結構式試題

1. (a) C 的半徑 $= 10$ 1M

C 的方程為 $(x-6)^2+(y-10)^2=100$。 1A

(b) L 的方程為 $y=-x+k$。 1M

$$(x-6)^2+(-x+k-10)^2=100 \quad \text{1M}$$

$$x^2-12x+36+x^2+k^2+100-2xk+20x-20k=100$$

$$2x^2+(8-2k)x+(k^2-20k+36)=0$$

AB 的中點的 x 坐標

$=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{8-2k}{2}\right)$ 1M

$=\dfrac{k-4}{2}$ 1A

AB 的中點的 y 坐標

$=-\dfrac{k-4}{2}+k$

$=\dfrac{k+4}{2}$ 1A

AB 的中點的坐標為 $\left(\dfrac{k-4}{2},\ \dfrac{k+4}{2}\right)$。

2. (a) 可得 $p+5p=-a$ 及 $p(5p)=b$。 1M

$$5\left(\frac{-a}{6}\right)^2=b$$

$$5a^2=36b \quad \text{1}$$

(b) $x^2+(mx)^2-6x-12(mx)+20=0$ 1M

$$(1+m^2)x^2-(6+12m)x+20=0$$

$$x^2-\frac{6+12m}{1+m^2}+\frac{20}{1+m^2}=0$$

設 Q 的 x 坐標為 α。

R 的 x 坐標為 $\alpha(1+4)=5\alpha$。

留意 α 及 5α 均為方程 $x^2-\dfrac{6+12m}{1+m^2}+\dfrac{20}{1+m^2}=0$ 的根。

利用 (a) 的結果，

$$5\left(-\frac{6+12m}{1+m^2}\right)^2=36\left(\frac{20}{1+m^2}\right) \quad \text{1M}$$

$$5(1+2m)^2=20(1+m^2)$$

$$20m-15=0$$

$$m=\frac{3}{4} \quad \text{1A}$$

3. (a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 12x - 121$

$= -\frac{1}{3}\left[x^2 - 2(18)(x) + 18^2\right] - 13$ 1M

$= -\frac{1}{3}(x-18)^2 - 13$

頂點的坐標為 $(18,\ -13)$。 1A

(b) $g(x) = f(x) + 13$ 1M

$= -\frac{1}{3}(x-18)^2$ 1A

(c) 留意 $-\frac{1}{3}x^2 - 12x - 121 = f(-x)$。

因此，該變換為沿 y 軸反射。 1A+1A

4. (a) $g(x) = 3x^2 + 12kx + 16k^2 + 8$

$= 3[x^2 + 2(2k)x + (2k)^2] + 4k^2 + 8$ 1M

$= 3(x+2k)^2 + 4k^2 + 8$

所求坐標為 $\left(-2k,\ 4k^2+8\right)$。 1A

(b) $A\left(-2k,\ 4k^2+8\right)$ 及 $B\left(2k,\ 8k^2+16\right)$ 1A

$\frac{BM}{AM} = \frac{\triangle OBM \text{ 的面積}}{\triangle OAM \text{ 的面積}} = 3$ 1M

M 的坐標 $= \left(\frac{3(-2k)+(2k)}{3+1},\ \frac{3(4k^2+8)+(8k^2+16)}{3+1}\right)$

$= \left(-k,\ 5k^2+10\right)$ 1A

5. (a) $f(4)=\dfrac{1}{1+k}\left(4^2+(6k-2)4+(9k+25)\right)$

$=\dfrac{1}{1+k}(33k+33)$

$=33$

因此，該圖像通過 F。 1

(b) (i) $g(x)=f(-x)+4$ 1M

$=\dfrac{1}{1+k}\left(x^2-(6k-2)x+(9k+25)\right)+4$

$=\dfrac{1}{1+k}\left([x-(3k-1)]^2-(3k-1)^2+(9k+25)+4(1+k)\right)$ 1M

$=\dfrac{1}{1+k}\left([x-(3k-1)]^2-9k^2+19k+28\right)$

$=\dfrac{1}{1+k}[x-(3k-1)]^2+28-9k$ 1M

U 的坐標為 $(3k-1,\ 28-9k)$。 1A

(ii) 由於 O 及 F 為固定，圓的面積在當 OF 為直徑時最小。 1M

故此，$OU\perp FU$ 及

$\dfrac{28-9k}{3k-1}\times\dfrac{(28-9k)-33}{(3k-1)-4}=-1$ 1M+1A

$(28-9k)(9k+5)=(3k-1)(3k-5)$

$-90k^2+225k+135=0$

$k=3$ 或 $-\dfrac{1}{2}$（捨去） 1A

故此，U 在圖上及所求的 k 值為 3。

(iii) G 為 F 在變換後的像，其坐標為 $(-4,\ 37)$。 1A

利用 (b)(ii)，OF 為圓的直徑及 $\angle OVF=90^\circ$。

OG 的斜率 $\times GF$ 的斜率 $=\dfrac{37}{-4}\times\dfrac{37-33}{-4-4}=\dfrac{37}{8}\neq-1$ 1M

故此 $\angle OGF\neq 90^\circ$ 及由此 $\angle OGF+\angle OVF=\angle OGF+90^\circ\neq 180^\circ$，

該四點不共圓。 1A

6. (a) Q 為 PR 的中點。

R 的坐標為 $(14,\ 2t)$。 1M

G 的 x 坐標 $= \dfrac{0+50}{2} = 25$ 1M

設 G 的坐標為 $(25,\ g)$。

$$\sqrt{25^2+g^2} = \sqrt{(25-14)^2+(g-2t)^2} \qquad \text{1M}$$

$$625+g^2 = 121+g^2-4gt+4t^2$$

$$4gt = 4t^2-504$$

$$g = \frac{t^2-126}{t}$$

G 的坐標為 $\left(25,\ \dfrac{t^2-126}{t}\right)$。 1A

設 H 的坐標為 $(14,\ h)$。

$$\frac{h-0}{14-0} \times \frac{2t-0}{14-50} = -1$$

$$h = \frac{252}{t}$$

H 的坐標為 $\left(14,\ \dfrac{252}{t}\right)$。 1A

(b) (i) S 的坐標為 $(32,\ 0)$。

$$\tan\angle PQS = \tan\angle POQ$$

$$\frac{50-32}{t} = \frac{t-0}{32-0} \qquad \text{1M}$$

$$t^2 = 576$$

$$t = 24 \quad 或 \quad -24（捨去） \qquad 1$$

(ii) G 及 H 的坐標分別為 $\left(25,\ \dfrac{75}{4}\right)$ 及 $\left(14,\ \dfrac{21}{2}\right)$。 1M

OQ 的斜率 $= \dfrac{24-0}{32-0} = \dfrac{3}{4}$

OG 的斜率 $= \dfrac{\frac{75}{4}-0}{25-0} = \dfrac{3}{4}$

可得 $OQ // OG$。

因此，O、G 與 Q 共線。 1A

(iii) 留意 $\triangle OPQ \cong \triangle ORQ$，且 I 在 OQ 上。

設內切圓的半徑為 r。

可得 $OR = OP = 50$ 及 $PR = \sqrt{(50-14)^2+(48-0)^2} = 60$。

考慮 $\triangle OPR$ 的面積。

$$\frac{(50)(48)}{2} = \frac{50r}{2} + \frac{50r}{2} + \frac{60r}{2} \qquad \text{1M}$$

$$r = 15$$

$$GH = \sqrt{(25-14)^2+\left(\frac{75}{4}-\frac{21}{2}\right)^2} = \frac{55}{4}$$

所求之比 $= \dfrac{(GH)(QR)}{2} : \dfrac{r(PQ)}{2}$ 1M

$= GH : r$

$= 11 : 12$ 1A

7. (a) $\Delta = (-4k)^2 - 4(2)(3k^2 + 5)$ 1M

$= 16k^2 - 24k^2 - 40$

$= -8k^2 - 40$

< 0

因此，$y = f(x)$ 的圖像與 x 軸不相交。 1A

(b) $f(x) = 2x^2 - 4kx + 3k^2 + 5$

$= 2(x^2 - 2kx + k^2) + k^2 + 5$ 1M

$= 2(x - k)^2 + k^2 + 5$ 1A

頂點的坐標為 $\left(k,\ k^2 + 5\right)$。 1M

(c) $y = 2 - f(x)$ 的圖像的頂點的坐標為 $\left(k,\ -k^2 - 3\right)$。 1M

當 S 與 T 最接近時，S 及 T 的坐標分別為 $\left(k,\ k^2 + 5\right)$ 及 $\left(k,\ -k^2 - 3\right)$。

此時，ST 為一鉛垂直線。 1M

外心在 ST 的垂直平分線上。

外心的 y 坐標 $= \dfrac{(k^2 + 5) + (-k^2 - 3)}{2}$ 1M

$= 1 \neq 0$

故此，$\triangle OST$ 的外心不在 x 軸上。

該宣稱不正確。 1A

8. (a) 設 $f(x)=ax^2+bx$，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} 60 = 4a + 2b \\ 99 = 9a + 3b \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a = 3$ 及 $b = 24$。 1A

因此，$f(x) = 3x^2 + 24x$。

(b) (i) $f(x) = 3x^2 + 24x$

$= 3[x^2 + 2(4)(x) + 4^2] - 48$ 1M

$= 3(x+4)^2 - 48$

Q 的坐標為 $(-4,\ -48)$。 1A

(ii) $(-4,\ 75)$ 1A

(iii) QS 的斜率 $= \dfrac{-48-0}{-4-56} = \dfrac{4}{5}$

RS 的斜率 $= \dfrac{75-0}{-4-56} = -\dfrac{5}{4}$

由於 $\left(-\dfrac{5}{4}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right) = -1$，$QS \perp RS$。 1M

QR 為 $\triangle QRS$ 的外接圓的直徑。

因此，P 為 QR 的中點，三點共線。 1A

9. (a) $g(x) = x^2 - 2kx + 2k^2 + 4$

$= (x^2 - 2kx + k^2) + k^2 + 4$ 1M

$= (x-k)^2 + k^2 + 4$

頂點的坐標為 $\left(k,\ k^2+4\right)$。 1A

(b) D 及 E 的坐標分別為 $\left(k-2,\ k^2+4\right)$ 及 $\left(k+2,\ -k^2-4\right)$。 1A

假定 $(0,\ 3)$ 為 $\triangle DEF$ 的外心。

$$\sqrt{(k-2)^2 + (k^2+4-3)^2} = \sqrt{(k+2)^2 + (-k^2-4-3)^2}$$ 1M

$$(k-2)^2 - (k+2)^2 = (k^2+7)^2 - (k^2+1)^2$$

$$-8k = 12k^2 + 48$$

$$0 = 12k^2 + 8k + 48$$

$\Delta = 8^2 - 4(12)(48) = -2240 < 0$ 1M

該方程沒有實根。$(0,\ 3)$ 不可能為外心。

點 F 不存在。 1A

10. (a) $f(x) = x^2 - (12k+14)x + 36k^2 + 89k + 53$

$= [x^2 - 2(6k+7)x + (6k+7)^2] + 5k + 4$ 1M

$= [x - (6k+7)]^2 + 5k + 4$

因此，Q 的坐標為 $(6k+7,\ 5k+4)$。 1A

(b) $(-6k+7,\ 5k+4)$ 1A

(c) (i) QS 的斜率 $= \dfrac{5k+4-(4-3k)}{6k+7-7} = \dfrac{4}{3}$ 1M

所求方程為

$$y - (4-3k) = \frac{4}{3}(x-7)$$

$$4x - 3y - 9k - 16 = 0$$ 1A

(ii) RS 的斜率 $= \dfrac{5k+4-(4-3k)}{-6k+7-7} = -\dfrac{4}{3}$

因此，$\angle QRS = \angle RQS$ 及 $\triangle QRS$ 等腰。

$\triangle QRS$ 的內心在 $\angle QSR$ 的角平分線上，即 $x = 7$。 1M

$QS = RS = \sqrt{(6k)^2 + (5k+3k)^2} = 10k$ 及 $QR = (6k+7) - (-6k+7) = 12k$。

設 C 的半徑為 r。藉考慮 $\triangle QRS$ 的面積，

$$\frac{(QR+RS+QS)r}{2} = \frac{(12k)((5k+4)-(4-3k))}{2}$$ 1M

$$16kr = 48k^2$$

$r = 3k$ 或 $k = 0$（捨去） 1A

C 的方程為

$$(x-7)^2 + [y - (5k+4-3k)]^2 = (3k)^2$$

$$(x-7)^2 + (y-2k-4)^2 = 9k^2$$ 1A

(iii) $\angle STU = 90°$ 及 $U\,(7,\ 2k+4)$。若 $STUV$ 為長方形，則 $UV \perp VS$。

$$\frac{(2k+4)+14}{7+29} \times \frac{4-3k+14}{7+29} = -1$$ 1M

$$-6k^2 - 18k + 324 = -1296$$

$$-6k^2 - 18k + 1620 = 0$$

$k = 15$ 或 -18（捨去） 1A

當 $k = 15$ 時，$U\,(7,\ 34)$ 及 UT 的斜率 $= -1 \div \dfrac{4}{3} = -\dfrac{3}{4}$。

$(UV$ 的斜率$) \times (UT$ 的斜率$)$

$= \dfrac{34+14}{7+29} \times \dfrac{-3}{4}$

$= -1$

故此，$\angle STU = \angle UVS = \angle TUV = 90°$ 及 $\angle VST = 360° - 90° \times 3 = 90°$。

因此，$STUV$ 有可能為長方形。 1A

11. (a) $\angle JPO = \angle JPQ$ （內心性質）

$JP = JP$ （公共邊）

$JO = JP$ （半徑）

$JQ = JP$ （半徑）

$\angle JOP = \angle JPO$ （等腰 △ 底角）

$\angle JQP = \angle JPQ$ （等腰 △ 底角）

$= \angle JOP$

$\triangle JPO \cong \triangle JPQ$ （AAS）

$OP = PQ$ （全等 △ 的對應邊）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) (i) 設 $(h,\ 19)$ 為 P 的坐標。

$$h^2 + 19^2 = (40 - h)^2 + (30 - 19)^2$$ 1M

$$h = 17$$

設 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 為 C 的方程，其中 D、E 及 F 均為常數。

$$\begin{cases} F = 0 \\ 17D + 19E + F + 650 = 0 \\ 40D + 30E + F + 2500 = 0 \end{cases}$$ 1A 1M

求解後，可得 $D = -112$ 及 $E = 66$。 1A

因此，C 的方程為 $x^2 + y^2 - 112x + 66y = 0$。

(ii) L_1 及 L_2 的方程均為 $y = \dfrac{3}{4}x + k$ 的形式，其中 k 為一常數。

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x + k\right)^2 - 112x + 66\left(\frac{3}{4}x + k\right) = 0$$ 1M

$$\frac{25}{16}x^2 + \left(\frac{3}{2}k - \frac{125}{2}\right)x + (k^2 + 66k) = 0$$

由於 L_1 及 L_2 均為 C 的切線，

$$\left(\frac{3}{2}k - \frac{125}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{25}{16}\right)(k^2 + 66k) = 0$$ 1M

$$-4k^2 - 600k + \frac{15\,625}{4} = 0$$

$$k = \frac{25}{4} \quad 或 \quad -\frac{625}{4}$$

故此，L_1 及 L_2 的方程分別為 $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{25}{4}$ 及 $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{625}{4}$。 1M

所以，$S = \left(-\dfrac{25}{3},\ 0\right)$、$T = \left(0,\ \dfrac{25}{4}\right)$、$U = \left(\dfrac{625}{3},\ 0\right)$ 及 $V = \left(0,\ -\dfrac{625}{4}\right)$。

梯形 $STUV$ 的面積

$= \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{625}{3}\right)\left(\dfrac{625}{4}\right)+\left(\dfrac{625}{4}\right)\left(\dfrac{25}{3}\right)+\left(\dfrac{25}{3}\right)\left(\dfrac{25}{4}\right)+\left(\dfrac{25}{4}\right)\left(\dfrac{625}{3}\right)\right]$ 1M

$\approx 17\,604.166\,67 > 17\,000$

該宣稱為正確。 1A

12. (a) C 的方程為 $(x-8)^2+(y-2)^2=r^2$。 1A

代 L：$y=0.2kx-4.2$ 至 C，

$$(x-8)^2+(0.2kx-4.2-2)^2=r^2$$ 1M

$$(1+0.04k^2)x^2+(-16-2.48k)x+(64+38.44-r^2)=0$$

由於 L 為 C 的切線，

$$0=(-16-2.48k)^2-4(1+0.04k^2)(102.44-r^2)$$ 1M

$$\frac{(16+2.48k)^2}{4(1+0.04k^2)}=102.44-r^2$$

$$r^2=\frac{102.44(1+0.04k^2)-(8+1.24k)^2}{1+0.04k^2}$$

$$=\frac{2.56k^2-19.84k+38.44}{1+0.04k^2}$$

$$=\frac{64k^2-496k+961}{25+k^2}$$ 1A

$$=\frac{(8k-31)^2}{25+k^2}$$

(b) (i) $k(18)-5(39)-21=0$ 1M

$$k=12$$

$r=\sqrt{\dfrac{(96-31)^2}{25+12^2}}=5$ 1A

(ii) E 的坐標為 $(0,\ -4.2)$。 1A

設圓心為 R。

$RE=\sqrt{8^2+(-4.2-2)^2}=\sqrt{102.44}$ 及 $RD=\sqrt{(18-8)^2+(39-2)^2}=\sqrt{1469}$ 1M

留意 RE 及 RD 分別為 $\angle DEF$ 及 $\angle EDF$ 的角平分線。

$\angle DEF=2\angle RED=2\sin^{-1}\dfrac{5}{\sqrt{102.44}}\approx 59.2°$ 1M+1M

$\angle EDF=2\sin^{-1}\dfrac{5}{\sqrt{1469}}\approx 15.0°$

故此，$\angle DFE=180°-\angle DEF-\angle EDF\approx 106°>90°$。 1M

因此，$\triangle DEF$ 為鈍角三角形。 1A

13. (a) AG 的斜率 $= \dfrac{112-12}{83-158} = \dfrac{-4}{3}$

所求方程為

$$y-12 = \frac{-4}{3}(x-158) \qquad \text{1M}$$

$$4x+3y-668=0 \qquad \text{1A}$$

(b) $GP = \sqrt{(83-23)^2+(112-67)^2} = 75$

$AG = \sqrt{(158-83)^2+(112-12)^2} = 125$

$AP = \sqrt{125^2-75^2} = 100$

將 AG 與 PQ 的交點記為 T。

留意 $\triangle AGP \sim \triangle APT$。

$$\frac{AT}{AP} = \frac{AP}{AG} \qquad \text{1M}$$

$$AT = 80$$

$AT : TG = 80 : (125-80) = 16 : 9$

所求坐標 $= \left(\dfrac{16(83)+9(158)}{16+9},\ \dfrac{16(112)+9(12)}{16+9}\right)$ 1M

$= (110,\ 76)$ 1A

(c) 將 $\triangle APQ$ 的內心及內切圓的半徑分別記為 S 及 r。

假定 AP 與該內切圓相切於 U。

留意 $\triangle AUS \sim \triangle APG$。

$$\frac{AS}{US} = \frac{AG}{PG}$$

$$\frac{80-r}{r} = \frac{125}{75} \qquad \text{1M}$$

$$r = 30 \qquad \text{1A}$$

$AS : ST = (80-30) : 30 = 5 : 3$

S 的坐標 $= \left(\dfrac{5(110)+3(158)}{5+3},\ \dfrac{5(76)+3(12)}{5+3}\right)$ 1M

$= (128,\ 52)$

所求方程為

$$(x-128)^2+(y-52)^2 = 30^2$$

$$(x-128)^2+(y-52)^2 = 900 \qquad \text{1A}$$

(d) 留意 A、P、G、Q 共圓。

$\triangle APQ$ 的外接圓的半徑 $= \dfrac{AG}{2} = \dfrac{125}{2}$ 1M

所求比例 $= 30^2 : \left(\dfrac{125}{2}\right)^2$ 1M

$= 144 : 625 \neq 1 : 4$

不同意該宣稱。 1A