

1. (a) $\frac{dy}{dx} = (7 - 4x)e^{-x} + (7x - 2x^2)(-e^{-x})$ 1M

$= e^{-x}(2x^2 - 11x + 7)$ 1A

$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^{-x}(7 - 11x + 2x^2) + e^{-x}(-11 + 4x)$

$= e^{-x}(-2x^2 + 15x - 18)$ 1A

(b) 當 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 時，

$-2x^2 + 15x - 18 = 0$ 1M

$x = \frac{3}{2}$ 或 6

x	$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < 6$	$x > 6$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	-	+	-

1M

該圖像在 $x = \frac{3}{2}$ 及 $x = 6$ 時有兩拐點。

同意該宣稱。

1A

2. 垂直漸近線為 $x = -1$ 。

1A

$y = x + \frac{1}{x+1}$

1M

斜漸近線為 $y = x$ 。

1A

$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

1A

當 $\frac{dy}{dx} = 0$ ， $x = 0$ 或 -2 。

x	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$\frac{dy}{dx}$	+	-	-	+

1M

因此， $(0, 1)$ 為極小點。

1A

3. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。 1A

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x-1} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = 2x + 3$ 。 1A

(b) $f'(x) = 2 - \frac{4}{(x-1)^2}$ 1M

$$f'(2) = 2 - \frac{4}{(2-1)^2} \quad 1M$$

$$= -2$$

所求斜率為 -2 。 1A

4. (a) $f'(x) = -A(x^2 - 4x + 7)^{-2}(2x - 4)$

$$= \frac{-2A(x-2)}{(x^2 - 4x + 7)^2} \quad 1M$$

$$f''(x) = -2A(x^2 - 4x + 7)^{-2} - 2A(x-2)(-2)(x^2 - 4x + 7)^{-3}(2x - 4)$$

$$= \frac{6A(x-1)(x-3)}{(x^2 - 4x + 7)^3}$$

當 $f'(x) = 0$, $x = 2$ 。 1M

$f''(2) = -\frac{2A}{9} \neq 0$ 。因此 , $f(x)$ 在 $x = 2$ 達至極值 。

$$f(2) = \frac{A}{2^2 - 4(2) + 7} = 4$$

$$A = 12$$

因此 , $f'(x) = \frac{-24(x-2)}{(x^2 - 4x + 7)^2}$ 。 1A

(b) 由於 $(-4)^2 - 4(1)(7) = -12 < 0$, 方程 $x^2 - 4x + 7 = 0$ 沒有實根 。

故此 , 該圖像沒有垂直漸近線 。

$$f(x) = \frac{12}{x^2 - 4x + 7}$$

水平漸近線為 $y = 0$ 且沒有斜漸近線 。 1M

不同意該宣稱 。 1A

(c) $f''(x) = \frac{72(x-1)(x-3)}{(x^2 - 4x + 7)^3}$ 1M

當 $f''(x) = 0$, $x = 1$ 或 3 。

x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	+	-	+

1M

拐點為 $(1, 3)$ 及 $(3, 3)$ 。 1A

5. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。 1A

$$r(x) = x + 1 + \frac{2-x}{(x-1)^2} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = x + 1$ 。 1A

(b) $\frac{d}{dx}r(x) = 1 + \frac{-(x-1)^2 - 2(x-1)(2-x)}{(x-1)^4}$ 1M

$$= 1 + \frac{x-3}{(x-1)^3} \quad 1A$$

(c) $r''(x) = \frac{-2(x-4)}{(x-1)^4}$

當 $r''(x) = 0$ 時, $x = 4$ 。

x	$1 < x < 4$	$x > 4$
$r''(x)$	+	-

1M

$y = r(x)$ 的圖像只在 $x = 4$ 時有一個拐點。

同意該宣稱。 1A

6. (a) $f(0) = 1$ 、 $f(1) = 0$ 及 $f(-1) = 0$ 。

極大點為 $(0, 1)$ 。 1A

拐點為 $(1, 0)$ 及 $(-1, 0)$ 。 1A

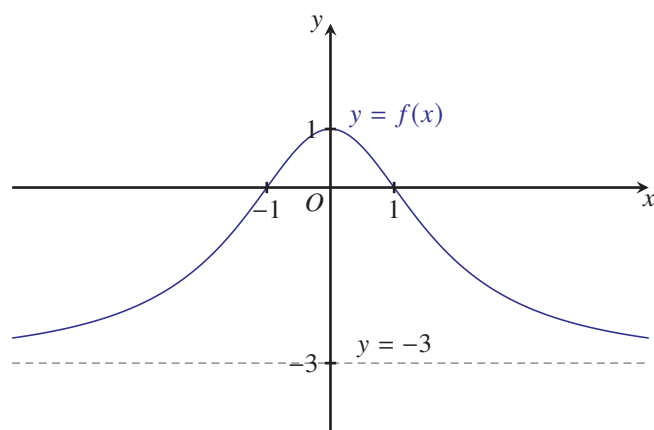
- (b) 由於 $x^2 + 3 > 0$, 沒有垂直漸近線。

$$f(x) = -3 + \frac{12}{x^2 + 3} \quad 1M$$

水平漸近線為 $y = -3$ 。 1A

- (c) (給 $y = f(x)$ 的形狀) 1A

(給所有資料皆正確) 1A



7. (x 截距及極小點極大點)

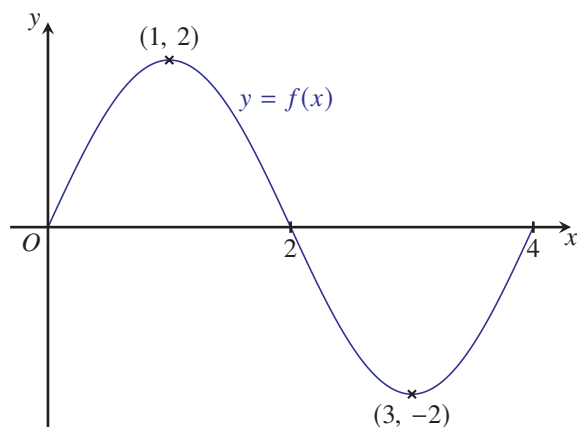
1A+1A

(斜率)

1A

(全部正確)

1A



8. (a) $\frac{dy}{dx} = (x-6)^2 + 2x(x-6)$

1M

$$= 3(x-2)(x-6)$$

當 $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = 2$ 或 6 。

1M

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 24$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=2} = -12 < 0 \text{ 及 } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=6} = 12 > 0$$

1M

當 $x = 2$, $y = 32$; 當 $x = 6$, $y = 0$ 。

極大點為 $(2, 32)$, 極小點為 $(6, 0)$ 。

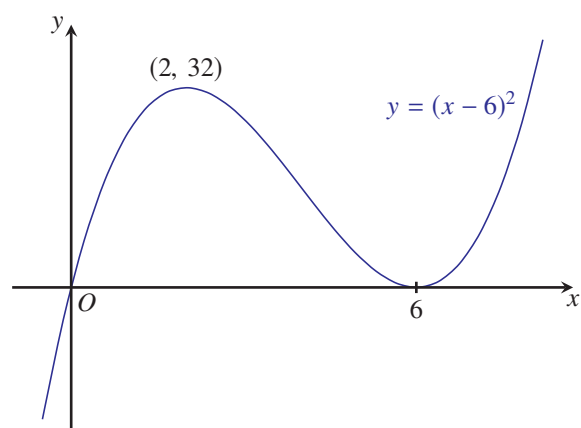
1A+1A

(b) (正確形狀)

1A

(全部正確)

1A



9. (a) $f'(x) = (x^2 + 1) + (x + 2)(2x)$

$$= (3x + 1)(x + 1)$$

1M

當 $f'(x) = 0$, $x = -1$ 或 $-\frac{1}{3}$ 。

1M

$$f''(x) = 6x + 4$$

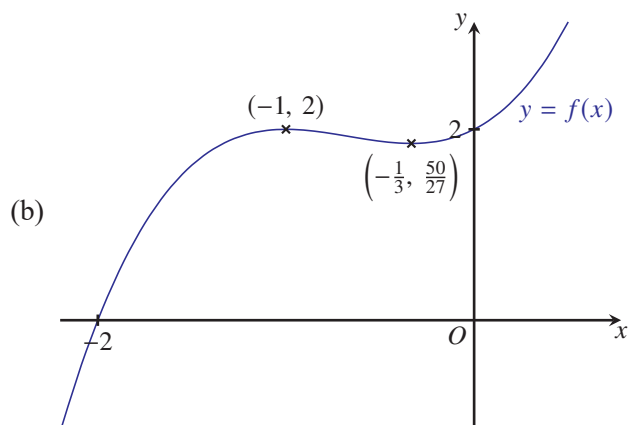
$$f''(-1) = -2 < 0 \text{ 及 } f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 > 0$$

1M

當 $x = -1$, $y = 2$; 當 $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{50}{27}$ 。

因此, $(-1, 2)$ 為極大點, $\left(-\frac{1}{3}, \frac{50}{27}\right)$ 為極小點。

1A



1M+1A

10. (a) $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$

1A

$$f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

1A

(b) 當 $f'(x) = 0$, $x = 1$ 或 -5 。

x	$x < -5$	$-5 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	+	+

當 $f''(x) = 0$, $x = 1$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	-	+

(i) $x < -5$ 或 $-1 < x < 1$ 或 $x > 1$

1A

(ii) $-5 < x < -1$

1A

(iii) $x > 1$

(iv) $x < -1$ 或 $-1 < x < 1$

1A

(c) $\left(-5, -\frac{27}{2}\right)$ 為相對極大點。

1A

拐點為 $(1, 0)$ 。

1A

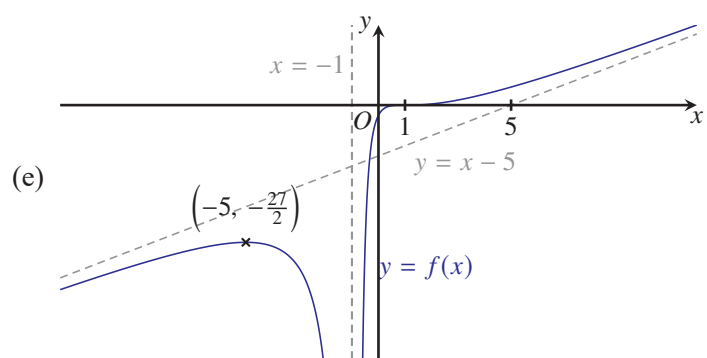
(d) 垂直漸近線為 $x = -1$ 。

1A

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = x - 5 + \frac{12x+4}{(x+1)^2}$$

斜漸近線為 $y = x - 5$ 。

1A



1A+1A

11. (a) $f'(x) = \frac{(1+x^2)^2 - 2x(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$ 1A

$f''(x) = \frac{(1+x^2)^3(-6x) - (1-3x^2) \cdot 3(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6} = \frac{-12x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$ 1A

(b) (i) 當 $f'(x) = 0$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

x	$x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{3}}$
$f'(x)$	-	+	-

所求之值為 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

1A

(ii) 當 $f''(x) = 0$, $x = 0$ 或 ± 1 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	+	-	+

所求之值為 $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$ 。

1M

1A

(c) 極小點： $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$

1A

極大點： $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$

1A

拐點： $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$ 、 $(0, 0)$ 及 $\left(1, \frac{1}{4}\right)$

1A

該曲線沒有垂直漸近線，水平漸近線為 $y = 0$ 。

1A

(d) (極值點及拐點)

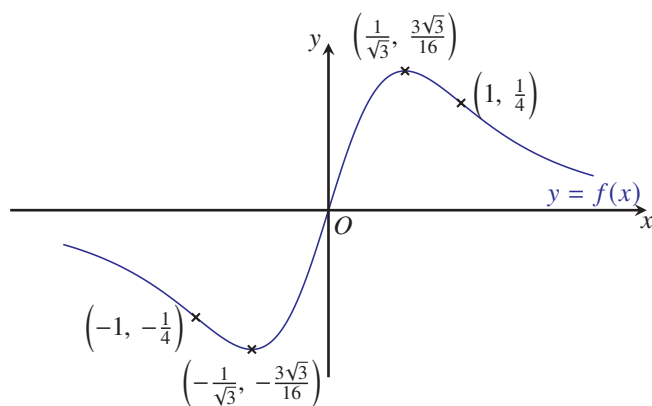
1A

(水平漸近線)

1A

(曲線的形狀)

1A



12. (a) $f'(x) = 2x + \frac{8}{(x-1)^2}$ 1A

$f''(x) = 2 + \frac{16}{(1-x)^3}$ 1A

(b) 當 $f'(x) = 0$,

$$2x + \frac{8}{(x-1)^2} = 0$$

$$\frac{2x(x-1)^2 + 8}{(x-1)^2} = 0$$

$$\frac{2(x+1)(x^2-3x+4)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x = -1$$

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	+	+

(i) $-1 < x < 1$ 或 $x > 1$

(ii) $x < -1$

1A

當 $f''(x) = 0$,

$$\frac{2(1-x)^3 + 16}{(1-x)^3} = 0$$

$$\frac{-2(x-3)(x^2+3)}{(1-x)^3} = 0$$

$$x = 3$$

x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	+	-	+

(iii) $x < 1$ 或 $x > 3$

1A

(iv) $1 < x < 3$

1A

(c) 極小點為 $(-1, 5)$ 。

1A

拐點為 $(3, 5)$ 。

1A

(d) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。

1A

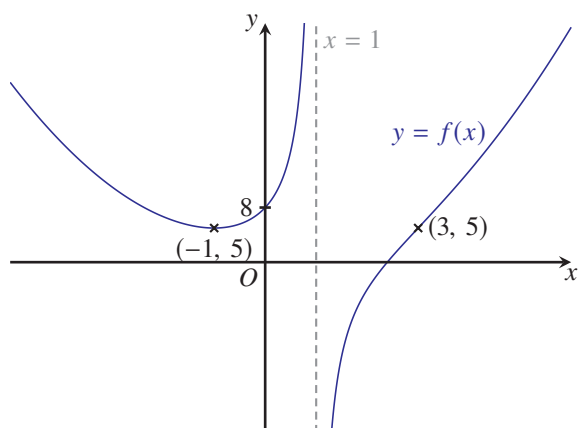
沒有斜漸近線。 (可省略)

(e) (極值點、拐點及漸近線)

1A

(曲線的形狀)

1A



13. (a) $f'(x) = \frac{x(x+12)}{(x+6)^2}$

1A

$$f''(x) = \frac{72}{(x+6)^3}$$

1A

(b) 當 $f'(x) = 0$, $x = 0$ 或 -12 。

x	$x < -12$	$-12 < x < -6$	$-6 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f''(x)$	-	-	+	+

(i) $x < -12$ 或 $x > 0$

1A

(ii) $-12 < x < -6$ 或 $-6 < x < 0$

1A

(iii) $x > -6$

(iv) $x < -6$

1A

(c) 極大點為 $(-12, -25)$ 。

1A

極小點為 $(0, -1)$ 。

1A

(d) 垂直漸近線為 $x = -6$ 。

1A

$$f(x) = x - 7 + \frac{36}{x+6}$$

1M

斜漸近線為 $y = x - 7$ 。

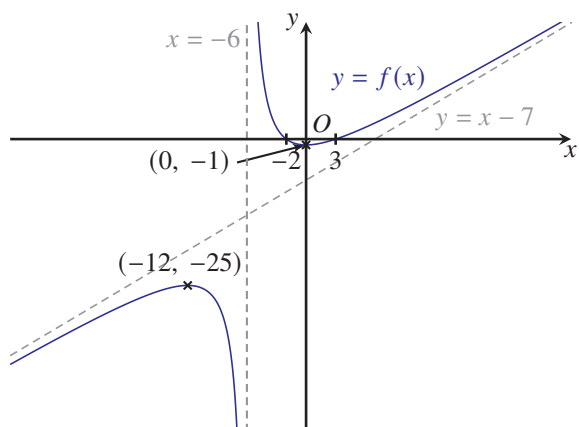
1A

(e) (相對極值點及漸近線)

1A

(全部正確)

1A



14. (a) $f'(x) = \frac{(x-6)^2[(x+1)^2 + 2(x+1)(x+15)] - 2(x-6)(x+15)(x+1)^2}{(x-6)^4}$ 1M

$= \frac{(x+1)(x+8)(x-27)}{(x-6)^3}$ 1A

$f''(x) = \frac{686(x+3)}{(x-6)^4}$ 1A

(b) 當 $f'(x) = 0$, $x = -8$ 或 -1 或 27 。

當 $f''(x) = 0$, $x = -3$

x	$x < -8$	$-8 < x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < 6$	$6 < x < 27$	$x > 27$
$f'(x)$	+	-	-	+	-	+
$f''(x)$	-	-	+	+	+	+

(i) $x < -8$ 或 $-1 < x < 6$ 或 $x > 27$ 1A

(ii) $-3 < x < 6$ 或 $x > 6$ 1A

(c) 極小點為 $(-1, 0)$ 及 $(27, \frac{224}{3})$ 。 1A+1A

極大點為 $(-8, \frac{7}{4})$ 。 1A

拐點為 $(-3, \frac{16}{27})$ 。 1A

(d) 垂直漸近線為 $x = 6$ 。 1A

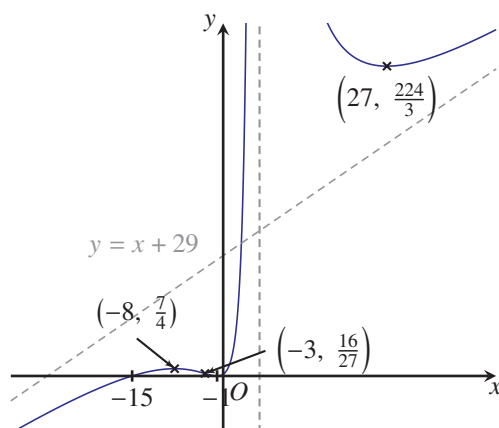
$f(x) = x + 29 + \frac{343x - 1029}{(x-6)^2}$ 1M

斜漸近線為 $y = x + 29$ 。 1A

(e) (極值點及拐點) 1A

(漸近線) 1A

(全部正確) 1A



15. (a) $f'(x) = \frac{-2(x-3)}{(x+3)^4}$ 1A
 $f''(x) = \frac{6(x-5)}{(x+3)^5}$ 1A

(b) 當 $f(x) = 0$, $x = 1$ 。當 $f'(x) = 0$, $x = 3$ 。當 $f''(x) = 0$, $x = 5$ 。

x	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 5$	$x > 5$
$f(x)$	+	-	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	-	-
$f''(x)$	+	-	-	-	+

(i) $x < -3$ 或 $x > 1$ 1A

(ii) $x < -3$ 或 $-3 < x < 3$ 1A

(iii) $x < -3$ 或 $x > 5$ 1A

(c) 極大點為 $\left(3, \frac{1}{108}\right)$ 1A

拐點為 $\left(5, \frac{1}{128}\right)$ 1A

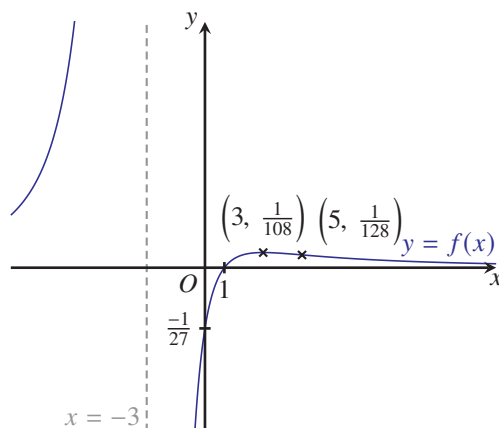
(d) 垂直漸近線為 $x = -3$ 。 1A

水平漸近線為 $y = 0$ 。 1A

(e) (極大點及拐點) 1M

(漸近線) 1A

(全部正確) 1A



(f)
$$n(k) = \begin{cases} 1 & \text{當 } k \leq 0 \text{ 或 } k > \frac{1}{108} \\ 2 & \text{當 } k = \frac{1}{108} \\ 3 & \text{當 } 0 < k < \frac{1}{108} \end{cases}$$
 1M+2A