1. $x\ln y + y = 2$

$\ln y + x \cdot \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$ 1M+1M

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\ln y}{x+y}$

當曲線與 y 軸相交時，$x = 0$ 及 $y = 2$。 1A

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,\ 2)} = -\frac{2\ln 2}{0+2} = -\ln 2$ 1M

該切線的方程為 $y = -x\ln 2 + 2$。 1A

2. (a) $\frac{dy}{dx} = (2x^2+1)^{\frac{1}{2}} + x\left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(4x)$ 1M

$= \frac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$ 1A

(b) 該直線的斜率 $= -\frac{3}{17}$

$\frac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{17}{3}$ 1M+1A

$9(16x^4+8x^2+1) = 289(2x^2+1)$

$144x^4 - 506x^2 - 280 = 0$ 1M

$x = 2$ 或 -2

當 $x = 2$，$y = 6$。C 在 $(2,\ 6)$ 的切線的方程為

$y - 6 = \frac{17}{3}(x-2)$ 1M

$17x - 3y - 16 = 0$

當 $x = -2$，$y = -6$。C 在 $(-2,\ -6)$ 的切線的方程為

$y + 6 = \frac{17}{3}(x+2)$

$17x - 3y + 16 = 0$ 1A

3. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(2x+8)^{\frac{1}{2}}(2) + 6x$ 1M

$= 3\sqrt{2x+8} + 6x$ 1A

(b) 切線斜率 $= -6$

$3\sqrt{2x+8} + 6x = -6$ 1M+1A

$\sqrt{2x+8} = -2 - 2x$

$2x + 8 = 4x^2 + 8x + 4$

$4x^2 + 6x - 4 = 0$ 1M

$x = -2$ 或 $\frac{1}{2}$（捨去） 1A

只有一條 C 的切線平行於直線 $6x + y + 4 = 0$。

因此，不同意該宣稱。 1A

4. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x-2}(1) - x \cdot \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}}{x-2}$ 1M

$= \frac{x-4}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}$ 1A

(b) 設切點為 $(x,\ y)$。

$\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{x-9}$ 1M+1A

$= \frac{x}{(x-9)\sqrt{x-2}}$

$(x-9)(x-4) = 2x(x-2)$

$0 = x^2 + 9x - 36$

$x = 3$ 或 -12（捨去） 1M

此切線的斜率 $= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = \frac{3-4}{2(3-2)^{\frac{3}{2}}}$ 1M

$= -\frac{1}{2}$ 1A

5. (a) $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[(x+h)^3 - 3(x+h)] - (x^3 - 3x)}{h}$ 1M

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3) - (3x + 3h) - (x^3 - 3x)}{h}$ 1M

$= \lim\limits_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 3)$

$= 3x^2 - 3$ 1A

(b) 當 C 為遞減，$\dfrac{dy}{dx} \le 0$。

$3x^2 - 3 \le 0$ 1M

$-1 \le x \le 1$ 1A

6. (a) $\ln f(x) = x \ln x - 6 \ln(2x + 13)$ 1A

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 6 \cdot \dfrac{2}{2x+13}$ 1M+1A

$f'(x) = \left(\ln x + 1 - \dfrac{12}{2x+13}\right) f(x)$

$= \left(\ln x + \dfrac{2x+1}{2x+13}\right) \dfrac{x^x}{(2x+13)^6}$ 1A

(b) 對 $x > 1$，可得 $\ln x > 0$，$\dfrac{2x+1}{2x+13} > 0$ 及 $\dfrac{x^x}{(2x+13)^6} > 0$。 1M

故此，$f'(x) > 0$ 且 $f(x)$ 為遞增函數。 1

7. (a) $f'(x) = 12x^2 + 2mx + n$

$$\begin{cases} -33 = 4(6)^3 + m(6)^2 + n(6) + 615 \\ 0 = 12(6)^2 + 2m(6) + n \end{cases}$$ 1M 1M

求解後，$m = -30$ 及 $n = -72$。 1A

(b) 當 $f'(x) = 0$，

$12x^2 - 60x - 72 = 0$

$x = 6$ 或 -1 1M

$f''(x) = 24x - 60$

$f''(6) = 24(6) - 60 = 84 > 0$ 1M

$f''(-1) = -84 < 0$

當 $x = -1$，$y = 653$。

因此，極小值為 -33，極大值為 653。 1A

8. $4xy + 2x^2\dfrac{dy}{dx} + 2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ 1M+1A

在點 (2, 0)，

$0 + 8\dfrac{dy}{dx} + 4 + 0 = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}$

所求斜率為 $-\dfrac{1}{2}$。 1A

9. $x^2 + xy + 2y^2 = 0$

$2x + x\dfrac{dy}{dx} + y + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ 1M+1A

在點 (2, 1)，

$4 + 2\dfrac{dy}{dx} + 1 + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{5}{4}$ 1A

切線的方程為

$y - 1 = -\dfrac{5}{4}(x - 2)$ 1M

$5x + 4y - 14 = 0$ 1A

10. $y^2 = x^2y + 2$

$2y\dfrac{dy}{dx} = 2xy + x^2\dfrac{dy}{dx}$ 1M

當 $x = 1$，

$y^2 = y + 2$

$y = 2$ 或 -1

在 (1, 2)，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{3}$ 且切線的方程為 1A

$y - 2 = \dfrac{4}{3}(x - 1)$

$4x - 3y + 2 = 0$ 1A

在 (1, −1)，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{3}$ 且切線的方程為

$y + 1 = \dfrac{2}{3}(x - 1)$

$2x - 3y - 5 = 0$ 1A

11. (a) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + 1$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$ 1A

在 P 的切線為 $y = 2$。 1A

(b) $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}} = -3$$ 1A

在 Q 的切線的方程為

$$y - \frac{5}{2} = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)$$ 1A

$$y = -3x + 4$$

當 $x = 0$，$y = 4$。

故此，C 在 Q 的切線通過 A。 1

12. (a) 代 $x = 0$，$y = \pm 1$。

該點為 $(0,\ 1)$ 及 $(0,\ -1)$。 1A

(b) $$(x - 2)(y^2 + 3) = -8$$

$$(y^2 + 3) + (x - 2) \cdot 2y\frac{dy}{dx} = 0$$ 1M

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 3}{2y(2 - x)}$$

在 $(0,\ 1)$，切線的斜率 $= \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2(2 - 0)} = 1$ 1A

在 $(0,\ -1)$，切線的斜率 $= \dfrac{dy}{dx} = -1$ 1A

13. (a) $$x^2 - 2xy^2 + y^3 + 1 = 0$$

$$2x - 2y^2 - 4xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$ 1A

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x - 2y^2}{4xy - 3y^2}$$ 1A

(b) 在 $(2,\ -1)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2(2) - 2(-1)^2}{4(2)(-1) - 3(-1)^2} = -\frac{2}{11}$ 。 1A

切線的方程為

$$y + 1 = -\frac{2}{11}(x - 2)$$ 1M

$$2x + 11y + 7 = 0$$ 1A

14. (a) $$x^2 + y\cos x - y^2 = 0$$

$$2x + \cos x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\sin x - 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$ 1A

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y\sin x - 2x}{\cos x - 2y}$$ 1A

(b) 在 P，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \pi}{\cos\frac{\pi}{2} - (-\pi)} = -\frac{3}{2}$ 1A

切線的方程為

$$y + \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$ 1M

$$6x + 4y - \pi = 0$$ 1A

15. (a) $(x+2)(y+3)=5$

$(x+2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(y+3)=0$ 1M+1A

在 $P\,(-1,\ 2)$，

$(-1+2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5=0$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-5$ 1A

(b) 切線的方程為

$y-2=-5(x+1)$ 1M

$5x+y+3=0$ 1A

16. $x-(1+\sin y)^5=1$

$1-5(1+\sin y)^4\cos y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 1A+1A

在 $P\,(2,\ 0)$，

$1-5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{5}$ 1M

切線的方程為

$y-0=\dfrac{1}{5}(x-2)$ 1M

$x-5y-2=0$ 1A

17. $\dfrac{dy}{dx} = 3(x^2+2)^{-1} + 3x(-1)(x^2+2)^{-2}(2x) = \dfrac{6-3x^2}{(x^2+2)^2}$ 1M+1A

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(2,\ 1)} = \dfrac{6-3(2)^2}{(2^2+2)^2} = -\dfrac{1}{6}$ 1A

所求方程為

$$y - 1 = -\frac{1}{6}(x-2)$$ 1M

$$x + 6y - 8 = 0$$ 1A

18. (a) $$y^3 + x^3y = 10$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2y + x^3\frac{dy}{dx} = 0$$ 1A+1A

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y}{x^3+3y^2}$$ 1A

(b) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,\ 2)} = -\dfrac{3(1)^2(2)}{1^3+3(2)^2} = -\dfrac{6}{13}$ 1M

切線方程為

$$y - 2 = -\frac{6}{13}(x-1)$$

$$6x + 13y - 32 = 0$$ 1A

19. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 30$ 1A

當 $\dfrac{dy}{dx} = 0$，

$$\Delta = 18^2 - 4(3)(30) = -36 < 0$$ 1M

故此，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ 沒有實根，曲線的切線不能平行於 x 軸。 1M+1

20. $x^2 - y^2 = 3$

$2x - 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ 1M

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{y}$

當 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2$，$x = 2y$ 1A

代入至 $x^2 - y^2 = 3$，

$(2y)^2 - y^2 = 3$ 1M

$y = \pm 1$

當 $y = 1$，$x = 2$；當 $y = -1$，$x = -2$。

所求方程為

$y - 1 = 2(x - 2)$ 及 $y + 1 = 2(x + 1)$

$y = 2x - 3$ $y = 2x + 3$ 1A+1A

21. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$。

當 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3}{4}$，$x = \pm\dfrac{1}{2}$ 1M

當 $x = \dfrac{1}{2}$，$y = \dfrac{1}{8}$；當 $x = -\dfrac{1}{2}$，$y = -\dfrac{1}{8}$。

兩點的坐標為 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{8}\right)$。 1A

通過 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}\right)$ 的切線方程為

$y - \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{4}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

$3x - 4y - 1 = 0$ 1A

通過 $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{8}\right)$ 的切線方程為

$y + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{4}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

$3x - 4y + 1 = 0$ 1A

22. $2x+4y+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+10y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 1M

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-(x+2y)}{2x+5y}$ 1A

當 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{2}$，

$\dfrac{-(x+2y)}{2x+5y}=\dfrac{-1}{2}$ 1M

$2x+4y=2x+5y$

$y=0$ 1A

當 $y=0$，$x=\pm 1$。 1A

所求方程為 $y=\dfrac{-1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ 及 $y=\dfrac{-1}{2}x-\dfrac{1}{2}$。 1A+1A

23. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-6}{(x+1)^2}$ 1A

直線的斜率為 $-\dfrac{1}{6}$。當 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{6}$，

$\dfrac{-6}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{6}$ 1M

$(x+1)^2=36$

$x=5$ 或 -7

切點為 $(5,\ 1)$ 及 $(-7,\ -1)$。 1A

切線的方程為

$y-1=-\dfrac{1}{6}(x-5)$ 及 $y+1=-\dfrac{1}{6}(x+7)$ 1M

$x+6y-11=0$ $x+6y+13=0$ 1A

24. 當 $\dfrac{dy}{dx} = 4$，

$$4(x-1)^3 = 4 \qquad 1M$$
$$x = 2$$

當 $x = 2$，$y = 5$。 1A

切線的方程為

$$y - 5 = 4(x - 2) \qquad 1M$$
$$4x - y - 3 = 0 \qquad 1A$$

25. 設切點為 $(a,\ b)$。則 $b^2 = 4a$。

$$y^2 = 4x$$
$$2y\frac{dy}{dx} = 4 \qquad 1M$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

故此，

$$\frac{b-0}{a+1} = \frac{2}{b} \qquad 1M$$
$$b^2 = 2a + 2$$
$$4a = 2a + 2 \qquad 1M$$
$$a = 1$$

當 $a = 1$，$b = \pm 2$。

切線的方程為

$y - 2 = \dfrac{2}{2}(x - 1)$ 及 $y + 2 = \dfrac{2}{-2}(x - 1)$

$y = x + 1$ $\qquad$ $y = -x - 1$ 1A+1A

26. (a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_P = 3a^2$。 1M

故此，C 在 P 的切線的方程為 $y = 3a^2x + 2$。

由於 P 在切線上，代 $x = a$ 及 $y = b$，可得 $b = 3a^3 + 2$。 1

(b) 由於 $b = a^3$， 1A

$a^3 = 3a^3 + 2$ 1M

$a^3 = -1$

$a = -1$

當 $a = -1$，$b = -1$。 1A

27. 設 P 的坐標為 (a, b)。

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_P = 3a^2$ 1A

考慮 L 的斜率，

$3a^2 = \dfrac{-16 - b}{0 - a}$ 1M

$3a^3 = b + 16$

$3a^3 = a^3 + 16$ 1M

$a = 2$

當 $a = 2$，$b = 8$。

L 的方程為 $y = 12x - 16$。 1A

28. (a) 已知直線的斜率 $= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

故此，$f'(x) = -\frac{x}{2} + 2$。 1A

所求斜率 $= f'(1) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$。 1M+1A

(b) 只有一個轉向點，其 x 坐標 $= 4$。 1A

因 $f'(x)$ 由正值轉為負值，此為極大點。 1A

29. (a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x + 2\sin x$ 1A

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\sin x + 2\cos x$ 1A

(b) 當 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，

$\tan x = -\frac{1}{2}$

$x = \pi - \tan^{-1}\frac{1}{2}$ 或 $2\pi - \tan^{-1}\frac{1}{2}$ 1M

當 $x = \pi - \tan^{-1}\frac{1}{2}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\sqrt{5} < 0$。 1M

當 $x = 2\pi - \tan^{-1}\frac{1}{2}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{3}{\sqrt{5}} > 0$

y 在 $x = 2\pi - \tan^{-1}\frac{1}{2}$ 時達至極小值。

y 的極小值 $= -\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - 2\cos\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$ 1M+1A

30. (a) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + 2\cos 2x$ 1A

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -4\sin 2x$ 1A

(b) 當 $\dfrac{dy}{dx} = 0$，

$$1 + 2\cos 2x = 0 \quad \text{1M}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{2\pi}{3} \quad \text{或} \quad \frac{4\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{或} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \text{1A}$$

當 $x = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -2\sqrt{3} < 0$。故此，$y$ 在 $x = \dfrac{\pi}{3}$ 時達至極大值。 1A

y 的極大值 $= \dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 1A

當 $x = \dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{3} > 0$。故此，$y$ 在 $x = \dfrac{2\pi}{3}$ 時達至極小值。

y 的極小值 $= \dfrac{2\pi}{3} + \sin\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 1A

31. (a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 1A

α 及 β 為 $f'(x) = 0$ 的根。 1M

因此，$\alpha + \beta = -\dfrac{2a}{3}$ 及 $\alpha\beta = \dfrac{b}{3}$。 1A

(b) 由於 $f'(x) = 0$ 有兩實根，

$$\Delta = (2a)^2 - 4(3b) > 0 \quad \text{1M}$$

$$4a^2 - 12b > 0$$

$$a^2 > 3b \quad \text{1}$$

(c)
$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) - (\beta^3 + a\beta^2 + b\beta + c)}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{(\alpha^3 - \beta^3) + a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta}$$

$$= (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + a(\alpha + \beta) + b \quad \text{1M}$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + a(\alpha + \beta) + b$$

$$= \frac{4a^2}{9} - \frac{b}{3} - \frac{2a^2}{3} + b \quad \text{1M}$$

$$= \frac{2}{9}(3b - a^2) \quad \text{1}$$

(d) 由於 $a^2 > 3b$，可得 $\dfrac{2}{9}(3b - a^2) < 0$。故此，$\dfrac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} < 0$。 1M

故此，$f(\alpha) - f(\beta) < 0$ 若 $\alpha - \beta > 0$。

當 $\alpha > \beta$ 時，$f(\alpha) < f(\beta)$。 1A