

REG-EOC-2425-ASM-SET 8-MATH

建議題解

結構式試題

1. (a) (i) $CE = EB$ (已知)
 $OA = OB$ (半徑)
 $OE \parallel AC$ (中點定理)
 $\angle BOE = \angle OAD$ (同位角, $AC \parallel OE$)
 $\angle DOE + \angle BOE = 2\angle OAD$ (圓心角兩倍於圓周角)
 $\angle DOE + \angle BOE = 2\angle BOE$
 $\angle DOE = \angle BOE$

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

- (ii) $\angle DOE = \angle BOE$ (已證明)

$$OE = OE \quad (\text{公共邊})$$

$$OD = OB \quad (\text{半徑})$$

$$\triangle DOE \cong \triangle BOE \quad (SAS)$$

$$\angle OBE = 90^\circ \quad (\text{切線} \perp \text{半徑})$$

$$\angle ODE = \angle OBE \quad (\text{全等} \triangle \text{的對應角})$$

$$= 90^\circ$$

因此, DE 為該圓在 D 的切線 (切線 \perp 半徑的逆定理)。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) $\angle ODE + \angle OBE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ 1M

因此, O 、 B 、 E 、 D 共圓。

由於 $\angle OBE = 90^\circ$, OE 為圓 $OBED$ 的直徑。

O 的坐標為 $(0, 8)$ 。

1M

$$OE \text{ 的斜率} = \frac{8-0}{0+6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{所求切線的斜率} = -\frac{3}{4}$$

所求方程為

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x + 6)$$

1M

$$3x + 4y + 18 = 0$$

1A

2. (a) $\angle CAB = \angle BAD$ (公共角)

$\angle ABC = \angle ADB$ (交錯弓形的圓周角)

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$ (AA)

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$

1M

$$\frac{\sqrt{9^2 + 12^2}}{36 + 9} = \frac{36 + 9}{\sqrt{9^2 + 12^2} + CD}$$

$$CD = 120$$

Γ 的半徑為 60。

留意 $\angle EBA = 90^\circ$ 。

E 的坐標為 (60, 36)。

1M

所求方程為

$$(x - 60)^2 + (y - 36)^2 = 60^2$$

$$(x - 60)^2 + (y - 36)^2 = 3600$$

1A

(ii) E 為 CD 的中點。

D 的坐標為 (108, 72)。

1A

設 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 為 $\triangle BED$ 的外接圓的方程。

$$\begin{cases} 0^2 + 36^2 + 0 + 36e + f = 0 \\ 60^2 + 36^2 + 60d + 36e + f = 0 \\ 108^2 + 72^2 + 108d + 72e + f = 0 \end{cases}$$

1M

求解後，可得 $d = -60$ 、 $e = -252$ 及 $f = 7776$ 。

所求方程為 $x^2 + y^2 - 60x - 252y + 7776 = 0$ 。

1A

E 為 CD 的中點。

D 的坐標為 (108, 72)。

1A

留意該外接圓的圓心在 BE 的垂直平分線上，即 $x = 30$ 。

設 $\triangle BED$ 的外接圓的圓心的坐標為 (30, k)。

$$\sqrt{(30 - 0)^2 + (k - 36)^2} = \sqrt{(30 - 108)^2 + (k - 72)^2}$$

1M

$$k^2 - 72k + 2196 = k^2 - 144k + 11\,268$$

$$k = 126$$

所求方程為

$$(x - 30)^2 + (y - 126)^2 = (0 - 30)^2 + (36 - 126)^2$$

$$(x - 30)^2 + (y - 126)^2 = 9000$$

1A

(iii) $\triangle BED$ 的外接圓的面積

$$= (\sqrt{30^2 + 126^2 - 7776})^2 \pi$$

1M

$$\approx 28\,300$$

設 r 為 $\triangle BED$ 的內切圓的半徑。

考慮 $\triangle BED$ 的面積。

$$\frac{(36 + 9)(108)}{2} = \frac{(AB)(r)}{2} + \frac{(BD)(r)}{2} + \frac{(AD)(r)}{2}$$

1M

$$r \approx 16.5$$

($\triangle BED$ 的內切圓的面積) $\times 30$

$$= \pi r^2 \times 30$$

$$\approx 25\,800$$

$< \triangle BED$ 的外接圓的面積

同意該宣稱。

1

3. (a) G 的坐標為 $(4, 10)$ 。

1M

所求方程為

$$(x - 4)^2 + (y - 10)^2 = (14 - 4)^2 + (20 - 10)^2$$

1M

$$(x - 4)^2 + (y - 10)^2 = 200$$

1A

(b) L_1 的方程為

$$\frac{y - 0}{x + 6} = \frac{20 - 0}{14 + 6}$$

1M

$$y = x + 6$$

圍成的區域的三個頂點的坐標為 $(0, 6)$ 、 $(0, k)$ 及 $(k - 6, k)$ 。

1M

$$\frac{(k - 6)(k - 6 - 0)}{2} = 200$$

$$k - 6 = \pm 20$$

$$k = 26 \quad \text{或} \quad -14 \quad (\text{捨去})$$

1A

(c) $\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 10)^2} = \sqrt{(y - 26)^2}$

1M+1M

$$x^2 + y^2 - 8x - 20y + 116 = y^2 - 52y + 676$$

1M

$$x^2 - 8x + 32y - 560 = 0$$

1A

4. (a) 設 G 的坐標為 $(h, 26)$ 。

留意 G 在 AB 的垂直平分線上。

$$h = \frac{5+13}{2} \quad 1M$$

$$= 9$$

C 的方程為

$$(x-9)^2 + (y-26)^2 = (5-9)^2 + (23-26)^2 \quad 1M$$

$$(x-9)^2 + (y-26)^2 = 25 \quad 1A$$

(b) $\sqrt{(k-9)^2 + (38-26)^2} = 15 \quad 1M$

$$k^2 - 18k = 0$$

$$k = 18 \quad \text{或} \quad 0 \quad (\text{捨去}) \quad 1A$$

(c) (i) T 、 P 與 G 共線。 1A

(ii) C 的半徑為 5。

所求之比 = $GP : PT$ 1M

$$= 5 : (15 - 5)$$

$$= 1 : 2 \quad 1A$$

5. (a) (i) $x^2 + (mx)^2 - 400x - 300mx + 40\,000 = 0 \quad 1M$

$$(1+m^2)x^2 - (300m+400)x + 40\,000 = 0$$

$$\Delta = (300m+400)^2 - 4(1+m^2)(40\,000) > 0 \quad 1M$$

$$10\,000(-7m^2 + 24m) > 0$$

$$0 < m < \frac{24}{7} \quad 1A$$

(ii) M 的 $x = \frac{1}{2} \left[\frac{300m+400}{1+m^2} \right]$

$$= \frac{50(3m+4)}{1+m^2}$$

$$M \text{ 的 } y = m \cdot \frac{50(3m+4)}{1+m^2}$$

$$= \frac{50m(3m+4)}{1+m^2}$$

1

(b) (i) AB 的垂直平分線為通過 O 及 C 的圓心的直線。 1M

C 的圓心的坐標為 $(200, 150)$ 。

所求方程為

$$y - 0 = \frac{150 - 0}{200 - 0}(x - 0)$$

$$3x - 4y = 0 \quad 1A$$

(ii) 留意當 $m = 0$ 或 $\frac{24}{7}$ 時， L 與 C 相切。

當 $m = 0$ ， L 與 C 的交點的坐標為 $(200, 0)$ 。

B 的坐標為 $(200, 0)$ 。

1A

當 $m = \frac{24}{7}$ 時，可得 A 的坐標為 $(56, 192)$ 。

將 C 的圓心記為 $G(200, 150)$ 。

假定 G 與 M 為相異點。

留意 $\angle GMO = 90^\circ$ 及 $\angle OBG = 90^\circ$ 。

可得 $O、B、G、M$ 共圓。

1M

由於 $\angle OAG = 90^\circ$ 及 $\angle GMO = 90^\circ$ ，可得 $O、A、G、M$ 共圓。

因此， $O、A、M、G、B$ 共圓。

若 G 與 M 重合， $O、A、G、B$ 同為共圓。

留意 OG 為該圓的直徑。

所求之圓的圓心為 $(100, 75)$ 。

1M

所求方程為

$$(x - 100)^2 + (y - 75)^2 = (0 - 100)^2 + (0 - 75)^2$$

$$(x - 100)^2 + (y - 75)^2 = 15\,625$$

1A

(iii) 將圓 AMB 的圓心記為 D 。

$$\tan \angle BOG = \frac{150}{200}$$

$$\angle BOG \approx 36.9^\circ$$

$$\angle ADB = 2\angle AOB = 2(2\angle BOG) \approx 147^\circ$$

1M

$$\Gamma \text{ 的長度} \leq 2\pi(125) \times \frac{\angle ADB}{360^\circ}$$

1M

$$\approx 322 < 330$$

不同意該宣稱。

1A

6. (a) (i) $\angle BEC = \angle BDC$ (同弓形內的圓周角)

$\angle ECG = \angle BEC$ (錯角, $BE \parallel CG$)

$$= \angle BDC$$

$\angle BCE = \angle BDE$ (同弓形內的圓周角)

$$\angle BCG = \angle BCE + \angle ECG$$

$$= \angle BDE + \angle BDC \quad (\text{已證明})$$

$$= \angle CDG$$

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) $\angle CBD = \angle DBE$ (等弧對等角)

$\angle BHC = \angle DBE$ (錯角, $BE \parallel CG$)

$$= \angle CBD$$

$$BC = HC \quad (\text{等角對等邊})$$

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $BH : DH = \frac{144}{25} : 8$ 1M

$= 18 : 7$ 1A

H 的 x 坐標 $= \frac{18}{25} \times (6) = \frac{108}{25}$ 1M

H 的坐標為 $\left(\frac{108}{25}, -\frac{144}{25}\right)$ 。 1A

(ii) BD 的斜率 $= \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$

CE 的斜率 $= \frac{0 + \frac{144}{25}}{6 + \frac{42}{25}} = \frac{3}{4}$ 1M

由於 $\frac{-4}{3} \times \frac{3}{4} = -1$, $BD \perp CE$, 故此 $\angle CFD = 90^\circ = \angle CGD$ 。 1A

C 、 D 、 G 、 F 共圓。 (同弓形內的圓周角的逆定理) 1

(iii) CD 為圓 $CDGF$ 的直徑。

CD 的斜率 $= \frac{-8 + \frac{144}{25}}{6 + \frac{42}{25}} = -\frac{7}{24}$

所求切線的斜率 $= \frac{24}{7}$ 1M

所求方程為

$$y + 8 = \frac{24}{7}(x - 6)$$

$24x - 7y - 200 = 0$ 1A

7. (a) $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = r^2$ 1A

(b) (i) 設 G 為 C' 的圓心, 則 $G(-2, 6 - c)$ 。 1A

由於 $AG \perp PQ$,

$$\frac{6 - c - 6}{-2 - 2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$
 1M

$c = 8$ 1A

(ii) AG 的中點在 PQ 上, 即 $(0, 2)$ 在 PQ 上。 1M

PQ 的方程為 $y = -\frac{x}{2} + 2$ 。 1A

(iii) $(x - 2)^2 + \left(-\frac{x}{2} + 2 - 6\right)^2 = r^2$ 1M

$$\frac{5}{4}x^2 + 20 - r^2 = 0$$

a 及 d 為該方程的根。

故此, $a + d = 0$ 及 $ad = \frac{4(20 - r^2)}{5}$ 。 1M

$$(a - d)^2 = (a + d)^2 - 4ad$$

$$= \frac{16(r^2 - 20)}{5}$$
 1A

$$(c) PQ^2 = (a-d)^2 + \left[\left(-\frac{a}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{d}{2} + 2 \right) \right]^2$$

$$80 = \frac{5}{4}(a-d)^2$$

$$= 4(r^2 - 20)$$

1M

$$r^2 = 40$$

$$r = 2\sqrt{10} \quad \text{或} \quad -2\sqrt{10} \quad (\text{捨去})$$

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{34} < r$$

故此， B 在 C 內。

同意該宣稱。

1A