

REG-EOC-2425-ASM-SET 5-MATH

建議題解

結構式試題

1. C 的方程為 $x^2 + y^2 - 14x + 8y + \frac{13}{2} = 0$ 。

設 G 為 C 的圓心。

G 的坐標為 $(7, -4)$ 。

1A

$$GP \text{ 的斜率} = \frac{-4 + \frac{11}{2}}{7 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

切線的斜率 = -5

1M

所求方程為

$$y + \frac{11}{2} = -5 \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

1M

$$5x + y + 8 = 0$$

1A

2. 設 G 為 C 的圓心。

G 的坐標為 $(4, -15)$ 。

1M

$$GP \text{ 的斜率} = \frac{-15 + 3}{4 - 5} = 12$$

切線的斜率 = $-\frac{1}{12}$

1M

所求方程為

$$y + 3 = -\frac{1}{12}(x - 5)$$

1M

$$x + 12y + 31 = 0$$

1A

$$3. \quad 4x^2 + 4 \left(-\frac{x}{2} + \frac{5}{4} \right)^2 - 16x + 8 \left(-\frac{x}{2} + \frac{5}{4} \right) - 5 = 0$$

1M

$$(4 + 1)x^2 + (-5 - 16 - 4)x + \left(\frac{25}{4} + 10 - 5 \right) = 0$$

$$5x^2 - 25x + \frac{45}{4} = 0$$

$$x = \frac{9}{2} \quad \text{或} \quad \frac{1}{2}$$

所求坐標為 $\left(\frac{9}{2}, -1 \right)$ 及 $\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ 。

1A+1A

$$4. \quad (x - 3)^2 + (-2x - 4)^2 = 65$$

1M

$$(1 + 4)x^2 + (-6 + 16)x + (9 + 16 - 65) = 0$$

$$5x^2 + 10x - 40 = 0$$

$$x = -4 \quad \text{或} \quad 2$$

所求坐標為 $(-4, 8)$ 及 $(2, -4)$ 。

1A+1A

$$\begin{aligned} 5. \quad & (-3y + 5)^2 + y^2 + 2(-3y + 5) - 14y + 5 = 0 \\ & (9 + 1)y^2 + (-30 - 6 - 14)y + (25 + 10 + 5) = 0 \\ & 10y^2 - 50y + 40 = 0 \end{aligned}$$

1M

$$y = 4 \quad \text{或} \quad 1$$

所求坐標為 $(-7, 4)$ 及 $(2, 1)$ 。

1A+1A

$$\begin{aligned} 6. \quad & 4x^2 + 4\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 - 16\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) - 69 = 0 \\ & (4 + 1)x^2 + (3 - 8)x + \left(\frac{9}{4} - 12 - 69\right) = 0 \\ & 5x^2 - 5x - \frac{315}{4} = 0 \end{aligned}$$

1M

$$x = \frac{9}{2} \quad \text{或} \quad -\frac{7}{2}$$

所求坐標為 $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$ 及 $\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$ 。

1A+1A

$$\begin{aligned} 7. \quad (a) \quad & (y + 4)^2 + y^2 - 8(y + 4) + 4y - 14 = 0 \\ & (1 + 1)y^2 + (8 - 8 + 4)y + (16 - 32 - 14) = 0 \\ & 2y^2 + 4y - 30 = 0 \end{aligned}$$

1M

$$y = 3 \quad \text{或} \quad -5$$

A 及 B 的坐標分別為 $(7, 3)$ 及 $(-1, -5)$ 。

1A+1A

$$\begin{aligned} (b) \quad AB &= \sqrt{(7 + 1)^2 + (3 + 5)^2} \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

1M

1A

$$\begin{aligned} 8. \quad & x^2 + (-x + 4)^2 - 6x + 2(-x + 4) = 0 \\ & (1 + 1)x^2 + (-8 - 6 - 2)x + (16 + 8) = 0 \\ & 2x^2 - 16x + 24 = 0 \end{aligned}$$

1M

$$x = 6 \quad \text{或} \quad 2$$

所求坐標為 $(6, -2)$ 及 $(2, 2)$ 。

1A+1A

$$\begin{aligned} 9. \quad (a) \quad & (-4y)^2 + y^2 - 3(-4y) + 5y - 34 = 0 \\ & (16 + 1)y^2 + (12 + 5)y - 34 = 0 \\ & 17y^2 + 17y - 34 = 0 \end{aligned}$$

1M

$$y = 1 \quad \text{或} \quad -2$$

所求坐標為 $(-4, 1)$ 及 $(8, -2)$ 。

1A+1A

$$(b) \quad x^2 + \left(-\frac{4x}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 - 6x - 8\left(-\frac{4x}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0 \quad 1M$$

$$\left(1 + \frac{16}{9}\right)x^2 + \left(\frac{8}{9} - 6 + \frac{32}{3}\right)x + \left(\frac{1}{9} + \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$\frac{25x^2}{9} + \frac{50x}{9} + \frac{25}{9} = 0$$

$$x = -1 \quad 1A$$

所求坐標為 $(-1, 1)$ 。 1A

10. (a) 設 $f(x) = ax + bx^2$ ，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} -160 = -5a + 25b \\ -16 = 4a + 16b \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $a = 12$ 及 $b = -4$ 。

$$f(3) = 12(3) - 4(3)^2 = 0 \quad 1A$$

$$(b) \quad p = f(3) = 0$$

$$12q - 4q^2 = 8 \quad 1M$$

$$-4q^2 + 12q - 8 = 0$$

$$q = 1 \quad \text{或} \quad 2$$

留意 $\angle QRP = 90^\circ$ 。

PQ 為 C 的一直徑。 1M

$$\text{當 } q = 1, C \text{ 的面積} = \pi \left(\frac{\sqrt{2^2 + 8^2}}{2} \right)^2 = 17\pi。 \quad 1M$$

$$\text{當 } q = 2, C \text{ 的面積} = \pi \left(\frac{\sqrt{1^2 + 8^2}}{2} \right)^2 = \frac{65\pi}{4} < 17\pi。$$

因此，沒有可能。 1A

11. (a) G 的坐標為 $(4, -5)$ 。 1M

$$\text{半徑} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 248} = 17 \quad 1M$$

$$GH = \sqrt{(4+14)^2 + (19+5)^2} = 30 > 17 \quad 1M$$

H 在 C 外。 1

(b) (i) H 、 G 與 P 共線。 1A

$$(ii) \quad AB = 2\sqrt{17^2 - \left(\frac{30}{2}\right)^2} \quad 1M$$

$$= 16$$

$\triangle ABP$ 的面積

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times \left(\frac{30}{2} + 17 \right)$$

$$= 256 \quad 1A$$