結構式試題

1. (a) $f(x) = 36x - x^2$

$= -[x^2 - 2(18)(x) + 18^2] + 324$ 1M

$= -(x - 18)^2 + 324$

頂點的坐標為 (18, 324)。 1A

(b) (i) $A = x\left(\dfrac{108 - 3x}{2}\right)$ 1M+1A

$= 54x - \dfrac{3}{2}x^2$

(ii) $A = \dfrac{3}{2}(36x - x^2)$

$= -\dfrac{3}{2}(x - 18)^2 + 486$

最大面積 $= 486\ \mathrm{m}^2 < 500\ \mathrm{m}^2$。 1M

不同意該宣稱。 1A

2. $\log_8 y - 0 = -\dfrac{1}{3}(\log_4 x - 3)$ 1M

$\dfrac{\log y}{3\log 2} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\log x}{2\log 2} + 1$ 1M

$\log y = -\dfrac{1}{2}\log x + 3\log 2$

$\log y = \log\left(2^3 x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$y = 8x^{-\frac{1}{2}}$ 1A

3. 從題目可得

$$\begin{cases} 0 = a + \log_b 9 \\ 3 = a + \log_b 243 \end{cases}$$ 1M

$$3 = (-\log_b 9) + \log_b 243$$ 1M

$$3 = \log_b 27$$

$$b^3 = 27$$ 1M

$$b = 3$$

當 $b = 3$ 時，

$$0 = a + \log_3 9$$

$$a = -2$$

故此，

$$y = -2 + \log_3 x$$

$$\log_3 x = y + 2$$

$$x = 3^{y+2}$$

$$= 9(3)^y$$ 1A

4. (a) 設公差為 d。

$$666 + d(38 - 1) = 555$$ 1M

$$37d = -111$$

$$d = -3$$

該數列的公差為 -3。 1A

(b) $$\frac{[666 + 666 - 3(n - 1)]n}{2} > 0$$ 1M+1A

$$-\frac{3n^2}{2} + \frac{1335n}{2} > 0$$

$$\frac{3n}{2}(-n + 445) > 0$$

$$0 < n < 445$$

n 的最大值為 444。 1A

5. (a) $\alpha + \beta = -c$ 及 $\alpha\beta = -9$ 1A

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \quad \text{1M}$$
$$= c^2 + 18 \quad \text{1A}$$

(b) 公差 $= (\alpha^2 + \beta^2) - c^2 = 18$ 1M

首項 $= 85 - 2(18) = 49$

$$49 + 67 + 85 + \ldots + [49 + 18(n-1)] > 2 \times 10^6$$
$$\frac{n}{2}[49 + (18n + 31)] > 2 \times 10^6 \quad \text{1M}$$
$$9n^2 + 40n - 2 \times 10^6 > 0$$
$$n < -473.6 \text{（捨去）} \quad \text{或} \quad n > 469.2 \quad \text{1M}$$

n 的最小值為 470。 1A

6. (a) $A(1) = 4 - 5 = -1$ 及 $A(2) = 3$。

$$A(1) + A(2) + A(3) + \ldots + A(n) = \frac{[-1 + (4n-5)]n}{2} \quad \text{1M}$$
$$= 2n^2 - 3n \quad \text{1A}$$

(b)
$$\log(B(1)B(2)B(3)\ldots B(n)) \le 8000$$
$$\log B(1) + \log B(2) + \log B(3) + \ldots + \log B(n) \le 8000$$
$$A(1) + A(2) + A(3) + \ldots + A(n) \le 8000 \quad \text{1M}$$
$$2n^2 - 3n \le 8000$$
$$2n^2 - 3n - 8000 \le 0$$
$$-62.5 \le n \le 64 \quad \text{1A}$$

n 的最大值為 64。 1A

7. (a) $5\alpha - 18 = \alpha^2 - 13\alpha + 63$ 1M

$0 = \alpha^2 - 18\alpha + 81$

$\alpha = 9$

當 $\alpha = 9$ 時，$\beta = 5(9) - 18 = 27$。 1A

因此，$\alpha = 9$ 及 $\beta = 27$。

(b) $T(1) = \log 9 = 2\log 3$ 及 $T(2) = \log 27 = 3\log 3$。 1M

$\frac{n}{2}[2\log 9 + (n-1)(\log 27 - \log 9)] > 888$ 1A

$\frac{n}{2}(4\log 3 + (n-1)\log 3) > 888$

$(\log 3)n^2 + (3\log 3)n - 1776 > 0$

$n < -62.5$ (捨去) 或 $n > 59.5$ 1M

n 的最小值為 60。 1A

8. (a) 公差 $= \frac{61-26}{12-5}$

$= 5$ 1A

$A(1) = 26 - 4(5) = 6$ 1A

(b) $\log_8(G(1)G(2)G(3)\ldots G(k)) < 999$

$\frac{\log_2 G(1) + \log_2 G(2) + \ldots + \log_2 G(k)}{\log_2 8} < 999$ 1M

$A(1) + A(2) + \ldots + A(k) < 2997$ 1M

$\frac{k}{2}[2(6) + (k-1)(5)] < 2997$ 1M

$\frac{5k^2}{2} + \frac{7k}{2} - 2997 < 0$

$-35.3 < k < 33.9$ 1A

k 的最大值為 33。 1A

9. 首 n 個圖案的點子數目 $= \frac{m}{2}[3+3+2(m-1)]$ 1M+1A

$= m^2 + 2m$

$m^2 + 2m > 6888$ 1M

$m^2 + 2m - 6888 > 0$

$m < -84$ (捨去) 或 $m > 82$

m 的最小值為 83。 1A

10. (a) $\frac{7}{\alpha} = \frac{\beta}{7}$ 1M

$\alpha = \frac{49}{\beta}$

$\log_7 \alpha = \log_7 49 - \log_7 \beta$ 1M

$= 2 - \log_7 \beta$ 1A

(b) $\log_7 \beta - \log_\beta \alpha = \log_\alpha \beta - \log_7 \beta$ 1M

$2\log_7 \beta - \frac{\log_7 \alpha}{\log_7 \beta} = \frac{\log_7 \beta}{\log_7 \alpha}$ 1M

設 $u = \log_7 \beta$。

$2u - \frac{2-u}{u} = \frac{u}{2-u}$ 1M

$2u^2(2-u) - (2-u)^2 = u^2$

$-2u^3 + 2u^2 + 4u - 4 = 0$

$-2(u-1)(u^2-2) = 0$

$u = 1$（捨去） 或 $-\sqrt{2}$（捨去） 或 $\sqrt{2}$

所求公差

$= \log_7 \beta - \log_\beta \alpha$

$= \log_7 \beta - \frac{\log_7 \alpha}{\log_7 \beta}$

$= \sqrt{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 1M

$= 1$ 1A

11. (a) 公比 $= \dfrac{864}{720} = 1.2$。
設首項為 a。

$$a(1.2)^2 = 720 \qquad \text{1M}$$
$$a = 500 \qquad \text{1A}$$

首項為 500。

(b) $500(1.2)^n + 500(1.2)^{2n} < 5 \times 10^{14}$ 1M

$$1.2^{2n} + 1.2^n - 1 \times 10^{12} < 0$$
$$-1\,000\,000.5 < 1.2^n < 999\,999.5$$

由於 n 為正整數，

$$0 < 1.2^n < 999\,999.5$$
$$n \log 1.2 < \log 999\,999.5 \qquad \text{1M}$$
$$n < 75.8$$

n 的最大值為 75。1A

12. (a) 設 a 及 r 分別為首項及公比。

$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{486}{144} \qquad \text{1M}$$
$$r^3 = \frac{27}{8}$$
$$r = \frac{3}{2}$$

首項 $= a = 144 \div \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 64$。 1A

(b) $64 + 96 + \ldots + 64(1.5)^{n-1} > 8 \times 10^{18}$

$$\frac{64(1.5^n - 1)}{1.5 - 1} > 8 \times 10^{18} \qquad \text{1M}$$
$$1.5^n > 6.25 \times 10^{16} + 1$$
$$n \log 1.5 > \log\left(6.25 \times 10^{16} + 1\right) \qquad \text{1M}$$
$$n > 95.4$$

n 的最小值為 96。 1A

13. (a) 總輸入的食水量

$= 1.5 \times 10^7 + 1.5 \times 10^7(1 - 10\%) + 1.5 \times 10^7(1 - 10\%)^2 + \ldots + 1.5 \times 10^7(1 - 10\%)^{19}$

$= \dfrac{1.5 \times 10^7(1 - 0.9^{20})}{1 - 0.9}$ 1M

$= 1.32 \times 10^8 \text{ m}^3$ 1A

(b) 總輸入的食水量

$< 1.5 \times 10^7 + 1.5 \times 10^7(0.9) + \ldots$

$= \dfrac{1.5 \times 10^7}{1 - 0.9}$ 1M

$= 1.5 \times 10^8 \text{ m}^3$

$< 1.6 \times 10^8 \text{ m}^3$

因此，同意該宣稱。 1A

14. (a) (i) 可得 $ab^2 = 254\,100$ 及 $ab^4 = 307\,461$。 1M

$$\frac{ab^4}{ab^2} = \frac{307\,461}{254\,100}$$

$$b^2 = 1.21$$

$$b = 1.1 \quad 或 \quad -1.1\text{（捨去）}$$ 1A

當 $b = 1.1$ 時，$a = \dfrac{254\,100}{1.1^2} = 210\,000$。 1A

所求重量 $= (210\,000)(1.1^{2\times4}) = 450\,153.6501$。 1A

(ii) 總重量 $= ab^2 + ab^4 + ab^6 + \ldots + ab^{2n}$

$$= \frac{ab^2[1-(b^2)^n]}{1-b^2}$$ 1M

$$= 1\,210\,000(1.1^{2n} - 1)$$ 1A

(b) (i) 當 m 為一正整數時，

$$\frac{A(m+4)}{B(m)} = \frac{ab^{2m+8}}{2ab^m}$$ 1M

$$= \frac{b^{m+8}}{2}$$

$$= \frac{1.1^m \cdot 1.1^8}{2}$$

$$> 1.1^m > 1 \quad 當\ m > 0\ 時$$

因此，對所有正整數 m，$A(m+4) > B(m)$。

同意該宣稱。 1A

(ii) 設 n 為自 X 開始運作的年數。

Y 處理的貨物的總重量

$$= 2ab + 2ab^2 + 2ab^3 + \ldots + 2ab^{n-4}$$

$$= \frac{2ab(b^{n-4}-1)}{b-1}\ 公噸，其中 n > 4$$

$$1\,210\,000(1.1^{2n} - 1) + \frac{420\,000(1.1)(1.1^{n-4} - 1)}{1.1 - 1} > 20\,000\,000$$ 1M+1A

$$121(1.1^{2n}) + 462(1.1^{n-4}) - 2583 > 0$$

$$121(1.1^n)^2 + \frac{462}{1.1^4}(1.1^n) - 2583 > 0$$ 1M

$$1.1^n < -6.10\text{（捨去）} \quad 或 \quad 1.1^n > 3.496831134$$

$$n \log 1.1 > \log 3.496831134$$ 1M

$$n > 13.1$$

因此，應在自 X 開始運作的第 14 年安裝新設施。 1A

15. (a) (i) 所求面積 $= 9 \times 10^6(1 + r\%) - 3 \times 10^5\ \mathrm{m}^2$。 1A

(ii) $[9 \times 10^6(1 + r\%) - 3 \times 10^5](1 + r\%) - 3 \times 10^5 = 1.026 \times 10^7$ 1M

$$90(1 + r\%)^2 - 3(1 + r\%) - 105.6 = 0$$ 1M

$$1 + r\% = 1.1 \quad 或 \quad -\frac{16}{15}\ （捨去）$$

$$r = 10$$ 1A

(b) (i) 所求面積

$= 9 \times 10^6(1.1)^{n-1} - 3 \times 10^5(1.1)^{n-2} - 3 \times 10^5(1.1)^{n-3} - 3 \times 10^5(1.1)^{n-4} - \ldots - 3 \times 10^5$ 1M

$= 9 \times 10^6(1.1)^{n-1} - 3 \times 10^5\left(\dfrac{1.1^{n-1} - 1}{1.1 - 1}\right)$ 1M

$= 9 \times 10^6(1.1)^{n-1} - 3 \times 10^6(1.1^{n-1} - 1)$

$= [6(1.1)^{n-1} + 3] \times 10^6\ \mathrm{m}^2$ 1A

(ii) $[6(1.1)^{n-1} + 3] \times 10^6 > 4 \times 10^7$

$$1.1^{n-1} > \frac{37}{6}$$

$$(n - 1)\log 1.1 > \log\frac{37}{6}$$ 1M

$$n > 20.09$$

所有公屋單位的總樓面面積會在第 21 年年終首次超過 $4 \times 10^7\ \mathrm{m}^2$。 1A

(c) 根據題目，

$$\begin{cases} 1.021a + b = 1 \times 10^7 \\ 1.21^2 a + b = 1.062 \times 10^7 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = \dfrac{300}{121} \times 10^6$ 及 $b = 7 \times 10^6$。 1M

$$[6(1.1)^{n-1} + 3] \times 10^6 > \left(\frac{300}{121}(1.21)^n + 7\right) \times 10^6$$

$$-\frac{300}{121}(1.21)^n + 6(1.1)^{n-1} - 4 > 0$$

$$-\frac{300}{121}(1.1^n)^2 + \frac{60}{11}(1.1)^n - 4 > 0$$ 1M

$$\Delta = \left(\frac{60}{11}\right)^2 - 4\left(-\frac{300}{121}\right)(-4) = -\frac{1200}{121} < 0$$

由於 $-\dfrac{300}{121} < 0$，對所有實數 n，$-\dfrac{300}{121}(1.1^n)^2 + \dfrac{60}{11}(1.1)^n - 4 < 0$。

所以，該不等式無解。 1M

該宣稱不正確。 1A

16. 所求數目 $= C_5^{21+11} - C_5^{11}$ 1M+1A

$= 200\,914$ 1A

17. (a) 所求數目 $= 8! = 40\,320.$ 1A

(b) 所求數目 $= C_2^4 \cdot 2! \cdot 6!$ 1M

$= 8640$ 1A

18. (a) 所求概率 $= \dfrac{C_4^5 C_2^{11} + C_5^5 C_1^{11}}{C_6^{16}}$ 1M

$= \dfrac{1}{28}$ 1A

(b) 所求概率 $= 1 - \dfrac{1}{28}$ 1M

$= \dfrac{27}{28}$ 1A

19. (a) 所求概率 $= \dfrac{C_2^{10} C_2^{12}}{C_4^{22}}$ 1M

$= \dfrac{54}{133}$ 1A

(b) 所求概率 $= 1 - \dfrac{54}{133}$ 1M

$= \dfrac{79}{133}$ 1A

20. (a) 所求概率 $= \dfrac{C_2^5 C_2^9}{C_4^{14}}$ 1M

$= \dfrac{360}{1001}$ 1A

(b) 所求概率 $= \dfrac{C_2^5 C_2^9 + C_3^5 C_1^9 + C_4^5}{C_4^{14}}$ 1M

$= \dfrac{5}{11}$ 1A

21. (a) 所求概率 $= \dfrac{C_4^4 C_1^{7+8}}{C_5^{4+7+8}}$ 1M

$= \dfrac{5}{3876}$ 1A

(b) 所求概率 $= \dfrac{C_3^4 C_2^{15}}{C_5^{19}}$ 1M

$= \dfrac{35}{969}$ 1A

(c) 所求概率 $= 1 - \dfrac{5}{3876} - \dfrac{35}{969}$ 1M

$= \dfrac{3731}{3876}$ 1A

22. 所求概率 $= \dfrac{C_4^6 4!5!}{9!}$ 1M+1M

$= \dfrac{5}{42}$ 1A

23. (a) 所求概率 $= \dfrac{C_4^7 + C_4^9}{C_4^{3+7+9}}$ 1M+1A

$= \dfrac{161}{3876}$ 1A

(b) 所求概率 $= 1 - \dfrac{161}{3876}$ 1M

$= \dfrac{3715}{3876}$ 1A

24. (a) 所求數目 $= (7+3)!$

$= 3\,628\,800$ 1A

(b) 所求概率 $= \dfrac{C_3^8 3!7!}{10!}$ 1M+1A

$= \dfrac{7}{15}$ 1A

25. (a) 所求概率 $= \dfrac{C_4^8(C_1^2)^4}{C_4^{16}}$ 1M

$= \dfrac{8}{13}$ 1A

(b) 所求概率 $= 1 - \dfrac{8}{13}$ 1M

$= \dfrac{5}{13}$ 1A

26. (a) 所求概率

$= \dfrac{C_2^5}{C_2^9}$ 1M

$= \dfrac{5}{18}$ 1A

(b) 所求概率

$= \dfrac{5}{18} + \dfrac{C_1^5C_1^4}{C_2^9} \times \dfrac{C_3^9}{C_3^{10}} + \dfrac{C_2^4}{C_2^9} \times \dfrac{C_3^8}{C_3^{10}}$ 1M

$= \dfrac{67}{90}$ 1A

27. (a) 所求概率 $= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right) + \dots$ 1M

$= \dfrac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{25}{36}}$ 1M

$= \dfrac{6}{11}$ 1A

(b) (i) 獲 10 個代幣的概率 $= \dfrac{8}{8^2}$ 1M

$= \dfrac{1}{8}$

獲 5 個代幣的概率 $= \dfrac{7(2!)}{8^2}$

$= \dfrac{7}{32}$ 1A

代幣的期望數目 $= 10\left(\dfrac{1}{8}\right) + 5\left(\dfrac{7}{32}\right)$ 1M

$= \dfrac{75}{32}$ 1A

(ii) 假定玩家採納選項 2。

獲 50 個代幣的概率 $= \dfrac{8}{8^3}$

$= \dfrac{1}{64}$

獲 10 個代幣的概率 $= \dfrac{6(3!)}{8^3}$

$= \dfrac{9}{128}$

獲 5 個代幣的概率 $= \dfrac{7(2^3 - 2)}{8^3}$ 1M

$= \dfrac{21}{256}$

代幣的期望數目 $= 50\left(\dfrac{1}{64}\right) + 10\left(\dfrac{9}{128}\right) + 5\left(\dfrac{21}{256}\right)$

$= \dfrac{485}{256}$

$< \dfrac{75}{32}$ 1M

因此，玩家應採納選項 1。 1A

(iii) 佩玲不獲代幣的概率 $= \dfrac{5}{11} + \dfrac{6}{11}\left(1 - \dfrac{1}{8} - \dfrac{7}{32}\right)$ 1M+1M

$= 0.8125$

< 0.9

因此，該宣稱不正確。 1A

28. (a) 設 μ 分及 σ 分分別為該分佈的平均值及標準差。

$$\begin{cases} \dfrac{90-\mu}{\sigma} = 3 \\ \dfrac{65-\mu}{\sigma} = 0.5 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $\mu = 60$ 及 $\sigma = 10$。 1A

該分佈的平均值為 60 分。

(b) 中位數（55 分）低於平均值（60 分）。 1M

同意該宣稱。 1A

29. (a) 設 x 分為家華在數學考試的得分。

$$\frac{x-66}{12} = -0.5$$ 1M

$$x = 66-(0.5)(12)$$

$$= 60$$ 1A

家華在數學考試的得分為 60 分。

(b) 家華在科學考試的標準分

$$= \frac{49-52}{10}$$

$$= -0.3$$ 1A

$$> -0.5$$

該宣稱正確。 1A

30. 設 σ 分為該分佈的標準差。

$$\frac{22-61}{\sigma} = -2.6$$ 1M

$$\sigma = 15$$

小麗的得分 $= 61 + 1.4\sigma$

$= 82$ 分 1A

小麗與偉健的得分之差

$= 82 - 22$

$= 60$ 分

> 59 分

故此，該分佈的分佈域至少為 60 分，超過 59 分。

因此，該宣稱不正確。 1A

31. (a) 標準差 $= 10(1 + 20\%) = 12$ 1A

(b) 設 x 為測驗得分，而 m 為得分調整前的平均值。

得分調整前的標準分

$= \dfrac{x - m}{10}$

得分調整後的標準分

$= \dfrac{[x(1 + 20\%) + 5] - [m(1 + 20\%) + 5]}{12}$ 1M

$= \dfrac{1.2(x - m)}{12}$

$= \dfrac{x - m}{10}$

因此，每名學生的標準分沒有因得分調整而改變。 1A

32. (a) $\dfrac{\sin \angle AVB}{18} = \dfrac{\sin 110°}{30}$ 1M

$\angle AVB \approx 34.3°$ 或 $146°$（捨去）

$\angle VBA = 180° - 110° - \angle AVB \approx 35.7°$ 1A

(b) 在 $\triangle BMP$ 中，

$MP^2 = 9^2 + 15^2 - 2(9)(15) \cos \angle VBA$ 1M

$MP \approx 9.31 \text{ cm}$

在 $\triangle VBC$ 及 $\triangle VMN$ 中，M 及 N 分別為 VB 及 VC 的中點。

$MN = \dfrac{BC}{2} = 5 \text{ cm}$ 1M

設 h cm 為梯形 $PQNM$ 的高。

$h = \sqrt{MP^2 - \left(\dfrac{10 - 5}{2}\right)^2} \approx 8.97$ 1M

梯形 $PQNM$ 的高 $= \dfrac{h(5 + 10)}{2}$ 1M

$\approx 67.3 \text{ cm}^2$

$< 70 \text{ cm}^2$

因此，同意該宣稱。 1A

33. (a) 在 $\triangle ABD$，

$$\frac{10}{\sin\angle ADB} = \frac{15}{\sin 86^\circ} \qquad \text{1M}$$

$\angle ADB \approx 41.7^\circ$ 或 138°（捨去）

$\angle ABD = 180^\circ - 86^\circ - \angle ADB \approx 52.3^\circ$ 1A

在 $\triangle BCD$，

$CD^2 = 8^2 + 15^2 - 2(8)(15)\cos\angle CBD$ 1M

$CD \approx 10.7\,\text{cm}$ 1A

(b) 由於 $AC^2 + BC^2 = AB^2$，可得 $\angle ACB = 90^\circ$。

在 $\triangle ABD$，

$AD^2 = 10^2 + 15^2 - 2(10)(15)\cos\angle ABD$

$AD \approx 11.9\,\text{cm}$

在 $\triangle ACD$，

$AD^2 = 6^2 + CD^2 - 2(6)(CD)\angle ACD$

$\angle ACD \approx 86.5^\circ$

故此，$\angle ACB = 90^\circ$ 但 $\angle ACD$ 不是直角。 1M

由此，A 在 BCD 的投影不在直線 BC 上。

不同意該宣稱。 1A

34. (a) (i) $QR^2 = 25^2 + 30^2 - 2(25)(30)\cos 95^\circ$ 1M

$QR \approx 40.7\,\text{cm}$ 1A

(ii) $25^2 = 30^2 + QR^2 - 2(30)(QR)\cos\angle PQR$ 1M

$\angle PQR \approx 37.7^\circ$ 1A

(b) 設 R' 及 M' 分別為 R 及 M 在水平地面上的垂足。

$RR' = RP\sin 70^\circ \approx 23.5\,\text{cm}$

由於 $\triangle QMM' \sim \triangle QRR'$，$MM' = \dfrac{RR'}{2} \approx 11.7\,\text{cm}$。 1M

$$PM^2 = 30^2 + \left(\frac{QR}{2}\right)^2 - 2(30)\left(\frac{QR}{2}\right)\cos\angle PQR$$

$PM \approx 18.7\,\text{cm}$

PM 與水平地面的交角為 $\angle MPM'$。

$$\sin\angle MPM' = \frac{MM'}{PM} \qquad \text{1M}$$

$\angle MPM' \approx 39.0^\circ < 40^\circ$

該宣稱不正確。 1A

35. (a) (i) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$28^2 = 35^2 + 21^2 - 2(35)(21)\cos\angle BCM$$

$\angle BCM \approx 53.1°$ 1A

(ii) $$\frac{CM}{\sin(180° - 75° - \angle BCM)} = \frac{21}{\sin 75°}$$ 1M

$CM \approx 17.1\text{ cm}$ 1A

(b) (i) 在 $\triangle ACM$ 中，$AM = 35 - CM \approx 17.9\text{ cm}$，及

$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2(AM)(CM)\cos\angle AMC$ 1M

$AC \approx 28.1\text{ cm}$ 1A

(ii) 在 $\triangle CMN$ 中，$CN = CM\cos\angle BCM \approx 10.3\text{ cm}$。 1M

在 $\triangle ABC$ 中，

$$28^2 = 21^2 + AC^2 - 2(AC)(21)\cos\angle ACB$$

$\angle ACB \approx 67.7°$

在 $\triangle ACN$ 中，

$$AN^2 = CN^2 + AC^2 - 2(CN)(AC)\cos\angle ACB$$

$AN \approx 26.0\text{ cm}$

$$AC^2 = CN^2 + AN^2 - 2(AN)(CN)\cos\angle ANC$$

$\angle ANC \approx 90.9° \neq 90°$

故此，$\angle ANC$ 不是直角。 1M

$\angle AMN$ 不是平面 BCM 與水平地面的交角。

不同意該宣稱。 1A

36. (a) (i) $\dfrac{\sin\angle BAD}{12} = \dfrac{\sin 72^\circ}{13}$ 1M

$\angle BAD \approx 61.4^\circ$ 1A

(ii) $\angle BDA = 180^\circ - \angle BAD - 72^\circ \approx 46.6^\circ$

$DP = 12\cos\angle BDA \approx 8.24\text{ cm}$ 1A

$\triangle ACD$ 為等邊三角形，且 $\angle PDC = 60^\circ$。

在 $\triangle CDP$ 中，

$CP^2 = 13^2 + DP^2 - 2(13)(DP)\cos 60^\circ$ 1M

$CP \approx 11.4\text{ cm}$ 1A

(b) 在 $\triangle CDP$ 中，

$13^2 = CP^2 + DP^2 - 2(CP)(DP)\cos\angle CPD$

$\angle CPD \approx 81.2^\circ \neq 90^\circ$ 1M

故此，兩平面間的夾角不是 $\angle BPC$。

該宣稱不正確。 1A

37. (a) $CD\sin 70^\circ = 45\sin 50^\circ$ 1M

$CD \approx 36.7\text{ cm}$ 1A

(b) (i) $AE = 45\cos 50^\circ \approx 28.9\text{ cm}$

$DE = 40 + CD\cos 70^\circ \approx 52.5\text{ cm}$

$AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} \approx 60.0\text{ cm}$ 1M

$BE = 45\sin 50^\circ \approx 34.5\text{ cm}$

$AC = \sqrt{BE^2 + 40^2 + AE^2} = 60.2\text{ cm}$

$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2(AD)(AC)\cos\angle CAD$ 1M

$\angle CAD \approx 35.5^\circ$ 1A

(ii) 設 F 為 CD 上的一點使得 $AF \perp CD$。

則 $EF \perp CD$ 及平面 ACD 與平面 $BCDE$ 間的夾角為 $\angle AFE$。 1M

$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2(AC)(CD)\cos\angle ACD$

$\angle ACD \approx 71.9^\circ$

$AF = AC\sin\angle ACD \approx 57.2\text{ cm}$

$\sin\angle AFE = \dfrac{AE}{AF}$

$\angle AFE \approx 30.4^\circ > 30^\circ$

該角度超過 30°。 1A

38. (a) $\dfrac{AP}{\sin 60°} = \dfrac{20}{\sin(180° - 60° - 72°)}$ 1M

$AP \approx 23.3\text{ cm}$ 1A

(b) (i) 設 S 為 P 至 AD 的垂足。

$PS = AP \sin 72° \approx 22.2\text{ cm}$ 1M

$AS = AP \cos 72° \approx 7.20\text{ cm}$

在 $\triangle APB$ 中，

$$\frac{PB}{\sin 72°} = \frac{20}{\sin(180° - 60° - 72°)}$$

$$PB \approx 25.595\,455\,52\text{ cm}$$

設 T 為 P 至 BC 的垂足。

$PT = \sqrt{PB^2 - AS^2} \approx 24.6\text{ cm}$

留意 $\alpha = \angle PTS$。 1M

在 $\triangle PTS$ 中，

$PS^2 = PT^2 + 20^2 - 2(PT)(20)\cos\alpha$ 1M

$\alpha \approx 58.6°$ 1A

(ii) 設 X 為 P 至底 $ABCD$ 的投影。

可得 $\beta = \angle PBX$。 1M

由於 $TX < BX$，$\tan\alpha = \dfrac{PX}{TX} > \dfrac{PX}{BX} = \tan\beta$。

由於 α 及 β 均為銳角，α 大於 β。 1A

39. (a) (i) $AC^2 = 40^2 + 24^2 - 2(40)(24)\cos 80°$ 1M

$AC \approx 42.9\text{ cm}$ 1A

(ii) $\dfrac{\sin\angle ACB}{40} = \dfrac{\sin 80°}{AC}$ 1M

$\angle ACB \approx 66.6°$ 或 $113°$（捨去） 1A

(iii) 紙卡的面積 $= 2\left(\dfrac{1}{2}(40)(24)\sin 80°\right) + \dfrac{1}{2}AC^2\sin\angle CAD$ 1M

$= 960\sin 80° + \dfrac{1}{2}AC^2\sin\angle CAD$

紙卡的面積的一部分是常數，另一部分隨 $\sin\angle CAD$ 正變。 1M

紙卡的面積當 $\angle CAD = 90°$ 時為最大，

即 $\angle ACD = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$。

定義 $\alpha = 45° + \angle ACB \approx 112°$。

當 $\angle BCD$ 由 $105°$ 上升至 α，紙卡的面積上升。

當 $\angle BCD$ 由 α 上升至 $145°$，紙卡的面積減小。 1A

(b) 設 M 為 CD 的中點。

$\angle ACD = 132° - \angle ACB \approx 65.4°$

在 $\triangle ACD$ 中，

$\cos\angle ACD = \dfrac{\left(\frac{CD}{2}\right)}{AC}$ 1M

$CD \approx 35.7\text{ cm}$

$AM = AC\sin\angle ACD \approx 39.0\text{ cm}$

$BM = \sqrt{BC^2 - \left(\dfrac{CD}{2}\right)^2} \approx 16.0\text{ cm}$

$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2(AM)(BM)\cos\angle AMB$ 1M

$\angle AMB \approx 81.7°$

角錐的高 $= BM\sin\angle AMB \approx 15.9\text{ cm}$ 1M

$\triangle ACD$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(CD)(AM) \approx 697\text{ cm}^2$ 1M

角錐 $ABCD$ 的體積

$= \dfrac{1}{3}$($\triangle ACD$ 的面積)(角錐的高) 1M

$\approx 3690\text{ cm}^3$ 1A

40. (a) 在 $\triangle PQR$ 中，$\angle QPR = 180° - 30° - 55° = 95°$。

$$\frac{60}{\sin 55°} = \frac{PR}{\sin 30°} \quad \text{1M}$$

$$PR \approx 36.6 \text{ cm}$$

在 $\triangle PRS$ 中，$\angle RPS = 120° - 95° = 25°$。

$$RS^2 = 40^2 + PR^2 - 2(40)(PR)\cos 25° \quad \text{1M}$$

$$RS \approx 16.9 \text{ cm} \quad \text{1A}$$

(b) 所求面積 $= \frac{1}{2}(60)(PR)\sin 95° + \frac{1}{2}(40)(PR)\sin 25°$ 1M

$\approx 1400 \text{ cm}^2$ 1A

(c) (i) 設 T 為 QR 上的一點使得 $PT \perp QR$。

$PT = 60\sin 30° = 30 \text{ cm}$ 1A

所求距離 $= 30\sin 32°$ 1M

$\approx 15.9 \text{ cm}$ 1A

(ii) 設 U 為地面上的一點使得 SU 為鉛垂。

設 W 為 QR 的延線上的一點使得 $SW \perp QR$。

在 $\triangle PQT$ 中，$\angle QPT = 180° - 90° - 30° = 60°$。故此，$\angle SPT = 120° - 60° = 60°$。

$SW = PT - PS\cos\angle TPS = 30 - 40\cos 60° = 10 \text{ cm}$ 1M

$SU = SW\sin 32° \approx 5.30 \text{ cm}$ 1M

RS 與水平地面間的夾角為 $\angle SRU$。

$\sin\angle SRU = \frac{SU}{RS}$

$\approx 18.3° < 20°$ 1A

該宣稱正確。 1A

41. (a) $\angle ABC = 180° - 30° - 42° = 108°$.

$$\frac{AC}{\sin 108°} = \frac{24}{\sin 30°}$$ 1M

$AC \approx 45.7\text{ cm}$ 1A

(b) (i) 留意 $\triangle CEF \sim \triangle ADF$。

$$\frac{CF}{AC+CF} = \frac{2}{10}$$ 1M

$$CF = \frac{1}{4}AC$$

$\approx 11.4\text{ cm}$ 1A

(ii) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$\frac{24}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin 42°}$$

$AB \approx 32.118\,269\,11\text{ cm}$

$\triangle ABF$ 的面積 $= \frac{1}{2}(AC+CF)(AB)\sin 30°$ 1M

$\approx 458\text{ cm}^2$ 1A

(iii) 設 G 為 A 至 BF 的垂足。

所求之角為 $\angle AGD$。 1A

在 $\triangle AFB$ 中，

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2(AB)(AF)\cos 30°$$ 1M

$BF \approx 33.4\text{ cm}$

$\frac{1}{2}(AG)(BF) = \triangle ABF$ 的面積 1M

$AG \approx 27.5\text{ cm}$

在 $\triangle AGD$ 中，

$$\sin\angle AGD = \frac{10}{AG}$$

$\angle AGD \approx 21.4°$ 1A

因此，所求之角為 21.4°。

(iv) 在 $\triangle AGD$，$DG = \sqrt{AG^2 - 10^2} \approx 25.6\text{ cm}$。

$\triangle BDF$ 的面積 $= \frac{1}{2}(BF)(DG)$ 1M

$\approx 427\text{ cm}^2$ 1A

$< 460\text{ cm}^2$

因此，不同意該宣稱。 1A

42. (a) 在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ADB = 180° - 20° - 120° = 40°$。

$$\frac{AD}{\sin 20°} = \frac{60}{\sin 40°}$$ 1M

$AD \approx 31.9 \text{ cm}$ 1A

(b) (i) $BC = AD \approx 31.9 \text{ cm}$。在 $\triangle ABC$ 中，

$$40^2 = BC^2 + 60^2 - 2(60)(BC)\cos\angle ABC$$ 1M

$\angle ABC \approx 38.0°$ 1A

(ii) 設 E 為 BD 上的一點使得 $BD \perp AE$ 及 F 為 CD 上的一點使得 $EF \perp BD$。

所求之角為 $\angle AEF$。 1M

$AE = 60\sin 20° \approx 20.5 \text{ cm}$ 1M

$DE = \dfrac{AE}{\tan 40°} \approx 24.5 \text{ cm}$

$EF = DE\tan 20° \approx 8.90 \text{ cm}$

$DF = \dfrac{EF}{\sin 20°} \approx 26.0 \text{ cm}$

在 $\triangle ACD$ 中，

$$40^2 = 60^2 + AD^2 - 2(60)(AD)\cos\angle ADC$$

$\angle ADC \approx 38.0°$

$$AF^2 = AD^2 + DF^2 - 2(AD)(DF)\cos\angle ADC$$

$AF \approx 19.7 \text{ cm}$

在 $\triangle AEF$ 中，

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2(AE)(EF)\cos\angle AEF$$

$\angle AEF \approx 71.9°$ 1A

因此，所求之角為 $71.9°$。

43. (a) $\dfrac{\sin \angle XWY}{5} = \dfrac{\sin 70^\circ}{6}$ 1M

$\angle XWY \approx 51.5^\circ$ 或 128°（捨去） 1A

(b) 設 Z 在 $\triangle WXY$ 的投影為 T。

設 M 為 XY 的中點。

所求之角為 $\angle ZMT$。 1M

留意 $WT = XT = YT$ 及 T 為圓 WXY 的圓心。

$\angle XTY = 2\angle XWY \approx 103^\circ$

$$\sin \angle XTM = \frac{\left(\frac{XY}{2}\right)}{TX}$$

$$\sin \frac{\angle XTY}{2} = \frac{2.5}{TX}$$

$$TX \approx 3.19 \text{ cm}$$

$ZT = WT \tan 30^\circ \approx 1.84 \text{ cm}$ 1M

$MT = TX \cos \angle XTM \approx 1.99 \text{ cm}$ 1M

$$\tan \angle ZMT = \frac{ZT}{MT}$$

$\angle ZMT \approx 42.9^\circ < 45^\circ$ 1A

該交角不超過 45°。