REG-LOCUS-2425-ASM-SET 3-MATH
建議題解

結構式試題

1. (a) (i) L 的斜率 $= \dfrac{-2}{3}$。

ℓ 的方程為

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 14) \qquad \text{1M}$$

$$y = \frac{3x}{2} - 21 \qquad \text{1A}$$

(ii) 所求距離 $= \left(\dfrac{-2k}{3} + 5\right) - \left(\dfrac{3k}{2} - 21\right)$ 1M

$= \dfrac{-13k}{6} + 26$ 1A

(b) (i) AB 為 Γ 的半徑。 1A

(ii) $\dfrac{-13k}{6} + 26 = 39$ 1M

$k = -6$

A 的坐標為 $(-6,\ 9)$。

將 L 與 ℓ 的交點記為 E。

解 L 與 ℓ 的方程，E 的坐標為 $(12,\ -3)$。 1M

$AE = \sqrt{(12+6)^2 + (9+3)^2} = \sqrt{468}$

$\dfrac{r}{1} = \dfrac{\sqrt{468}}{39 - \sqrt{468}}$ 1M

$r \approx 1.25$ 1A

2. (a) (i) 設 $P(x,\ y)$。

$$\frac{y+1}{x-5} \times \frac{y-5}{x+3} = -1 \qquad \text{1M+1M}$$

$$(x+3)(x-5) + (y+1)(y-5) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \qquad \text{1A}$$

P 的軌跡的方程為 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$。

(ii) P 的軌跡是一個以 AB 為直徑的圓，但不包括 A 和 B 兩點。 1A

(b) C 的圓心在 $(9,\ 8)$。

圓心之距離 $= \sqrt{(9-1)^2 + (8-2)^2} = 10$ 1M

半徑之和 $= \sqrt{25} + 5 = 10 =$ 圓心之距離 1M

兩圓外切。

不同意該宣稱。 1A

3. (a) $(0,\ 7)$ 1A

(b) (i) 設 $P(x,\ y)$。

$$\sqrt{x^2+(y-7)^2}=\sqrt{(x-8)^2+(y-1)^2} \qquad \text{1M}$$

$$x^2+y^2-14y+49=x^2+y^2-16x-2y+65$$

$$4x-3y-4=0 \qquad \text{1A}$$

P 的軌跡的方程為 $4x-3y-4=0$。

(ii) 設 AE 的中點為 F。則 $F(4,\ 4)$。

$AF=\sqrt{4^2+3^2}=5$，C 的半徑 $=\sqrt{7^2-40}=3<5$ 1M

因此，F 在圓外，C 與 Γ 不相交。 1A

(c) 所求比例 $=AH:AE$

$=3:2\times 5$

$=3:10$ 1A

4. (a) PQ 的中點為 $(0,\ 2)$。

C 的方程為

$$x^2+(y-2)^2=(8)^2+(8-2)^2 \qquad \text{1M}$$

$$x^2+(y-2)^2=100 \qquad \text{1A}$$

(b) $GR=\sqrt{(4-0)^2+(5-2)^2}=5<10$ 1A

因此，R 在 C 內。 1

(c) $RU=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}$ 1M

$TR\perp UV$ 且 $\triangle TUV$ 為等腰三角形。

$TU=\sqrt{(\sqrt{75})^2+(10+5)^2}=\sqrt{300}$

$\triangle TUV$ 的周界 $=2\sqrt{300}+2\sqrt{75}$ 1M

$\approx 52.0>50$ 1A

同意該宣稱。 1A

5. (a) (i) $\sqrt{(x-7)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ 1M+1A

$$-12x+4y+56=0$$

$$3x-y-14=0 \qquad \text{1A}$$

Γ 的方程為 $3x-y-14=0$。

(ii) Γ 為 AB 的垂直平分線 AB。 1A

(b) (i) 3 1A

(ii) 當 $\triangle AQB$ 為銳角三角形時，

$\angle AQB=\dfrac{1}{2}\angle AMB=30^\circ$。 1M+1A

當 $\triangle AQB$ 為鈍角三角形時，

$\angle AQB=180^\circ-30^\circ=150^\circ$。 1A

6. (a) (i) L 的斜率 $= \dfrac{5-4}{5-2} = \dfrac{1}{3}$

L 的方程為

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x-5) \quad \text{1M}$$

$$x - 3y + 10 = 0 \quad \text{1A}$$

(ii) $0 - 3y + 10 = 0$

$$y = \frac{10}{3}$$

C 的坐標為 $\left(0,\ \dfrac{10}{3}\right)$。 1A

(b) (i) $\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}$ 1M

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20 = x^2 + y^2 - 10x - 10y + 50$$

$$3x + y - 15 = 0 \quad \text{1A}$$

所求方程為 $3x + y - 15 = 0$。

(ii) $3x - 0 - 15 = 0$

$$x = 5$$

D 的坐標為 $(5,\ 0)$。 1A

(c) 解 $\begin{cases} x - 3y - 10 = 0 \\ 3x + y - 15 = 0 \end{cases}$，可得 $(x,\ y) = \left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$。 1A

$OCED$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10}{3}\right)\left(\dfrac{7}{2}\right) + \dfrac{1}{2}(5)\left(\dfrac{9}{2}\right)$ 1M

$$= \frac{205}{12} < 20$$

同意該宣稱。 1A

7. (a) AD 為 BC 的垂直平分線。D 的坐標為 $(-8,\ -6)$。 1A

由於 D 為 BC 的中點，C 的坐標為 $(-8,\ -16)$。 1A

AC 的中點 $= (1,\ -11)$，AC 的斜率 $= \dfrac{-6+16}{10+8} = \dfrac{5}{9}$ 1A

所求方程為

$$y + 11 = -\frac{9}{5}(x-1) \quad \text{1M}$$

$$9x + 5y + 46 = 0 \quad \text{1A}$$

(b) 由於 AD 為 BC 的垂直平分線，外心的 y 坐標 $= -6$。 1M

代 $y = -6$ 至 $9x + 5y + 46 = 0$，可得 $x = -\dfrac{16}{9}$。

所求坐標為 $\left(-\dfrac{16}{9},\ -6\right)$。 1A

(c) 所求方程為

$$\left(x + \frac{16}{9}\right)^2 + (y+6)^2 = \left(10 + \frac{16}{9}\right)^2 + (-6+6)^2 \quad \text{1M}$$

$$\left(x + \frac{16}{9}\right)^2 + (y+6)^2 = \frac{11\,236}{81} \quad \text{1A}$$

(d) (i) P 的軌跡為拋物線（開口向上）。 1A

(ii) 設 P 的坐標為 $(x,\ y)$。

$$\sqrt{(x-10)^2+(y+6)^2}=\sqrt{(x+8)^2} \quad \text{1M}$$

$$y^2-36x+12y+72=0$$

所求方程為 $y^2-36x+12y+72=0$。 1A