

M2REG-AOD-2425-ASM-SET 4-MATH

建議題解

1. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。 1A

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^2 - 3x + 1}{x - 1} \\ &= 3x + \frac{1}{x - 1} \end{aligned} \quad 1M$$

斜漸近線為 $y = 3x$ 。 1A

(b) $f'(x) = 3 - \frac{1}{(x - 1)^2}$ 1A

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3 - \frac{1}{(2 - 1)^2} \\ &= 2 \end{aligned} \quad 1A$$

所求方程為

$$\begin{aligned} y - 7 &= 2(x - 2) \\ 2x - y + 3 &= 0 \end{aligned} \quad 1A$$

2. (a) $9 = 8a + 4b + 1$ 1M

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3ax^2 + 2bx \\ 0 &= 3a(4) + 2b(2) \end{aligned} \quad 1M$$

求解後，可得 $a = -2$ 及 $b = 6$ 。 1A

(b) $\frac{dy}{dx} = -6x^2 + 12x$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -12x + 12 \\ \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{(2, 9)} &= -12(2) + 12 = -12 < 0 \end{aligned} \quad 1M$$

因此，(2, 9) 為極大點。同意該宣稱。 1A

(c) 當 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ， $x = 1$ 。

x	$x < 1$	$x > 1$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	+	-

拐點為 (1, 5)。 1A

3. (a) 垂直漸近線為 $x = 4$ 。 1A

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 4}$$

$$= x + 6 + \frac{16}{x - 4}$$

1M

斜漸近線為 $y = x + 6$ 。 1A

(b) $f'(x) = \frac{(x-4)(2x+2) - (x^2+2x-8)}{(x-4)^2}$ 1M

$$= \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2}$$

1A

(c) 當 $f'(x) = 0$, $x = 0$ 或 8 。 1A

x	$x < 0$	$0 < x < 4$	$4 < x < 8$	$x > 8$
$f'(x)$	+	-	-	+

1M

極大點為 $(0, 2)$, 極小點為 $(8, 18)$ 。 1A+1A

(d) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x - 4} = 0$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = -4 \text{ 或 } 2$$

1A

$$\text{切線斜率} = \frac{(-4)^2 - 8(-4)}{(-4 - 4)^2}$$

$$= \frac{3}{4}$$

1A

所求方程為

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x + 4)$$

$$3x - 4y + 12 = 0$$

1A

4. (a) $5(1) + 9y - 11 = 0$ 1M

$$y = \frac{2}{3}$$

切點為 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ 。

$$\frac{2}{3} = \frac{1+a}{1+b}$$

$$a = \frac{2b-1}{3}$$
1M

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + bx) - (x+a)(2x+b)}{(x^2 + bx)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 2ax - ab}{(x^2 + bx)^2}$$
1M

$$\frac{-5}{9} = \frac{-1-2a-ab}{(1+b)^2}$$
1M

$$9 + 18a + 9ab = 5(b+1)^2$$

$$9 + 18\left(\frac{2b-1}{3}\right) + 9\left(\frac{2b-1}{3}\right)b = 5(b^2 + 2b + 1)$$

$$b^2 - b - 2 = 0$$

$$b = 2 \quad \text{或} \quad -1 \quad (\text{捨去})$$
1A

$$a = \frac{2(2) - 1}{3} = 1$$
1A

(b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2x)^2}$

$$-\frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2x)^2} = 0$$
1M

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(2) = -4 < 0$$

方程沒有實根。

該曲線沒有駐點。

1A

(c) x 截距 $= -1$; y 截距不存在。 1A

(d) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(2x+2)(x^2+2x)^2 - (x^2+2x+2)(2)(x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x)^4}$ 1M

$$= \frac{2(x+1)(x^2+2x+4)}{(x^2+2x)^3}$$

當 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$,

$$(x+1)(x^2+2x+4) = 0$$

$$x = -1 \quad \text{或} \quad x^2 + 2x + 4 = 0$$

對 $x^2 + 2x + 4 = 0$, $\Delta = 2^2 - 4(1)(4) = -12 < 0$ 。

該方程沒有實根。

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	+	-	+

1M

拐點為 $(-1, 0)$ 。

1A

(e) 垂直漸近線為 $x = 0$ 及 $x = -2$ 。

1A

$$y = \frac{x+1}{x^2+2x}$$

水平漸近線為 $y = 0$ 。

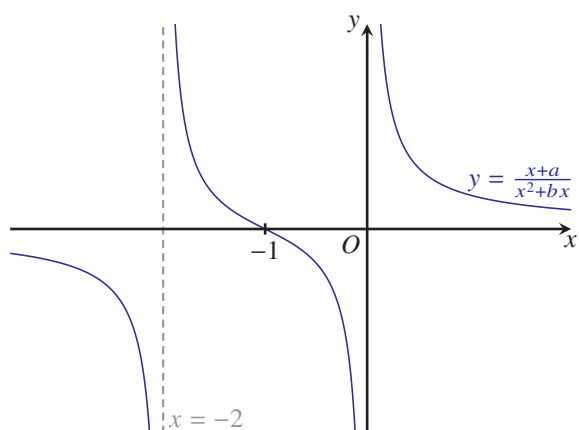
1A

(f) (正確形狀)

1A

(全部正確)

1A



5. (a) x 截距 $= -1$ 1A
 y 截距 $= -1$ 1A

(b) $\frac{dy}{dx} = 2(x+1)(x-1)^{-1} - (x+1)^2(x-1)^{-2}$ 1M

$$= \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

當 $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = 3$ 或 -1 。 1M

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$\frac{dy}{dx}$	+	-	-	+

1M

極大點為 $(-1, 0)$, 極小點為 $(3, 8)$ 。 1A

- (c) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。 1A

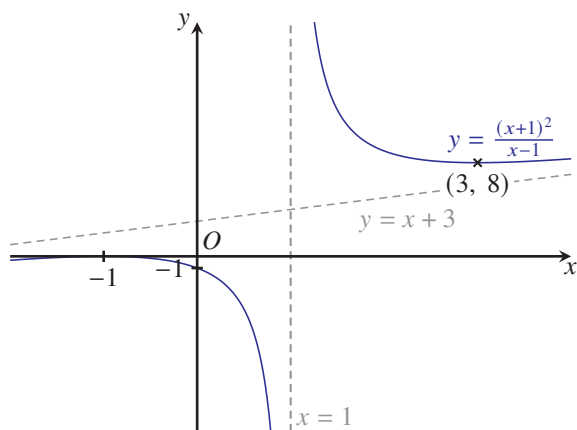
$$y = x + 3 + \frac{4}{x-1}$$

1M

斜漸近線為 $y = x + 3$ 。 1A

- (d) (正確形狀) 1A

(全部正確) 1A



6. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。

1A

$$f(x) = x + 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

1M

斜漸近線為 $y = x + 2$ 。

1A

(b) $f'(x) = 1 + \frac{3(x-1)^2 - (3x-2)(2)(x-1)}{(x-1)^4}$

1M

$$= 1 + \frac{-3x + 1}{(x-1)^3}$$

1A

$$1 + \frac{-3x + 1}{(x-1)^3} = 0$$

$$(x-1)^3 - 3x + 1 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{或} \quad 3$$

1A

(c)

x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	+	-	+

1M

極小點為 $\left(3, \frac{27}{4}\right)$ ，沒有極大點。

1A

(d) $f''(x) = \frac{-3(x-1)^3 - (-3x+1)(3)(x-1)^2}{(x-1)^3}$

$$= \frac{6x}{(x-1)^4}$$

1

- (e) 當 $f''(x) = 0$ ， $x = 0$ 。

x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	+	+

1M

拐點為 $(0, 0)$ 。

1A

- (f) (正確形狀)

1A

(全部正確)

1A

