REG-EOC-2425-ASM-SET 7-MATH
建議題解

結構式試題

1. $x^2 + (-3x - k)^2 + 4x - 2(-3x - k) - 5 = 0$ 1M

$(1 + 9)x^2 + (6k + 4 + 6)x + (k^2 + 2k - 5) = 0$

$10x^2 + (6k + 10)x + (k^2 + 2k - 5) = 0$

$\Delta = (6k + 10)^2 - 4(10)(k^2 + 2k - 5) = 0$ 1M

$-4k^2 + 40k + 300 = 0$

$k = -5$ 或 15 1A+1A

2. $x^2 + (3x + 8)^2 - 5x - 4(3x + 8) + k = 0$ 1M

$(1 + 9)x^2 + (48 - 5 - 12)x + (64 - 32 + k) = 0$

$10x^2 + 31x + 32 + k = 0$ 1A

$\Delta = 31^2 - 4(10)(32 + k) < 0$ 1M

$-319 - 40k < 0$

$k > -\dfrac{319}{40}$

所求數值為 -7。 1A

3. (a) $(-3y + 10)^2 + y^2 - 8(-3y + 10) - 4y - k^2 = 0$ 1M

$(9 + 1)y^2 + (-60 + 24 - 4)y + (100 - 80 - k^2) = 0$

$10y^2 - 40y + (20 - k^2) = 0$

$\Delta = 40^2 - 4(10)(20 - k^2)$ 1M

$= 40k^2 + 800$

> 0

因此，C 與 L 相交於兩點。 1

(b) 中點的 y 坐標

$= \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{-40}{10}\right)$ 1M

$= 2$

$x + 3(2) - 10 = 0$ 1M

$x = 4$

所求坐標為 $(4,\ 2)$。 1A

4. (a) 圓心 $(-4,\ 3)$，半徑 $= \sqrt{4^2 + 3^2 - 5} = 2\sqrt{5}$ 1A

(b) $(2y - k)^2 + y^2 + 8(2y - k) - 6y + 5 = 0$ 1M

$(4 + 1)y^2 + (-4k + 16 - 6)y + (k^2 - 8k + 5) = 0$

$5y^2 + (-4k + 10)y + (k^2 - 8k + 5) = 0$

M 的 y 坐標 $= \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{-4k+10}{5}\right) = \dfrac{2k-5}{5}$ 1M

當 $y = \dfrac{2k-5}{5}$ 時，$x = 2\left(\dfrac{2k-5}{5}\right) - k = \dfrac{-k-10}{5}$。

所求坐標為 $\left(\dfrac{-k-10}{5},\ \dfrac{2k-5}{5}\right)$。 1A

(c) 若 M 在 x 軸以上，則 $2k-5>0$。故此，$k > \dfrac{5}{2}$。 1A

考慮方程 $5y^2 + (-4k+10)y + (k^2-8k+5) = 0$。

若 L 與 C 相交於兩相異點，

$$\Delta = (-4k+10)^2 - 4(5)(k^2-8k+5) > 0 \quad \text{1M}$$

$$-4k^2 + 80k > 0$$

$$0 < k < 20 \quad \text{1A}$$

集合 $k > \dfrac{5}{2}$ 和 $0 < k < 20$，可得 $\dfrac{5}{2} < k < 20$。

因此，M 可能在 x 軸以上的區域。 1A

5. (a) $CE \perp AB$ *（垂心性質）*

$BD \perp AC$ *（垂心性質）*

$\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$

因此，$BCDE$ 為圓內接四邊形。 *（同弓形內的圓周角的逆定理）*

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) 圓心的坐標 $= \left(\dfrac{-6+14}{2},\ \dfrac{-6-6}{2}\right) = (4,\ -6)$ 1A

圓的方程為

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = (0-4)^2 + (8+6)^2 \quad \text{1M}$$

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 100 \quad \text{1A}$$

(ii) A 與圓心的距離 $= \sqrt{4^2 + (-6-8)^2} = \sqrt{212}$

圓的半徑 $= 10$

兩切線之間的角 $= 2 \times \sin^{-1} \dfrac{10}{\sqrt{212}} \approx 86.8^\circ \neq 90^\circ$ 1M+1A

不同意該宣稱。 1A

6. (a) $AB^2 = 9^2 + 18^2 = 405$

$AC^2 = 13^2 + 16^2 = 425$

$BC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

故此，$AB^2 + BC^2 = AC^2$。 1M

因此，$\angle ABC = 90^\circ$。

$\triangle ABC$ 為一直角三角形。 1A

(b) 圓心的坐標 $= \left(\dfrac{-9+4}{2},\ \dfrac{-8+8}{2}\right) = \left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ 1A

Ω 的方程為

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \left(0+\frac{5}{2}\right)^2 + 10^2$$ 1M

$$x^2 + y^2 + 5x - 100 = 0$$ 1A

(c) (i) D 的坐標為 $(10,\ 0)$。 1A

$$(10)^2 + 0^2 + 5(10) - 100 = 50 \neq 0$$

故此，D 不在通過 A、B 及 C 的圓上。 1M

因此，$ABCD$ 不是圓內接四邊形。 1A

(ii) 設 L 的斜率為 m。

L 的方程為 $y = m(x-10)$。 1M

代 L 至 Ω，

$$x^2 + (mx - 10m)^2 + 5x - 100 = 0$$ 1M

$$(1+m^2)x^2 + (-20m^2 + 5)x + (100m^2 - 100) = 0$$

由於 L 為切線，$\Delta = 0$。

$$(20m^2 - 5)^2 - 4(1+m^2)(100m^2 - 100) = 0$$ 1M

$$-200m^2 + 425 = 0$$

$$m = \pm\frac{\sqrt{34}}{4}$$ 1A

L 的方程為 $y = \dfrac{\sqrt{34}}{4}(x-10)$ 及 $y = -\dfrac{\sqrt{34}}{4}(x-10)$。