結構式試題

1. (a) $G\ (77,\ 64)$ 1A

所求距離 $= \sqrt{(77-65)^2+(64-48)^2}$ 1M

$= 20$ 1A

(b) (i) GH 垂直於 GP。 1A

(ii) $GP = \sqrt{77^2+64^2-224} = 99$ 1M

$HP = \sqrt{99^2+20^2} = 101$ 1M

所求周界 $= 99+101+20$

$= 220$ 1A

2. (a) $(6,\ 17)$ 1A

(b) (i) 設 $(h,\ k)$ 為 P 的坐標。

由於 P 在 L 上，可得 $4h+3k+50=0$。 1M

由於 $RP \perp L$，

$$\frac{k-17}{h-6} \times \frac{-4}{3} = -1$$ 1M

$$3h-4k+50=0$$

求解後，$h=-14$ 及 $k=2$。

所求距離 $= \sqrt{(-14-6)^2+(2-17)^2}$ 1M

$= 25$ 1A

(ii) (1) P、Q、R 共線。 1A

(2) $QR = 10$ 1M

$PQ = 25-10 = 15$ 1M

所求比例 $= PQ : QR$

$= 3 : 2$ 1A

3. (a) $(x-2)^2+(y+1)^2=(-6-2)^2+(5+1)^2$ 1M

$(x-2)^2+(y+1)^2=100$ 1A

(b) C 的半徑 $=\sqrt{100}=10$

$FG=\sqrt{(-3-2)^2+(11+1)^2}$ 1M

$=13$

>10

因此，F 在 C 外。 1

(c) (i) F、G、H 共線。 1A

(ii) FH 的斜率 $=$ FG 的斜率

$=\dfrac{-1-11}{2+3}$ 1M

$=-\dfrac{12}{5}$

所求方程為

$$y-11=-\frac{12}{5}(x+3)$$

$12x+5y-19=0$ 1A

4. (a) (i) PQ 的中點 $=(-5,\ 11)$

PQ 的斜率 $=\dfrac{23+1}{-14-4}=-\dfrac{4}{3}$ 1M

L 的方程為

$$y-11=\frac{3}{4}(x+5)$$ 1M

$3x-4y+59=0$ 1A

(ii) G 的 y 坐標 $=\dfrac{3h+59}{4}$ 1M

C 的方程為

$$x^2+y^2-2hx-2\left(\frac{3h+59}{4}\right)y+F=0$$ 1M

$2x^2+2y^2-4hx-(3h+59)y+2F=0$

其中 F 為一常數。

$2(4)^2+2(-1)^2-4h(4)-(3h+59)(-1)+2F=0$

$2F=13h-93$

C 的方程為 $2x^2+2y^2-4hx-(3h+59)y+13h-93=0$。 1

(b) $2(26)^2+2(43)^2-4h(26)-(3h+59)(43)+13h-93=0$ 1M

$h=11$

C 的方程為 $x^2+y^2-22x-46y+25=0$。

所求直徑 $=2\sqrt{\left(\dfrac{22}{2}\right)^2+\left(\dfrac{46}{2}\right)^2-25}$ 1M

$=50$ 1A

5. (a) (i) 圓心的坐標為 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$。 1A

半徑為 $\frac{p}{2}$。 1A

所求方程為

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2 \qquad \text{1A}$$

$$x^2+y^2-px=0$$

(ii) 由於 S 在圓 OPS 上，$a^2+b^2-pa=0$。 1M

$$OS^2=a^2+b^2 \qquad \text{1A}$$

$$=pa$$

$$=OP\cdot OR$$

$$=OP\cdot OQ\cos\angle POQ \qquad \text{1A+1}$$

(b) (i) 由於 BC 為圓 $BCEF$ 的直徑，$\angle BEC=90°$ *（半圓上的圓周角的逆定理）*

因此，BE 是 $\triangle ABC$ 的高。 1

(ii) 考慮圓 $ACDG$。由於 $BE\perp AC$，根據 (a)，可得

$CG^2=CA\cdot CB\cos\angle ACB$。 1A

考慮圓 $BCEF$。由於 $AD\perp BC$，根據 (a)，可得

$CF^2=CB\cdot CA\cos\angle ACB$。 1A

因此，$CG=CF$。 1

6. (a) $\angle ADE=\angle DBC$ *（錯角，$OD//BC$）*

$\angle BOE=\angle DBC$ *（交錯弓形的圓周角））*

$=\angle ADE$

$\angle DAE=\angle OBE$ *（圓內接四邊形外角）*

$AD=BO$ *（已知）*

$\triangle ADE\cong\triangle BOE$ *（ASA）*

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) $AE=BE$ *（全等 △ 的對應邊）*

$\angle AOE=\angle BOE$ *（等弦對等角）*

$\angle BEO=\angle AED$ *（全等 △ 的對應角）*

$\angle AED=\angle AOB$ *（圓內接四邊形外角）*

$\angle BEO=\angle AOB$

$=\angle AOE+\angle BOE$

$=2\angle BOE$

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(c) (i) $\angle BOE + \angle BEO + \angle OBE = 180°$ 1M

$\angle BOE + 2\angle BOE + 90° = 180°$

$\angle BOE = 30°$ 1A

(ii) E 的坐標為 $(6,\ 6\tan 30°) = \left(6,\ 2\sqrt{3}\right)$。

則圓 $OAEB$ 的圓心的坐標為 $\left(3,\ \sqrt{3}\right)$。 1A

所求方程為

$(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = (0-3)^2 + (0-\sqrt{3})^2$ 1M

$(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 12$ 1A

7. (a) (i) 延長 CH 與 AB 相交於 K。

$\angle BAS = 90° = \angle BCS$ （半圓上的圓周角）

$\angle BKC = \angle BOA = 90°$ （垂心性質）

$\angle BAS = \angle BKC$

$AS // HC$ （同位角相等）

$\angle BCS = \angle BOA$

$SC // AH$ （同位角相等）

因此，$AHCS$ 為平行四邊形。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(ii) $GR \perp BC$ （已知）

$BR = RC$ （圓心至弦的垂線平分弦）

$BG = GS$ （半徑）

$SC = 2GR$ （中點定理）

$AH = SC$ （平行四邊形對邊）

$AH = 2GR$

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) 設圓的方程為 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$。

$$\begin{cases} (-6)^2 - 6D + F = 0 \\ 4^2 + 4D + F = 0 \\ 12^2 + 12E + F = 0 \end{cases}$$ 1M

解首兩條方程，可得 $D = 2$ 及 $F = -24$。 1A

故此，可得 $E = -10$。 1A

因此，圓的方程為 $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 24 = 0$。

(ii) G 的坐標為 $(-1,\ 5)$。

故此，R 的坐標為 $(-1,\ 0)$。

可得 $GR = 5$，並由此可得 $AH = 10$。

因此，H 的坐標為 $(0,\ 2)$。 1A

(iii) GH 的斜率 $= \dfrac{5-2}{-1-0} = -3$

BG 的斜率 $= \dfrac{5-0}{-1+6} = 1$

由於 GH 與 BG 的斜率之積不是 -1，$\angle BGH \neq 90°$。 1M

$\angle BGH + \angle BOH = \angle BGH + 90° \neq 180°$

因此，B、O、H、G 不共圓。 1A

8. (a) (i) $\angle ABG = \angle DBG$ （內心性質）

$BG = BG$ （公共邊）

$AB = BD$ （已知）

$\triangle ABG \cong \triangle DBG$ （SAS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(ii) $\angle IAG = \angle EAB$ （內心性質）

$\angle ABE = 90°$ （半圓上的圓周角）

$\angle AGI = \angle DGI$ （全等 △ 的對應角）

$\angle AGI + \angle DGI = 180°$ （直線上的鄰角）

$\angle AGI = 90°$

$= \angle ABE$

$\triangle AGI \sim \triangle ABE$ （AA）

$\dfrac{GI}{AG} = \dfrac{BE}{AB}$ （相似 △ 的對應邊）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) (i) 設 G 的坐標為 $(a,\ 0)$。

$$a = \frac{-25+11}{2}$$

$= -7$ 1A

G 的坐標為 $(-7,\ 0)$。

(ii) 留意 $AG = 11 + 7 = 18$。 1M

$$\frac{GI}{AG} = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$GI = \left(\frac{BE}{AB}\right) AG$$

$= \dfrac{1}{2}(18)$ 1M

$= 9$ 1A

I 的坐標為 $(-7,\ 9)$。
內切圓的方程為

$$(x+7)^2+(y-9)^2=9^2 \qquad \text{1A}$$
$$(x+7)^2+(y-9)^2=81$$

9. (a) $\angle BAP=\angle CAP$ （內心性質）
$\angle ACI=\angle BCI$ （內心性質）
$BP=CP$ （等角對等弦）
$\angle BCP=\angle CAP$ （等弦對等角）
$\angle CIP=\angle CAP+\angle ACI$ （△ 外角）
$=\angle BCP+\angle BCI$
$=\angle ICP$
$CP=IP$ （等角對等弦）
因此，$BP=CP=IP$。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) (i) 據 (a)，所求圓通過 B、C 及 I。
設圓的方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$。

$$\begin{cases}(-80)^2-80D+F=0\\ 64^2+64D+F=0\\ 32^2+32E+F=0\end{cases} \qquad \text{1M}$$

解首兩條方程，可得 $D=16$ 及 $F=-5120$。 1A
故此，可得 $E=128$。 1A
因此，所求方程為 $x^2+y^2+16x+128y-5120=0$。

(ii) P 的坐標為 $(-8,\ -64)$。
設 G 的坐標為 $(-8,\ k)$。 1M

$$GP=BG$$
$$(k+64)^2=(-8+80)^2+(k-0)^2 \qquad \text{1M}$$
$$k=\frac{17}{2}$$

由於 G 為 PQ 的中點，Q 的 y 坐標為 81。
因此，Q 的坐標為 $(-8,\ 81)$。 1A

(iii) BQ 的斜率 $=\dfrac{81-0}{-8+80}=\dfrac{9}{8}$

IQ 的斜率 $=\dfrac{81-32}{-8-0}=-\dfrac{49}{8}$

由於 BQ 與 IQ 的斜率之積不是 -1，$\angle BQI \neq 90°$。 1M

$\angle BQI + \angle BRI = \angle BQI + 90° \neq 180°$

因此，B、Q、I、R 不共圓。 1A

10. (a) $R\,(64,\ -48)$ 1A

PR 的中點的坐標 $= (40,\ 16)$

PR 的斜率 $= \dfrac{80+48}{16-64} = -\dfrac{8}{3}$

PR 的垂直平分線的斜率為 $\dfrac{3}{8}$。 1M

所求方程為

$$y - 16 = \frac{3}{8}(x - 40) \quad \text{1M}$$

$$3x - 8y + 8 = 0 \quad \text{1A}$$

(b) 由於 PS 為 QR 的垂直平分線而其方程為 $x = 16$，$\triangle PQR$ 的外心的坐標為 $(16,\ h)$，其中 h 為一常數。 1M

代 $(16,\ h)$ 至 $3x - 8y + 8 = 0$，

$$3(16) - 8h + 8 = 0 \quad \text{1M}$$

$$h = 7 \quad \text{1A}$$

$\triangle PQR$ 的外心的坐標為 $(16,\ 7)$。

(c) (i) C 的圓心的坐標 $= (16,\ 7)$

C 的方程為

$$(x-16)^2 + (y-7)^2 = (16-16)^2 + (80-7)^2 \quad \text{1M}$$

$$(x-16)^2 + (y-7)^2 = 5329 \quad \text{1A}$$

(ii) 設 N 為 $\triangle PQR$ 的外心，則 N 的坐標為 $(16,\ 7)$。

設 M 為 PR 的中點，則 $MN \perp PR$。

$$NS = 7 - (-48) = 55 \quad \text{1M}$$

$$NM = \sqrt{(40-16)^2 + (16-7)^2} = \sqrt{657} \neq 55$$

故此，N 不是 $\triangle PQR$ 的內心。

因此，C 的圓心與 $\triangle PQR$ 的內心不是同一點。 1A

多項選擇題

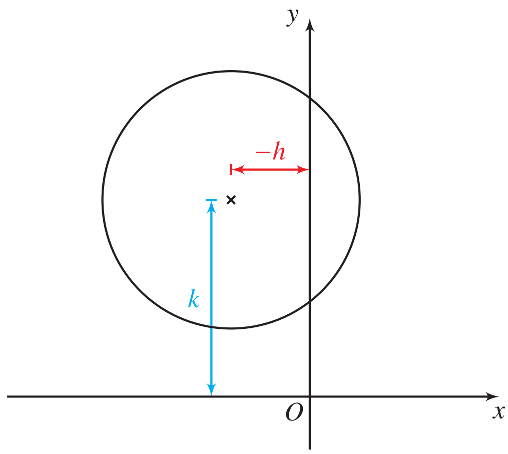
1. $\boxed{\text{A}}$ (56.2%)

圓心在第二象限內。所以，$h < 0$ 及 $k > 0$。

I. ✓。$k + h = k - (-h) > 0$
（與 x 軸的距離大於與 y 軸的距離）

II. ✓。$r - h = r + (-h) > 0$
（長度為正數）

III. ✗。$r - k < 0$
（半徑小於與 x 軸的距離）



2. $\boxed{\text{A}}$ (44.9%)

圓心 $\left(4,\ -\dfrac{k}{2}\right)$。直徑通過 $\left(4,\ -\dfrac{k}{2}\right)$ 及 $(6,\ -5)$。

$$\frac{-5 + \frac{k}{2}}{6 - 4} = -4$$

$$k = -6$$

3. $\boxed{\text{C}}$ (35.1%)

圓心在 $(9,\ 10)$。該直線通過圓心及 $(s,\ t)$，且垂直於 L。

$$\frac{t - 10}{s - 9} = -\frac{1}{4}$$

$$x + 4t - 49 = 0$$

4. $\boxed{\text{D}}$ (35.8%)

$C : x^2 + y^2 - 2x + 4y - \dfrac{5}{2} = 0$。圓心 $(1,\ -2)$。

I. ✗。半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 + \dfrac{5}{2}} \neq 5$。

II. ✓。PQ 的中點為 $\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$。代至 C 的方程的左式，$2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 2(1)^2 - 4\left(\dfrac{3}{2}\right) + 8(1) - 5 =$
$3.5 > 0$。
因此，它在 C 以外。

III. ✓。利用距離公式，$GP = \sqrt{20}$、$GQ = \sqrt{13}$ 及 $PQ = \sqrt{29}$。

$$PQ^2 = GP^2 + GQ^2 - 2(GP)(GQ)\cos\angle PGQ$$

$$\angle PGQ \approx 82.9^\circ < 90^\circ$$

5. $\boxed{\text{C}}$ (55.5%)

C：$x^2 + y^2 - 4x + 10y + \frac{65}{3} = 0$

I. ✗。半徑 $= \sqrt{2^2 + 5^2 - \frac{65}{3}} \neq 14$

II. ✓。代 $(0,\ 0)$，左式 $= 65 > 0$
原點在 C 外。

III. ✓。圓心 $(2,\ -5)$

6. $\boxed{\text{A}}$ (52.9%)

C_2：$x^2 + y^2 + 4x - 2y - \frac{5}{2} = 0$
$G_1\,(-4,\ 2)$ 及 $G_2\,(-2,\ 1)$

I. ✓。OG_1 的斜率 $= \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$，$OG_2$ 的斜率 $= \frac{1}{-2}$。

II. ✗。C_1 的半徑 $= \sqrt{4^2 + 2^2 + 5} = \sqrt{15}$，$C_2$ 的半徑 $= \sqrt{2^1 + 2^1 + \frac{5}{2}} \neq \sqrt{15}$。

III. ✗。$OG_1 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ 及 $OG_2 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$。

7. $\boxed{\text{C}}$ (42.5%)

C：$x^2 + y^2 - 6x + 2y + \frac{6}{5} = 0$

A. ✗。$0^2 + 0^2 - 0 + 0 + \frac{6}{5} = \frac{6}{5} > 0$。原點在圓外。

B. ✗。圓心 $(3,\ -1)$ 在第四象限。

C. ✓。圓周 $= \sqrt{3^2 + 1^2 - \frac{6}{5}} < 20$

D. ✗。

8. $\boxed{\text{B}}$ (55.8%)

$x^2 + y^2 + 2x - 6y + \frac{15}{2} = 0$

I. ✗。Radius $= \sqrt{1^2 + 3^2 - \frac{15}{2}} = \sqrt{2.5}$。$C$ 的面積 $= 2.5\pi \neq 25\pi$。

II. ✓。$2(-3)^2 + 2(3)^2 + 4(-3) - 12(3) + 15 = 3 > 0$。它在 C 外。

III. ✗。圓心 $(-1,\ 3)$ 在第二象限。

9. $\boxed{\text{C}}$ (50.4%)

C_1：$x^2 + y^2 + 2x + 4y - \dfrac{149}{2} = 0$。

I. ✓。$(-1)^2 + (2)^2 - 8(-1) - 20(2) - 53 = 0$。它在 C_2 上。

II. ✗。C_1 的半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 + \dfrac{149}{2}} = \sqrt{79.5}$ 而 C_2 的半徑 $= \sqrt{4^2 + 10^2 + 53} = 13$。

III. ✓。兩圓心的距離 = 13，在兩半徑的和與差之間，即在 $13 - \sqrt{79.5}$ 與 $13 + \sqrt{79.5}$ 之間。

所以，它們相交於兩相異點。

10. $\boxed{\text{C}}$ (50.7%)

C_2: $x^2 + y^2 - x - 8y - \dfrac{17}{2} = 0$

G_1 及 G_2 的坐標分別為 $\left(-\dfrac{7}{2}, 2\right)$ 及 $\left(\dfrac{1}{2}, 4\right)$。

I. ✗。$G_1G_2 = \sqrt{(0.5 + 3.5)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{20}$

$OG_1 = \sqrt{(3.5)^2 + (2)^2} = \sqrt{16.25} \neq G_1G_2$

因此，$\triangle OG_1G_2$ 不是等邊三角形。

II. ✓。當 $(x, y) = (0, 0)$ 時，$2x^2 + 2y^2 - 2x - 16y - 17 = -17 < 0$。

當 $(x, y) = \left(-\dfrac{7}{2}, 2\right)$ 時，$2x^2 + 2y^2 - 2x - 16y - 17 = -9.5 < 0$。

可得 O 及 G_1 均在 C_2 內。

因此，線段 OG_1 在 C_2 內。

III. ✓。C_1 的半徑 $= \sqrt{3.5^2 + 2^2 - 15} = \sqrt{1.25}$

C_2 的半徑 $= \sqrt{0.5^2 + 4^2 + 17} = \sqrt{33.25}$

留意 $\sqrt{33.25} - \sqrt{1.25} < G_1G_2 < \sqrt{33.25} + \sqrt{1.25}$。

因此，C_1 與 C_2 相交於兩相異點。

11. $\boxed{\text{C}}$ (70.2%)

半徑 = 0 − (−4) = 4。該方程為

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$$

12. $\boxed{\text{C}}$ (50.2%)

PQ 的斜率 $= \dfrac{-24+7}{10-17} = \dfrac{17}{7}$

OQ 的斜率 $= \dfrac{-7-0}{17-0} = -\dfrac{7}{17}$

可得 $PQ \perp OQ$。

圓心為 OP 的中點。

圓心的坐標為 $(5,\ -12)$。

A. ✗。OP 為該圓的直徑。

B. ✗。半徑 $= \sqrt{(5-0)^2+(0+12)^2} = 13$

面積 $= 13^2\pi = 169\pi$

C. ✓。由該點至圓心的距離 $= \sqrt{(16-5)^2+(-9+12)^2} = \sqrt{130} <$ 半徑

點 $(16,\ -9)$ 在 C 內。

D. ✗。$5(5)+12(-12) = -119 \neq 0$

圓心 $(5,\ -12)$ 不在該直線上。

13. $\boxed{\text{C}}$

半徑 $= \sqrt{5^2+3^2+2} = 6$

面積 $= 6^2\pi = 36\pi$

14. $\boxed{\text{C}}$

圓心 $(1,\ 1)$ 為 AB 的中點。

故此，B 在 $(-1,\ -3)$。

15. $\boxed{\text{E}}$

連接 $(5,\ 2)$ 與圓心的線段的斜率 $= \dfrac{3-2}{4-5} = -1$

所求方程為

$$y-2 = 1(x-5)$$

$$x-y-3 = 0$$

16. $\boxed{\text{A}}$ (48%)

圓心 $(2,\ -3)$

斜率 $= \dfrac{-3-2}{2-1} = -5$

17. $\boxed{\text{E}}$

代 $x = 0$ 至方程中。

I. ✗。

$$(0-h)^2 + (y-k)^2 = k^2$$
$$(y-k)^2 = k^2 - h^2$$
$$y - k = \pm\sqrt{k^2 - h^2}$$

由於 $k^2 - h^2 < 0$，該等式沒有實根。它與 y 軸不相交。

II. ✓。

$$(0-h)^2 + (y-k)^2 = h^2$$
$$(y-k)^2 = 0$$
$$y = k$$

與 y 軸相交於 $(0,\ k)$。

III. ✓。

$$(0-h)^2 + (y-k)^2 = h^2 + k^2$$
$$(y-k)^2 = k^2$$
$$y - k = \pm k$$
$$y = 0 \quad \text{或} \quad 2k$$

與 y 軸相交於 $(0,\ 0)$ 及 $(0,\ 2k)$。

18. $\boxed{\text{B}}$

$$x^2 + 0^2 - 2x - 7(0) - 8 = 0$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x = 4 \quad \text{或} \quad -2$$

$AB = 4 + 2 = 6$

19. $\boxed{\text{B}}$ (43%)

$(x-4)^4 + 0^2 = 36$ 及 $(0-4)^2 + y^2 = 36$

$x = 10$ 或 -2 $y = \pm 2\sqrt{5}$

因此，$A\ (10,\ 0)$ 及 $B\left(0,\ 2\sqrt{5}\right)$。

$AB = \sqrt{10^2 + (2\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{30}$

20. $\boxed{\text{B}}$ (49%)

$(x+3)^2 + (0-4)^2 = 25$ 及 $(0+3)^2 + (y-4)^2 = 25$

$x = 0$ 或 8 $y = -6$ 或 0

因此，$OC = 8$ 及 $OA = 6$。

長方形面積 $= 8(6) = 48$

21. $\boxed{\text{A}}$ (38%)

$x^2 + 0 - 16x - 0 = 0$ 及 $0 + y^2 - 0 - 12y = 0$

$x = 0$ 或 16 $y = 0$ 或 12

$A\,(16,\ 0)$ 及 $B\,(0,\ 12)$。AB 的方程為

$$y = \frac{12-0}{0-16}x + 12$$

$$3x + 4y - 48 = 0$$

22. $\boxed{\text{B}}$

兩圓的半徑為 2 及 3。

AB 垂直於連接圓心及切點的半徑。

$AB = 2\sqrt{3^2 - 2^2} = 2\sqrt{5}$

23. $\boxed{\text{B}}$

直線通過圓的圓心。

$$1 = m(2) + 3$$

$$m = -1$$

24. $\boxed{\text{D}}$ (31%)

該直線通過圓心 $\left(-1,\ \dfrac{k}{2}\right)$。

$$-1 + \frac{k}{2} - 3 = 0$$

$$k = 8$$

25. $\boxed{\text{E}}$

$1^2 + 3^2 + 4(1) + k(3) + 4 = 0$

$k = -6$

半徑 $= \sqrt{2^2 + 3^2 - 4} = 3$

26. $\boxed{\text{B}}$

$\dfrac{k}{-2} + \dfrac{k+1}{-2} + 1 = 0$

$k = \dfrac{1}{2}$

27. $\boxed{\text{C}}$ (59%)

$2^2 + 3^2 - 2a - 6(3) - 3 = 0$

$a = -4$

半徑 $= \sqrt{2^2 + 3^2 + 3} = 4$

面積 $= 4^2\pi = 16\pi$

28. $\boxed{\text{D}}$

設 $A\,(a,\ 0)$ 及 $B\,(0,\ b)$。將每個句子中的點記為 P。

I. ✗。$AP^2 + BP^2 = (4a^2 + b^2) + (a^2 + 4b^2) = 5(a^2 + b^2) \neq a^2 + b^2 = AB^2$。
所以，$\angle APB$ 不是直角，而 P 不在圓上。

II. ✓。AP 平行於 x 軸，而 BP 平行於 y 軸。
$\angle APB = 90°$，故此 P 在圓上。

III. ✓。AP 平行於 y 軸，而 BP 平行於 x 軸。
$\angle APB = 90°$，故此 P 在圓上。

29. $\boxed{\text{D}}$

圓心的距離 $= \sqrt{(5-2)^2 + (2+2)^2} = 5 = 3 + 2$
兩圓外切。

30. $\boxed{\text{C}}$

圓心：$(-1,\ -1)$ 及 $(11,\ 8)$；半徑：5 及 10。
P 內分連接圓心的線段，比例為 $5 : 10 = 1 : 2$。
P 的 x 坐標 $= \dfrac{1(11) + 2(-1)}{1 + 2} = 3$

31. $\boxed{\text{D}}$

切點為 $(1,\ 0)$ 及 $(0,\ 1)$。

I. ✓。圓心在 $(1,\ 1)$。

II. ✓。$(1,\ 1)$ 滿足方程 $x - y = 0$。

III. ✗。$(1,\ 1)$ 不滿足 $x + y = 1$。

32. $\boxed{\text{E}}$

I. ✗。圓心為 $(2,\ 3)$ 及 $(-2,\ -3)$。

II. ✓。兩半徑均為 $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$。

III. ✓。$(0,\ 0)$ 滿足兩方程。

33. $\boxed{\text{D}}$

I. ✗。圓心在 $(2,\ -3)$。

II. ✓。半徑 $= \sqrt{2^2 + 3^2 + 3} = 4$

III. ✓。$0^2 + 0^2 - 4(0) + 6(0) - 3 = -3 < 0$。原點在圓內。

34. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。C 為 AB 的中點。C 的坐標為 $(3, 4)$。
$(3, 4)$ 滿足方程 $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$。
C 在直線上。

II. ✗。由於 $\angle AOB = 90°$，AB 為直徑。
半徑 $= \frac{1}{2}(AB) = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+8^2} = 5$

III. ✗。CO 的斜率 $= \frac{4}{3}$，AB 的斜率 $= \frac{-4}{3}$。
斜率之積 $= \frac{-16}{9} \neq -1$
因此，OC 不垂直於 AB。

35. $\boxed{\text{D}}$ (33%)

I. ✓。

II. ✓。$(0, 0)$ 滿足方程。

III. ✓。代 $y = 0$，

$$(x+a)^2+b^2 = a^2+b^2$$
$$(x+a)^2 = a^2$$
$$x = -2a \quad \text{或} \quad 0$$

該圓與 x 軸相交於兩相異點，$(-2a, 0)$ 及 $(0, 0)$。

36. $\boxed{\text{C}}$ (48%)

I. ✓。代 $x = 0$，

$$y^2+2y+1 = 0$$
$$y = -1$$

II. ✓。$0^2+0^2-4(0)+2(0)+1 = 1 > 0$
原點在圓外。

III. ✗。圓心 $(2, -1)$ 在第四象限。

37. $\boxed{\text{D}}$ (39%)

I. ✓。

II. ✓。半徑 $= \sqrt{2^2+4^2-11} = 3$。

III. ✓。$0^2+0^2-4(0)-8(0)+11 = 11 > 0$。原點在圓外。

38. $\boxed{\text{B}}$

x 截距 $= 4 \pm \dfrac{6}{2} = 1$ 或 7
圓的方程為

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = (1-4)^2 + (0-5)^2$$
$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 34$$

39. $\boxed{\text{A}}$

與 x 軸的切點在 $(a,\ 0)$。該方程為

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (a-a)^2 + (0-b)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$$

40. $\boxed{\text{C}}$ (56%)

圓的半徑 $= \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{8}{2}\right)^2} = 5$。所求方程為

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$$

41. $\boxed{\text{C}}$ (52%)

半徑 $= 3$。所求方程為

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$
$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$$

42. $\boxed{\text{D}}$ (44%)

$\dfrac{PQ}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$。圓的 x 截距為 -5 ± 3，即 -8 及 -2。
該圓的方程為

$$(x+5)^2 + (y-2)^2 = (-8+5)^2 + (0-2)^2$$
$$x^2 + y^2 + 10x - 4y + 16 = 0$$

43. $\boxed{\text{E}}$

圓心為 $(-4,\ 0)$ 與 $(0,\ 2)$ 的中點，即 $(-2,\ 1)$。
所求方程為

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = (0+2)^2 + (0-1)^2$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$$

44. $\boxed{\text{A}}$

圓心為 AB 的中點，即 $(1,\ -1)$。
圓方程為

$$(x-1)^2+(y+1)^2=(-2-1)^2+(3+1)^2$$
$$x^2+y^2-2x+2y-23=0$$

45. $\boxed{\text{B}}$ (41%)

半徑為 a，圓心在 $(a,\ 0)$。
圓方程為

$$(x-a)^2+y^2=a^2$$
$$x^2+y^2-2ax=0$$

46. $\boxed{\text{A}}$ (42%)

圓心的 y 坐標 $=\dfrac{2+8}{2}=5$。圓的半徑為 5。
設圓心的坐標為 $(h,\ 5)$。

$$\sqrt{h^2+(8-5)^2}=5$$
$$h=4 \quad 或 \quad -4（捨去）$$

圓的方程為

$$(x-4)^2+(y-5)^2=5^2$$
$$x^2+y^2-8x-10y+16=0$$

47. $\boxed{\text{C}}$ (38%)

設圓的半徑為 r。圓心在 $(r,\ r)$。
圓心在線段 AB 上。

$$\frac{0-r}{21-r}=\frac{r-28}{r-0}$$
$$-r^2=(21-r)(r-28)$$
$$r=12$$

圓的方程為

$$(x-12)^2+(y-12)^2=12^2$$
$$x^2+y^2-24x-24y+144=0$$

48. $\boxed{\text{B}}$ (37%)

設圓心為 $(0,\ k)$。該圓與 x 軸相切於 $(0,\ 0)$。
圓心 $(0,\ k)$ 與 $(-3,\ 1)$ 及 $(0,\ 0)$ 等距。

$$\sqrt{3^2 + (k-1)^2} = \sqrt{k^2}$$
$$k^2 - 2k + 10 = k^2$$
$$k = 5$$

C 的方程為

$$x^2 + (y-5)^2 = 5^2$$
$$x^2 + y^2 - 10y = 0$$

– 試卷完 –