

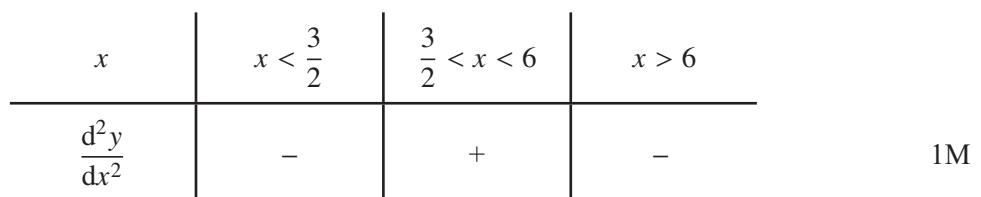
1. (a)  $\frac{dy}{dx} = (7 - 4x)e^{-x} + (7x - 2x^2)(-e^{-x})$  1M

$$= e^{-x}(2x^2 - 11x + 7)$$
 1A

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= -e^{-x}(7 - 11x + 2x^2) + e^{-x}(-11 + 4x) \\ &= e^{-x}(-2x^2 + 15x - 18)\end{aligned}$$
 1A

(b) 當  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$  時，  
 $-2x^2 + 15x - 18 = 0$  1M

$$x = \frac{3}{2} \text{ 或 } 6$$



1M

該圖像在  $x = \frac{3}{2}$  及  $x = 6$  時有兩拐點。

同意該宣稱。 1A

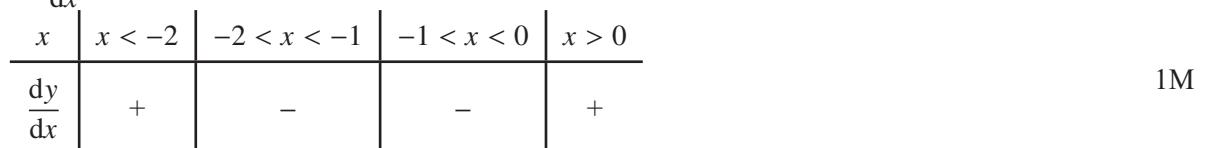
2. 垂直漸近線為  $x = -1$ 。 1A

$$y = x + \frac{1}{x+1}$$
 1M

斜漸近線為  $y = x$ 。 1A

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$
 1A

當  $\frac{dy}{dx} = 0$ ， $x = 0$  或  $-2$ 。



1M

因此， $(0, 1)$  為極小點。 1A

3. (a) 垂直漸近線為  $x = 1$ 。

1A

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x - 1}$$

1M

斜漸近線為  $y = 2x + 3$ 。

1A

$$(b) f'(x) = 2 - \frac{4}{(x - 1)^2}$$

1M

$$f'(2) = 2 - \frac{4}{(2 - 1)^2}$$

1M

$$= -2$$

所求斜率為  $-2$ 。

1A

4. (a)  $f'(x) = -A(x^2 - 4x + 7)^{-2}(2x - 4)$

$$= \frac{-2A(x - 2)}{(x^2 - 4x + 7)^2}$$

1M

$$f''(x) = -2A(x^2 - 4x + 7)^{-2} - 2A(x - 2)(-2)(x^2 - 4x + 7)^{-3}(2x - 4)$$

$$= \frac{6A(x - 1)(x - 3)}{(x^2 - 4x + 7)^3}$$

1M

當  $f'(x) = 0$ ,  $x = 2$ 。

$f''(2) = -\frac{2A}{9} \neq 0$ 。因此,  $f(x)$  在  $x = 2$  達至極值。

$$f(2) = \frac{A}{2^2 - 4(2) + 7} = 4$$

$$A = 12$$

因此,  $f'(x) = \frac{-24(x - 2)}{(x^2 - 4x + 7)^2}$ 。

1A

(b) 由於  $(-4)^2 - 4(1)(7) = -12 < 0$ , 方程  $x^2 - 4x + 7 = 0$  沒有實根。

故此, 該圖像沒有垂直漸近線。

$$f(x) = \frac{12}{x^2 - 4x + 7}$$

水平漸近線為  $y = 0$  且沒有斜漸近線。

1M

不同意該宣稱。

1A

$$(c) f''(x) = \frac{72(x - 1)(x - 3)}{(x^2 - 4x + 7)^3}$$

1M

當  $f''(x) = 0$ ,  $x = 1$  或  $3$ 。

$x$	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	+	-	+

1M

拐點為  $(1, 3)$  及  $(3, 3)$ 。

1A

5. (a) 垂直漸近線為  $x = 1$ 。 1A

$$r(x) = x + 1 + \frac{2-x}{(x-1)^2} \quad 1M$$

斜漸近線為  $y = x + 1$ 。 1A

$$(b) \frac{d}{dx}r(x) = 1 + \frac{-(x-1)^2 - 2(x-1)(2-x)}{(x-1)^4} \quad 1M$$
$$= 1 + \frac{x-3}{(x-1)^3} \quad 1A$$

$$(c) r''(x) = \frac{-2(x-4)}{(x-1)^4} \quad 1M$$

當  $r''(x) = 0$  時， $x = 4$ 。

$x$	$1 < x < 4$	$x > 4$
$r''(x)$	+	-

$y = r(x)$  的圖像只在  $x = 4$  時有一個拐點。

同意該宣稱。 1A

6. (a)  $f(0) = 1$ 、 $f(1) = 0$  及  $f(-1) = 0$ 。

極大點為  $(0, 1)$ 。 1A

拐點為  $(1, 0)$  及  $(-1, 0)$ 。 1A

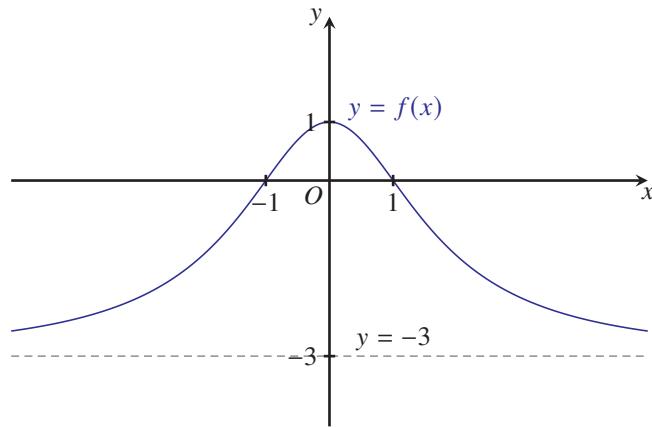
(b) 由於  $x^2 + 3 > 0$ ，沒有垂直漸近線。

$$f(x) = -3 + \frac{12}{x^2 + 3} \quad 1M$$

水平漸近線為  $y = -3$ 。 1A

(c) (給  $y = f(x)$  的形狀) 1A

(給所有資料皆正確) 1A



7. ( $x$  截距及極小點極大點)

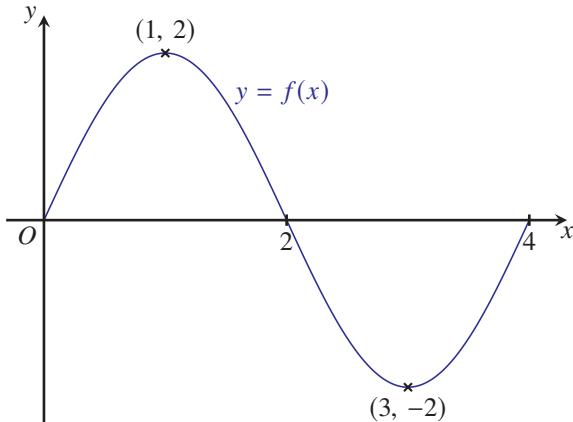
1A+1A

(斜率)

1A

(全部正確)

1A



8. (a)  $\frac{dy}{dx} = (x - 6)^2 + 2x(x - 6)$

1M

$$= 3(x - 2)(x - 6)$$

1M

當  $\frac{dy}{dx} = 0$ ， $x = 2$  或  $6$ 。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 24$$

1M

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=2} = -12 < 0 \text{ 及 } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=6} = 12 > 0$$

當  $x = 2$ ， $y = 32$ ；當  $x = 6$ ， $y = 0$ 。

極大點為  $(2, 32)$ ，極小點為  $(6, 0)$ 。

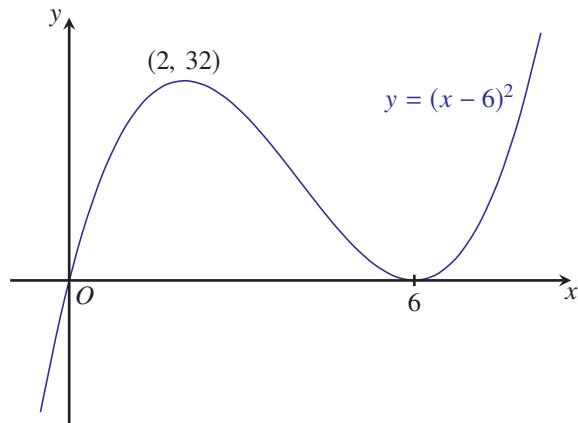
1A+1A

(b) (正確形狀)

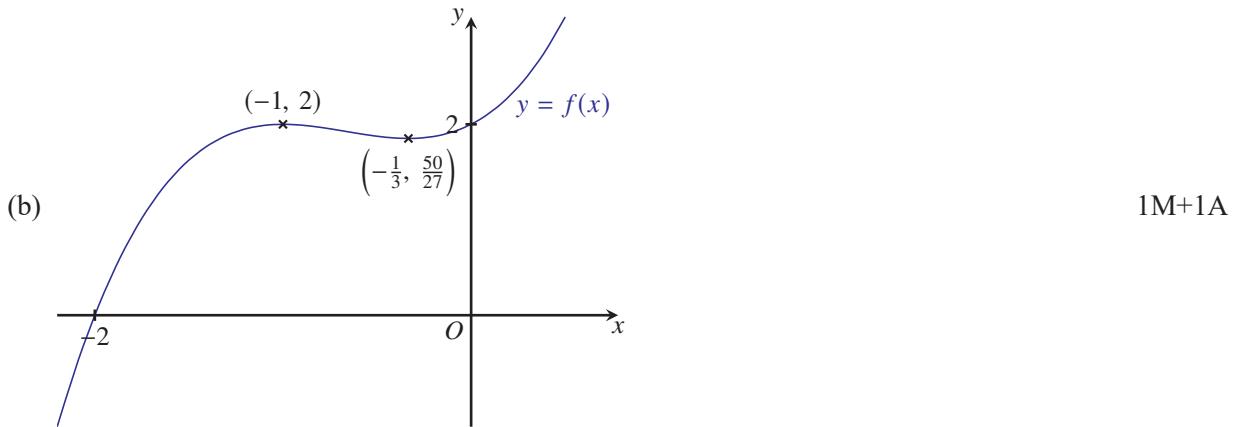
1A

(全部正確)

1A



9. (a)  $f'(x) = (x^2 + 1) + (x + 2)(2x)$   
 $= (3x + 1)(x + 1)$  1M  
 當  $f'(x) = 0$ ,  $x = -1$  或  $-\frac{1}{3}$ 。  
 $f''(x) = 6x + 4$   
 $f''(-1) = -2 < 0$  及  $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 > 0$  1M  
 當  $x = -1$ ,  $y = 2$ ; 當  $x = -\frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{50}{27}$ 。  
 因此,  $(-1, 2)$  為極大點,  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{50}{27}\right)$  為極小點。 1A



10. (a)  $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$  1A  
 $f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$  1A

(b) 當  $f'(x) = 0$ ,  $x = 1$  或  $-5$ 。

$x$	$x < -5$	$-5 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	+	+

當  $f''(x) = 0$ ,  $x = 1$ 。

$x$	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	-	+

- (i)  $x < -5$  或  $-1 < x < 1$  或  $x > 1$  1A  
 (ii)  $-5 < x < -1$  1A  
 (iii)  $x > 1$

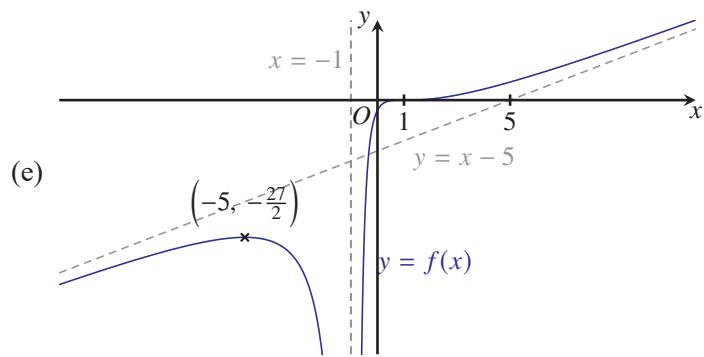
(iv)  $x < -1$  或  $-1 < x < 1$  1A

(c)  $\left(-5, -\frac{27}{2}\right)$  為相對極大點。 1A  
 拐點為  $(1, 0)$ 。 1A

(d) 垂直漸近線為  $x = -1$ 。 1A

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = x-5 + \frac{12x+4}{(x+1)^2}$$

斜漸近線為  $y = x - 5$ 。 1A



1A+1A

$$11. \text{ (a)} \quad f'(x) = \frac{(1+x^2)^2 - 2x(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} \quad 1\text{A}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^3(-6x) - (1-3x^2) \cdot 3(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6} = \frac{-12x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \quad 1\text{A}$$

(b) (i) 當  $f'(x) = 0$ ,  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

$x$	$x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{3}}$
$f'(x)$	-	+	-

所求之值為  $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。 1A

(ii) 當  $f''(x) = 0$ ,  $x = 0$  或  $\pm 1$ 。

$x$	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	+	-	+

所求之值為  $-1 < x < 0$  或  $x > 1$ 。1A

(c) 極小點 :  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$  1A

極大點 :  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$  1A

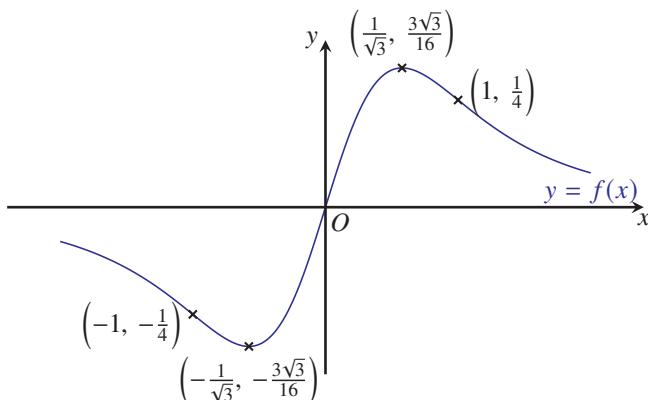
拐點 :  $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$ 、 $(0, 0)$  及  $\left(1, \frac{1}{4}\right)$  1A

該曲線沒有垂直漸近線，水平漸近線為  $y = 0$ 。1A

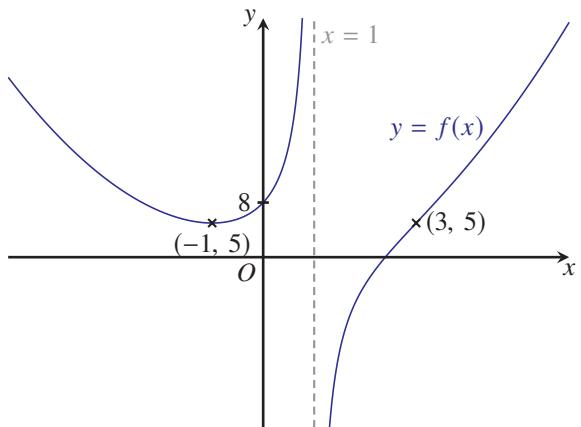
(d) (極值點及拐點) 1A

(水平漸近線) 1A

(曲線的形狀) 1A



12. (a)  $f'(x) = 2x + \frac{8}{(x-1)^2}$  1A  
 $f''(x) = 2 + \frac{16}{(1-x)^3}$  1A
- (b) 當  $f'(x) = 0$  ,
- $$2x + \frac{8}{(x-1)^2} = 0$$
- $$\frac{2x(x-1)^2 + 8}{(x-1)^2} = 0$$
- $$\frac{2(x+1)(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^2} = 0$$
- $$x = -1$$
- |         |          |              |         |
|---------|----------|--------------|---------|
| $x$     | $x < -1$ | $-1 < x < 1$ | $x > 1$ |
| $f'(x)$ | -        | +            | +       |
- (i)  $-1 < x < 1$  或  $x > 1$  1A
- (ii)  $x < -1$  1A
- 當  $f''(x) = 0$  ,
- $$\frac{2(1-x)^3 + 16}{(1-x)^3} = 0$$
- $$\frac{-2(x-3)(x^2 + 3)}{(1-x)^3} = 0$$
- $$x = 3$$
- |          |         |             |         |
|----------|---------|-------------|---------|
| $x$      | $x < 1$ | $1 < x < 3$ | $x > 3$ |
| $f''(x)$ | +       | -           | +       |
- (iii)  $x < 1$  或  $x > 3$  1A
- (iv)  $1 < x < 3$  1A
- (c) 極小點為  $(-1, 5)$  。 1A  
 拐點為  $(3, 5)$  。 1A
- (d) 垂直漸近線為  $x = 1$  。 1A  
 沒有斜漸近線。 (可省略)
- (e) (極值點、拐點及漸近線)  
 (曲線的形狀) 1A



13. (a)  $f'(x) = \frac{x(x+12)}{(x+6)^2}$

1A

$$f''(x) = \frac{72}{(x+6)^3}$$

1A

(b) 當  $f'(x) = 0$ ,  $x = 0$  或  $-12$ 。

$x$	$x < -12$	$-12 < x < -6$	$-6 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f''(x)$	-	-	+	+

(i)  $x < -12$  或  $x > 0$

1A

(ii)  $-12 < x < -6$  或  $-6 < x < 0$

1A

(iii)  $x > -6$

1A

(iv)  $x < -6$

1A

(c) 極大點為  $(-12, -25)$ 。

1A

極小點為  $(0, -1)$ 。

1A

(d) 垂直漸近線為  $x = -6$ 。

1A

$$f(x) = x - 7 + \frac{36}{x+6}$$

1M

斜漸近線為  $y = x - 7$ 。

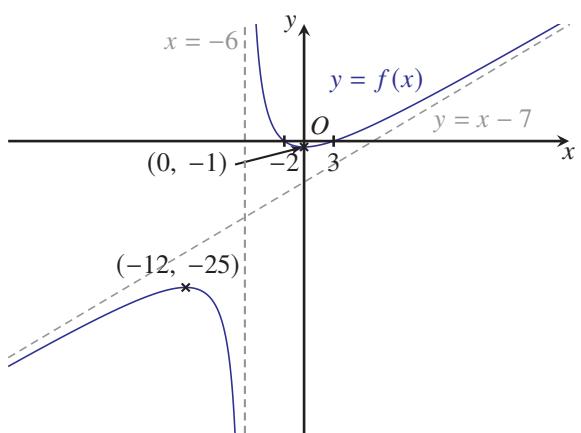
1A

(e) (相對極值點及漸近線)

1A

(全部正確)

1A



14. (a)  $f'(x) = \frac{(x-6)^2[(x+1)^2 + 2(x+1)(x+15)] - 2(x-6)(x+15)(x+1)^2}{(x-6)^4}$  1M  
 $= \frac{(x+1)(x+8)(x-27)}{(x-6)^3}$  1A  
 $f''(x) = \frac{686(x+3)}{(x-6)^4}$  1A

(b) 當  $f'(x) = 0$ ,  $x = -8$  或  $-1$  或  $27$ 。

當  $f''(x) = 0$ ,  $x = -3$

$x$	$x < -8$	$-8 < x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < 6$	$6 < x < 27$	$x > 27$
$f'(x)$	+	-	-	+	-	+
$f''(x)$	-	-	+	+	+	+

(i)  $x < -8$  或  $-1 < x < 6$  或  $x > 27$

(ii)  $-3 < x < 6$  或  $x > 6$

(c) 極小點為  $(-1, 0)$  及  $\left(27, \frac{224}{3}\right)$ . 1A+1A

極大點為  $\left(-8, \frac{7}{4}\right)$ .

拐點為  $\left(-3, \frac{16}{27}\right)$ .

(d) 垂直漸近線為  $x = 6$ .

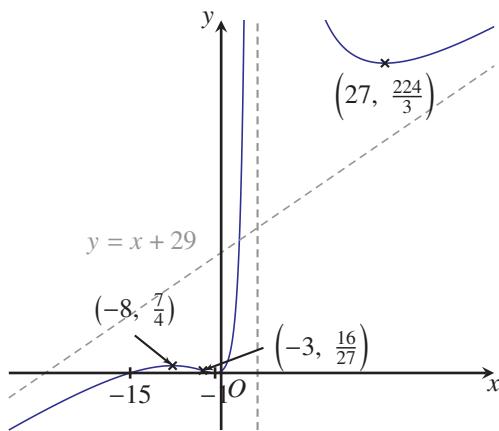
$$f(x) = x + 29 + \frac{343x - 1029}{(x-6)^2}$$

斜漸近線為  $y = x + 29$ .

(e) (極值點及拐點)

(漸近線)

(全部正確)



15. (a)  $f'(x) = \frac{-2(x-3)}{(x+3)^4}$

1A

$$f''(x) = \frac{6(x-5)}{(x+3)^5}$$

1A

(b) 當  $f(x) = 0$ ,  $x = 1$ 。當  $f'(x) = 0$ ,  $x = 3$ 。當  $f''(x) = 0$ ,  $x = 5$ 。

$x$	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 5$	$x > 5$
$f(x)$	+	-	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	-	-
$f''(x)$	+	-	-	-	+

(i)  $x < -3$  或  $x > 1$

1A

(ii)  $x < -3$  或  $-3 < x < 3$

1A

(iii)  $x < -3$  或  $x > 5$

1A

(c) 極大點為  $\left(3, \frac{1}{108}\right)$

1A

拐點為  $\left(5, \frac{1}{128}\right)$

1A

(d) 垂直漸近線為  $x = -3$ 。

1A

水平漸近線為  $y = 0$ 。

1A

(e) (極大點及拐點)

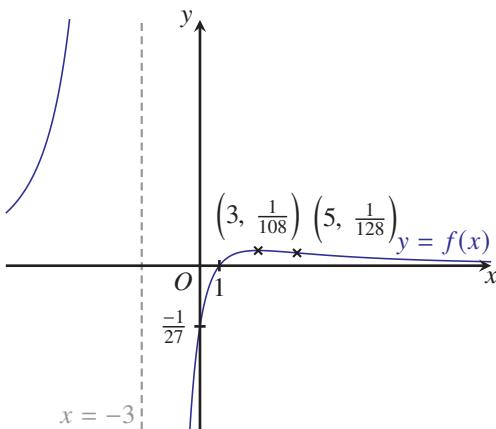
1M

(漸近線)

1A

(全部正確)

1A



(f)  $n(k) = \begin{cases} 1 & \text{當 } k \leq 0 \text{ 或 } k > \frac{1}{108} \\ 2 & \text{當 } k = \frac{1}{108} \\ 3 & \text{當 } 0 < k < \frac{1}{108} \end{cases}$

1M+2A