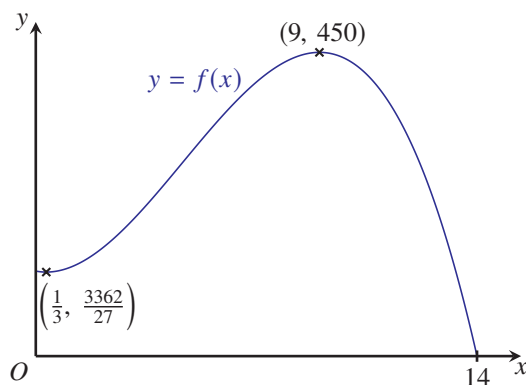
1A

(ii) (正確形狀)

1M

(全部正確)

1A



(b) (i) 由於 $\triangle APQ \sim \triangle BQR$,

$$\frac{x}{3} = \frac{BR}{14 - x}$$

$$BR = \frac{x(14 - x)}{3}$$

1A

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 3^2} \times \sqrt{(14 - x)^2 + \left[\frac{x(14 - x)}{3}\right]^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 9}(14 - x)\sqrt{1 + \frac{x^2}{9}}$$

$$= \frac{(14 - x)(x^2 + 9)}{3}$$

1M

1

(ii) 設 T 為 BC 上的一點使得 $ST \perp BC$ 。

由於 S 在該紙板內, $BR + RT \leq BC$,

$$\frac{x(14 - x)}{3} + 3 \leq 11$$

1M

$$x^2 - 14x + 24 \geq 0$$

$$x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 12$$

由於 $0 \leq x \leq 14$, 可得 $0 \leq x \leq 2$ 或 $12 \leq x \leq 14$ 。

1

(iii) 從 (a)(ii), 曲線 $y = f(x)$ 在上述範圍沒有極大點。

故此, $f(x)$ 的最大值在其中一個邊界發生。

1M

由於 $f(0) = 126$ 、 $f(2) = 156$ 、 $f(12) = 306$ 及 $f(14) = 0$,

$g(x)$ 的最大值為 $\frac{f(12)}{3} = 102$ 。

1A

16. (a) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 5^2$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 25$$

1A

(b) 根據 (a)，兩邊對 t 求導，

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

1M+1A

當 H 距地面 3 m， $y = 3$ 及 $x = 8$ 。

$$\frac{8}{2} \cdot \frac{dx}{dt} + 2(3)(-2) = 0$$

1M

$$\frac{dx}{dt} = 3$$

所求之率為 3 m/s。

1A

17. (a) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi}{3}rh \frac{dr}{dt} + \frac{\pi}{3}r^2 \frac{dh}{dt}$$

1M

故此，

$$0 = \frac{2\pi}{3}rh \frac{dr}{dt} + \frac{\pi}{3}r^2(-2)$$

1A

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r}{h}$$

1

(b) (i) $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ 。故此， $S^2 = \pi^2(r^4 + r^2 h^2)$

1A

$$\frac{d}{dt}(S^2) = \pi^2 \left(4r^3 \frac{dr}{dt} + 2r h^2 \frac{dr}{dt} + 2r^2 h \frac{dh}{dt} \right)$$

1A

$$= \pi^2 \left(4r^3 \cdot \frac{r}{h} + 2r h^2 \cdot \frac{r}{h} + 2r^2 h(-2) \right)$$

1M

$$= \frac{2\pi^2 r^2}{h} (2r^2 - h^2)$$

1

(ii) 當 $t = 0$ ， $h = 1.2r$ ，

$$\left. \frac{dS^2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{2\pi^2 r^2}{1.2r} (2r^2 - 1.2^2 r^2) = \frac{14\pi^2}{15} r^3 > 0$$

1M

由於 $\frac{dh}{dt} < 0$ 及 $\frac{dr}{dt} > 0$ ， $(2r^2 - h^2)$ 為遞增。

故此，對 $t \geq 0$ ， $\frac{d}{dt}(S^2)$ 為遞增。

1M

因此，對所有 $t \geq 0$ ， $\frac{dS^2}{dt} > 0$ 。

故此，對所有 $t \geq 0$ ， $\frac{d}{dt}(S) = \frac{1}{2S} \times \frac{dS^2}{dt} > 0$ 。

同意該宣稱。

1A