**結構式試題**

1. (a) $f(x) = (2x^2 + ax + 4)(3x + 7) + (bx + c)$ 1M

$= 6x^3 + (3a + 14)x^2 +$（較低次方的 $x$）

比較係數，

$3a + 14 = -13$ 1M

$a = -9$ 1A

(b) (i) $g(x) = A(2x^2 + ax + 4) + (bx + c)$，其中 $A$ 為一非零常數。 1A

$$f(x) - g(x) = (2x^2 + ax + 4)(3x + 7) + (bx + c) - A(2x^2 + ax + 4) - (bx + c)$$
$$= (2x^2 + ax + 4)(3x + 7 - A)$$ 1M

因此，$f(x) - g(x)$ 可被 $2x^2 + ax + 4$ 整除。 1

(ii) $f(x) - g(x) = 0$

$(2x^2 - 9x + 4)(3x + 7 - A) = 0$

$2x^2 - 9x + 4 = 0$ 或 $3x + 7 - A = 0$ 1M

$x = 4$ 或 $\frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{A-7}{3}$

由於 $\frac{1}{2}$ 不是整數，不同意該宣稱。 1A

2. (a) 設商式為 $Ax + B$，其中 $A$ 及 $B$ 均為常數。

$h(x) = (Ax + B)(x^3 + 5x^2 - 12x - 1) + Ax + B$ 1M

考慮 $h(x)$ 中 $x^4$ 及 $x^2$ 的係數。

$$\begin{cases} A = 3 \\ A(-12) + B(5) = -16 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $A = 3$ 及 $B = 4$。 1A

所求商式為 $3x + 4$。

(b) $0 = h(x)$

$0 = (3x + 4)(x^3 + 5x^2 - 12x - 1) + 3x + 4$

$0 = (3x + 4)(x^3 + 5x^2 - 12x)$ 1M

$0 = x(3x + 4)(x^2 + 5x - 12)$

可得 $x = 0$ 或 $x = -\frac{4}{3}$ 或 $x^2 + 5x - 12 = 0$。 1M

$x^2 + 5x - 12 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$ 1M

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{2}$$ 不是有理數。

共有 2 個有理根。 1A

3. (a) $p(x) = (lx^2 + 5x + 8)(2x^2 + mx + n)$

$= 2lx^4 + (ml + 10)x^3 + \ldots$

比較 $x^4$ 及 $x^3$ 的係數，可得

$$\begin{cases} 2l = 6 \\ ml + 10 = 7 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $l = 3$ 及 $m = -1$。 1A+1A

$$p(2) = p(-2)$$ 1M

$$[3(2)^2 + 5(2) + 8][2(2)^2 - (2) + n] = [3(-2)^2 + 5(-2) + 8][2(-2)^2 - (-2) + n]$$

$$30(6 + n) = 10(10 + n)$$

$$n = -4$$ 1A

(b) $p(x) = 0$

$(3x^2 + 5x + 8)(2x^2 - x - 4) = 0$

$3x^2 + 5x + 8 = 0$ 或 $2x^2 - x - 4 = 0$

$5^2 - 4(3)(8) = -71$ 1M

$< 0$ 1A

故此，二次方程 $3x^2 + 5x + 8 = 0$ 沒有實根。 1M+1A

$(-1)^2 - 4(2)(-4) = 33$

$> 0$

故此，二次方程 $2x^2 - x - 4 = 0$ 有 2 個實根。

由此，方程 $p(x) = 0$ 有 2 個實根。 1A

4. (a) 設 $p(x) = (Ax + B)(2x^2 + 9x + 14)$，其中 $A$ 及 $B$ 均為常數。 1A

$$\begin{cases} p(1) = 50 = (A + B)(2 + 9 + 14) \\ p(-2) = -52 = (-2A + B)(8 - 18 + 14) \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $A = 5$ 及 $B = -3$。

所求商式為 $5x - 3$。 1A

(b) $0 = p(x)$

$= (5x - 3)(2x^2 + 9x + 14)$

$x = \dfrac{3}{5}$ 或 $2x^2 + 9x + 14 = 0$ 1A

對方程 $2x^2 + 9x + 14 = 0$，$\Delta = 9^2 - 4(2)(14) - 31 < 0$。 1M

該方程沒有實根並因此沒有有理根。

方程 $p(x) = 0$ 只有一個有理根。 1A

5. (a)

$$f(2) = -33 \qquad \text{1M}$$

$$4(2)^3 - 5(2)^2 - 18(2) + c = -33$$

$$c = -9$$

$$f(-1) = 4(-1)^3 - 5(-1)^2 - 18(-1) - 9 \qquad \text{1M}$$

$$= 0$$

因此，$x + 1$ 為 $f(x)$ 的因式。 1A

(b)

$$f(x) = 0$$

$$4x^3 - 5x^2 - 18x - 9 = 0$$

$$(x + 1)(4x^2 - 9x - 9) = 0 \qquad \text{1M}$$

$$(x + 1)(x - 3)(4x + 3) = 0$$

$$x = 1 \quad 或 \quad 3 \quad 或 \quad -\frac{3}{4}$$

由於 $-1$、3 及 $-\frac{3}{4}$ 均為有理數，

同意該宣稱。 1A

6. (a) $k = -5$ 1A

$$f(3) = 0 \qquad \text{1M}$$

$$(3 - 2)^2(3 + h) - 5 = 0$$

$$h = 2 \qquad \text{1A}$$

(b)

$$f(x) = 0$$

$$(x - 2)(x - 2)(x + 2) - 5 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 - 4) - 5 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad \text{1A}$$

$$(x - 3)(x^2 + x - 1) = 0 \qquad \text{1M}$$

$$x = 3 \quad 或 \quad \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

由於 $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 不是整數，

不同意該宣稱。 1A

7. (a) 可得

$$\begin{cases} 0 = 4(3)(3+1)^2 + 3a + b \\ 2b + 165 = 4(-2)(-2+1)^2 - 2a + b \end{cases}$$ 1M

故此，$3a + b = -192$ 及 $-2a - b = 173$。

求解後，可得 $a = -19$ 及 $b = -135$。 1A+1A

(b) $0 = 4x(x+1)^2 - 19x - 135$

$= 4x^3 + 8x^2 - 15x - 135$ 1A

$= (x-3)(4x^2 + 20x + 45)$ 1M

$x = 3$ 或 $\dfrac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(4)(45)}}{2(4)}$ 1M

$= 3$ 或 $-\dfrac{5}{2} \pm i\sqrt{5}$

$f(x) = 0$ 的所有根均不是無理數，不同意該宣稱。 1A

8. (a) 藉比較 $x^3$ 的係數及常數項，可得 $a = 3$ 及 $c = 4$。 1A+1A

$f(x) = (x-2)(3x^2 + bx + 4)$

$= 3x^3 + (b-6)x^2 + (4-2b)x - 8$ 1M

比較 $x^2$ 的係數，可得

$b - 6 = -7$

$b = -1$ 1A

(b) $f(x) = 0$

$x = 2$ 或 $3x^2 - x + 4 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(4)$ 1M

$= -47$

$< 0$

方程 $3x^2 - x + 4 = 0$ 有非實根。

不同意該宣稱。 1M+1A

9. (a) 設 $f(x) = (x^2 - 1)(Ax + B) + kx + 8$，其中 $A$ 及 $B$ 均為常數。 1A

$f(1) = 0 = 0 + k + 8$ 1M

$k = -8$ 1A

(b) $f(x) = (x^2 - 1)(Ax + B) - 8x + 8$。

$$\begin{cases} f(-3) = 0 = [(-3)^2 - 1](-3A + B) - 8(-3) + 8 \\ f(0) = 24 = (-1)(B) + 8 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $B = -16$ 及 $A = -4$。 1A

$f(x) = (x^2 - 1)(-4x - 16) - 8x + 8 = 0$

$-4x^3 - 16x^2 - 4x + 24 = 0$

$-4(x - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$ 1M

$-4(x - 1)(x + 2)(x + 3) = 0$

$x = 1$ 或 $-2$ 或 $-3$ 1A

該宣稱正確。 1A

10. (a) $p(x) = (x^2 + x + 1)(2x^2 - 37) + cx + c - 1$ 1M

$(5^2 + 5 + 1)(2(5)^2 - 37) + 5c + c - 1 = 0$ 1M

$c = -67$ 1A

(b) $p(-3) = (9 - 3 + 1)(18 - 37) - 67(-3) - 68$

$= 0$

因此，$x + 3$ 為 $p(x)$ 的因式。 1

(c) $0 = (x^2 + x + 1)(2x^2 - 37) - 67x - 68$

$= 2x^4 + 2x^3 - 35x^2 - 104x - 105$

$= (x - 5)(2x^3 + 12x^2 + 25x + 21)$

$= (x - 5)(x + 3)(2x^2 + 6x + 7)$ 1M

$x = 5$ 或 $-3$ 或 $2x^2 + 6x + 7 = 0$

對方程 $2x^2 + 6x + 7 = 0$，$\Delta = 6^2 - 4(2)(7) = -20 < 0$。 1M

$2x^2 + 6x + 7 = 0$ 的根不是實數。

該宣稱不正確。 1A

11. (a) 設 $p(x) = (x^2 - 2x + 3)(Ax + B) + x + 13$，其中 $A$ 及 $B$ 均為常數。 1M

比較 $x^3$ 的係數及常數項，可得

$$\begin{cases} 2 = A \\ -20 = 3B + 13 \end{cases}$$

求解後，可得 $A = 2$ 及 $B = -11$。 1A

$a = (1)(B) + (-2)(A) = -15$ 及 $b = 3A - 2B + 1 = 29$。 1A

(b) $p(5) = 2(5)^3 - 15(5)^2 + 29(5) - 20$ 1M

$= 0$

$x - 5$ 為 $p(x)$ 的因式。 1

(c) $0 = 2x^3 - 15x^2 + 29x - 20$

$= (x - 5)(2x^2 - 5x + 4)$ 1M

$x = 5$ 或 $2x^2 - 5x + 4 = 0$

對 $2x^2 - 5x + 4 = 0$，$\Delta = 5^2 - 4(2)(4) = -7 < 0$。 1M

方程 $2x^2 - 5x + 4 = 0$ 沒有實根，故此沒有無理根。

方程 $p(x) = 0$ 有零個無理根。

不同意該宣稱。 1A

12. (a) $k(2)^3 - 21(2)^2 + 24(2) - 4 = 0$ 1M

$8k = 40$

$k = 5$ 1A

(b) 所求面積 $= m(15m^2 - 63m + 72)$ 1A

$= 15m^3 - 63m^2 + 72m$

(c) $15m^3 - 63m^2 + 72m = 12$ 1M

$5m^3 - 21m^2 + 24m - 4 = 0$

$(m - 2)(5m^2 - 11m + 2) = 0$ 1M+1A

$(m - 2)^2(5m - 1) = 0$

$m = 2$ 或 $\frac{1}{5}$

故此，$Q$ 只有兩個不同的位置使得長方形 $OPQR$ 的面積為 12。 1A

13. (a) $\angle DEC = \angle ADB = 42°$ 1A

$\angle AEB = \angle CAE = 30°$ 1A

$\angle BEC = 42° - 30° = 12°$ 1A

(b) $\angle ECD = \angle BDC = \theta$

$\angle CFE = 180° - 12° - \theta$ 1M

$= 168° - \theta$ 1A

14. (a) $\angle ABC = \angle AED$ （已知）

$AB = AE$ （已知）

$\angle ADE = \angle DAC$ （錯角，$AC // ED$）

$\angle ACB = \angle DAC$ （錯角，$AD // BC$）

$= \angle ADE$

$\triangle ABC \cong \triangle AED$ （$AAS$）

| **評分標準** | | |
|---|---|---|
| **情況 1** | 附有正確理由的任何正確證明。 | 2 |
| **情況 2** | 未附有正確理由的任何正確證明。 | 1 |

(b) $\angle AED = \angle ABC = 39°$ 1M

$\angle ADE = 180° - 39° - 87° = 54°$ 1M

$\angle DAC = \angle ADE = 54°$

$\angle ACD = \dfrac{180° - 54°}{2} = 63°$ 1A

15. (a) 在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DCB$ 中，

$\angle BCE = \angle CBE$ （等腰 $\triangle$ 底角）

$\angle BAC = \angle BDC$ （已知）

$BC = BC$ （公共邊）

$\triangle ABC \cong \triangle BDC$ （$AAS$）

| **評分標準** | | |
|---|---|---|
| **情況 1** | 附有正確理由的任何正確證明。 | 2 |
| **情況 2** | 未附有正確理由的任何正確證明。 | 1 |

(b) (i) 共有 3 對全等三角形。 1A

(ii) 共有 4 對相似三角形。 1A

16. (a) $\angle BAC = \angle DBC$ （已知）

$\angle ACB = \angle BCD$ （公共角）

$\triangle ABC \sim \triangle BDC$ （$AA$）

| 評分標準 | | |
|---|---|---|
| **情況 1** | 附有正確理由的任何正確證明。 | 2 |
| **情況 2** | 未附有正確理由的任何正確證明。 | 1 |

(b) $\dfrac{CB}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$ 1M

$\dfrac{CD}{20} = \dfrac{20}{25}$

$CD = 16\text{ cm}$

$BD^2 + CD^2 = 12^2 + 16^2$ 1M

$= 20^2$

$= BC^2$

因此，$\triangle BCD$ 為直角三角形。 1A

17. (a) 在 $\triangle ACD$ 及 $\triangle ABE$ 中，

$\angle ADC = \angle AEB$ （已知）

$AD = AE$ （等角對等邊）

$CE = BD$ （已知）

$CE + DE = BD + DE$

$CE = BE$

$\triangle ACD \cong \triangle ABE$ （$SAS$）

| 評分標準 | | |
|---|---|---|
| **情況 1** | 附有正確理由的任何正確證明。 | 2 |
| **情況 2** | 未附有正確理由的任何正確證明。 | 1 |

(b) (i) 留意 $DM = EM = 9\text{ cm}$ 及 $\angle AMD = \angle AME = 90°$。

$AM = \sqrt{15^2 - 9^2}$ 1M

$= 12\text{ cm}$ 1A

(ii) $AB^2 = 12^2 + (8 + 9)^2 = 400\text{ cm}^2$。

利用 (a)，可得 $AE = AD = 15\text{ cm}$。 1M

$AB^2 + AE^2 = 400 + 15^2$

$= 625$

$= (7 + 18)^2$

$= (BD + DE)^2$

$= BE^2$ 1M

因此，$\triangle ABE$ 是直角三角形。 1A

18. (a) $\angle AEC = \angle DEB$ （公共角）

$\angle CAE = \angle BDE$ （已知）

$\triangle ACE \sim \triangle DBE$ （AA）

| 評分標準 | | |
|---|---|---|
| 情況 1 | 附有正確理由的任何正確證明。 | 2 |
| 情況 2 | 未附有正確理由的任何正確證明。 | 1 |

(b) (i) $AC^2 + AE^2 = 4225\text{ cm}^2$

$CE^2 = 4225\text{ cm}^2 = AC^2 + AE^2$

故此，$\angle CAE = 90°$ 及 $\triangle ACE$ 為直角三角形。 1A

(ii) $\triangle ACE$ 的面積 $= \dfrac{(25)(60)}{2}$

$= 750\text{ cm}^2$

$\triangle BDE$ 的面積 $= 750 \times \left(\dfrac{15}{25}\right)^2$ 1M

$= 270\text{ cm}^2$ 1A

19. (a) $\angle CAE = \angle DBE$ （錯角，$AC // DB$）

$\angle ACE = \angle BDE$ （錯角，$AC // DB$）

$\triangle ACE \sim \triangle BDE$ （AA）

| 評分標準 | | |
|---|---|---|
| 情況 1 | 附有正確理由的任何正確證明。 | 2 |
| 情況 2 | 未附有正確理由的任何正確證明。 | 1 |

(b) $\dfrac{DE}{CE} = \dfrac{BD}{AC}$

$\dfrac{DE}{7} = \dfrac{15}{10}$ 1M

$DE = 10.5\text{ cm}$

$BE = 20 \times \dfrac{15}{15+10}$

$= 12\text{ cm}$

留意 $BD$ 為 $\triangle BDE$ 的最長邊。

$\angle BDE$ 及 $\angle EBD$ 均不可能為 $90°$。

$DE^2 + BE^2 = 10.5^2 + 12^2 = 254.25\text{ cm}^2$

$BD^2 = 15^2 = 225\text{ cm}^2 \neq DE^2 + BE^2$ 1M

可得 $\angle BED \neq 90°$。

因此，$\triangle BDE$ 不是直角三角形。 1A

20. (a) $AB = BC$ （正方形性質）

$AE = BF$ （已知）

$\angle ABE = 90^\circ = \angle BCF$ （正方形性質）

$\triangle ABE \cong \triangle BCF$ （RHS）

| 評分標準 | | |
|---|---|---|
| **情況 1** | 附有正確理由的任何正確證明。 | 2 |
| **情況 2** | 未附有正確理由的任何正確證明。 | 1 |

(b) 利用 (a)，$\angle BAE = \angle CBF$ （同位角，$\cong \triangle s$） 1M

$\angle AEB = 180^\circ - \angle ABE - \angle BAE$ （$\triangle$ 內角和） 1M

$= 180^\circ - 90^\circ - \angle BAE$

$= 90^\circ - \angle BAE$

$\angle BGE = 180^\circ - \angle CBF - \angle AEB$ （$\triangle$ 內角和）

$= 180^\circ - \angle BAE - (90^\circ - \angle BAE)$

$= 90^\circ$

因此，$\triangle BGE$ 為直角三角形。 1A

(c) 利用 (a)，可得 $BE = CF = 15\text{ cm}$。

$BG = \sqrt{15^2 - 9^2}$ 1M

$= 12\text{ cm}$ 1A

21. (a) (i) $BC = CB$ （公共邊）

$\angle FBC = \angle GCB$ （錯角，$CG // DB$）

$\angle FCB = \angle GBC$ （錯角，$BG // EC$）

$\triangle BCG \cong \triangle CBF$ （$ASA$）

| **評分標準** | | |
|---|---|---|
| **情況 1** | 附有正確理由的任何正確證明。 | 2 |
| **情況 2** | 未附有正確理由的任何正確證明。 | 1 |

(ii) $AD // BC$ （正方形性質）

$\angle EFD = \angle CFB$ （對頂角）

$\angle FDE = \angle FBC$ （錯角，$AD // BC$）

$\angle FED = \angle FCB$ （錯角，$AD // BC$）

$\triangle BCF \sim \triangle DEF$ （$AAA$）

| **評分標準** | | |
|---|---|---|
| **情況 1** | 附有正確理由的任何正確證明。 | 2 |
| **情況 2** | 未附有正確理由的任何正確證明。 | 1 |

(b) (i) $\angle BFC = \angle BGC = \angle BCF$

故此，$BF = BC = \ell$。 1A

$DF = BD - BF = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} - \ell = (\sqrt{2} - 1)\ell$ 1M+1A

(ii) $\angle DEF = \angle BCF = \angle BFC = \angle EFD$

故此，$DE = DF = (\sqrt{2} - 1)\ell$。 1M

$AE - DF = [\ell - (\sqrt{2} - 1)\ell] - (\sqrt{2} - 1)\ell$

$= (3 - 2\sqrt{2})\ell > 0$

因此，$AE > DF$。同意該宣稱。 1A

22. (a) 在 $\triangle ABE$ 及 $\triangle ECD$ 中，

| | |
|---|---|
| $\angle DCE + \angle ABE = 180^\circ$ | （同旁內角，$AB // CD$） |
| $\angle DCE = 90^\circ$ | |
| $\angle AEB + \angle EAB + 90^\circ = 180^\circ$ | （$\triangle$ 內角和） |
| $\angle EAB = 90^\circ - \angle AEB$ | |
| $\angle AEB + 90^\circ + \angle DEC = 180^\circ$ | （直線上的鄰角） |
| $\angle DEC = 90^\circ - \angle AEB$ | |
| $= \angle EAB$ | |
| $\angle AEB = \angle CDE$ | （$\triangle$ 內角和） |
| $\triangle ABE \sim \triangle ECD$ | （$AAA$） |

| **評分標準** | | |
|---|---|---|
| **情況 1** | 附有正確理由的任何正確證明。 | 2 |
| **情況 2** | 未附有正確理由的任何正確證明。 | 1 |

(b) (i) $\dfrac{DE}{36} = \dfrac{25}{15}$ 1M

$DE = 60\text{ cm}$

$CD = \sqrt{60^2 - 36^2} = 48\text{ cm}$ 1A

(ii) $\triangle ADE$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(25)(60)$ 1M

$= 750\text{ cm}^2$ 1A

(iii) 設 $G$ 為 $E$ 至 $AD$ 的垂足。

$AD = \sqrt{25^2 + 60^2} = 65\text{ cm}$

藉考慮 $\triangle ADE$ 的面積，

$\dfrac{1}{2}(65)(EG) = 750$ 1M

$EG \approx 23.1\text{ cm}$

由於 $EF \geq EG > 23.1\text{ cm}$，所求點 $F$ 不存在。 1A

| | | |
|---|---|---|
| 23. | (a) $G\ (77,\ 64)$ | 1A |
| | 所求距離 $= \sqrt{(77-65)^2+(64-48)^2}$ | 1M |
| | $= 20$ | 1A |
| | (b) (i) $GH$ 垂直於 $GP$。 | 1A |
| | (ii) $GP = \sqrt{77^2+64^2-224} = 99$ | 1M |
| | $HP = \sqrt{99^2+20^2} = 101$ | 1M |
| | 所求周界 $= 99+101+20$ | |
| | $= 220$ | 1A |
| 24. | (a) $(6,\ 17)$ | 1A |
| | (b) (i) 設 $(h,\ k)$ 為 $P$ 的坐標。 | |
| | 由於 $P$ 在 $L$ 上，可得 $4h+3k+50=0$。 | 1M |
| | 由於 $RP \perp L$， | |
| | $\dfrac{k-17}{h-6} \times \dfrac{-4}{3} = -1$ | 1M |
| | $3h-4k+50=0$ | |
| | 求解後，$h=-14$ 及 $k=2$。 | |
| | 所求距離 $= \sqrt{(-14-6)^2+(2-17)^2}$ | 1M |
| | $= 25$ | 1A |
| | (ii) (1) $P$、$Q$、$R$ 共線。 | 1A |
| | (2) $QR = 10$ | 1M |
| | $PQ = 25-10 = 15$ | 1M |
| | 所求比例 $= PQ : QR$ | |
| | $= 3 : 2$ | 1A |

25. (a) $(x-2)^2+(y+1)^2=(-6-2)^2+(5+1)^2$ 1M

$(x-2)^2+(y+1)^2=100$ 1A

(b) $C$ 的半徑 $=\sqrt{100}=10$

$FG=\sqrt{(-3-2)^2+(11+1)^2}$ 1M

$=13$

$>10$

因此，$F$ 在 $C$ 外。 1

(c) (i) $F$、$G$、$H$ 共線。 1A

(ii) $FH$ 的斜率 $=$ $FG$ 的斜率

$=\dfrac{-1-11}{2+3}$ 1M

$=-\dfrac{12}{5}$

所求方程為

$$y-11=-\frac{12}{5}(x+3)$$

$12x+5y-19=0$ 1A

26. (a) (i) $PQ$ 的中點 $=(-5,\ 11)$

$PQ$ 的斜率 $=\dfrac{23+1}{-14-4}=-\dfrac{4}{3}$ 1M

$L$ 的方程為

$$y-11=\frac{3}{4}(x+5)$$ 1M

$3x-4y+59=0$ 1A

(ii) $G$ 的 $y$ 坐標 $=\dfrac{3h+59}{4}$ 1M

$C$ 的方程為

$$x^2+y^2-2hx-2\left(\frac{3h+59}{4}\right)y+F=0$$ 1M

$2x^2+2y^2-4hx-(3h+59)y+2F=0$

其中 $F$ 為一常數。

$2(4)^2+2(-1)^2-4h(4)-(3h+59)(-1)+2F=0$

$2F=13h-93$

$C$ 的方程為 $2x^2+2y^2-4hx-(3h+59)y+13h-93=0$。 1

(b) $2(26)^2+2(43)^2-4h(26)-(3h+59)(43)+13h-93=0$ 1M

$h=11$

$C$ 的方程為 $x^2+y^2-22x-46y+25=0$。

所求直徑 $=2\sqrt{\left(\dfrac{22}{2}\right)^2+\left(\dfrac{46}{2}\right)^2-25}$ 1M

$=50$ 1A

27. (a) $C$ 的方程為

$$(x-0)^2+(y-3)^2=(6-0)^2+(11-3)^2 \qquad \text{1M}$$

$$x^2+(y-3)^2=100 \qquad \text{1A}$$

(b) (i) 設 $P$ 的坐標為 $(x,\ y)$。

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y-11)^2} \qquad \text{1M}$$

$$3x+4y-37=0 \qquad \text{1A}$$

$\Gamma$ 的方程為 $3x+4y-37=0$。

(ii) $\Gamma$ 為線段 $AG$ 的垂直平分線。 1A

(iii) $AQGR$的周界 $=4(10)$ 1M

$=40$ 1A

28. (a) 設 $P$ 的坐標為 $(x,\ y)$。

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-7)^2}=\sqrt{(x-13)^2+(y-1)^2} \qquad \text{1M}$$

$$4x-3y-24=0 \qquad \text{1A}$$

$\Gamma$ 的方程為 $4x-3y-24=0$。

(b) 代 $y=0$ 至 $4x-3y-24=0$，可得 $x=6$。 1A

$H$ 的坐標為 $(6,\ 0)$。

代 $x=0$ 至 $4x-3y-24=0$，可得 $y=-8$。

$K$ 的坐標為 $(0,\ -8)$。

$C$ 的直徑 $=\sqrt{(6-0)^2+(0+8)^2}=10$

$C$ 的圓周 $=10\pi$ 1M

$\approx 31.4$

$> 30$

因此，該宣稱正確。 1A

29. (a) $G\ (6,\ 8)$ 1A

$OG = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ 1A

(b) $C$ 的半徑 $= \sqrt{6^2 + 8^2 + 69} = 13 > 10$

因此，$O$ 在 $C$ 內。 1A

(c) $\Gamma$ 為 $OG$ 的垂直平分線。 1A

$MN = 2\sqrt{13^2 - \left(\dfrac{10}{2}\right)^2} = 24$ 1M

$OMGN$ 的面積 $= \dfrac{(24)(5)}{2} \times 2$ 1M

$= 120$ 1A

30. (a) $\Gamma$ 為 $AB$ 的垂直平分線。 1M

(b) (i) $\Gamma$ 的斜率 $= -3$

所求方程為

$$y + 4 = \frac{1}{3}(x - 2) \quad \text{1M}$$

$$x - 3y - 14 = 0 \quad \text{1A}$$

(ii) 解 $\begin{cases} x - 3y - 14 = 0 \\ 3x + y - 12 = 0 \end{cases}$，可得 $(x,\ y) = (5,\ -3)$。 1M

圓心的坐標為 $(5,\ -3)$。

所求方程為

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = (2 - 5)^2 + (-4 + 3)^2 \quad \text{1M}$$

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 10 \quad \text{1A}$$

31. (a) (i) $\Gamma$ 平行於 $L$。 1A

(ii) $\Gamma$ 的 $y$ 截距為 $-2$。 1A

$\Gamma$ 的斜率 $= \dfrac{-1-0}{0-3} = \dfrac{1}{3}$ 1M

$\Gamma$ 的方程為

$$y + 2 = \frac{1}{3}(x - 0)$$

$$x - 3y - 6 = 0$$ 1A

(b) (i) $Q$ 的坐標為 $(6,\ 0)$。 1A

由於 $6 - 3(0) - 6 = 0$，$\Gamma$ 通過 $Q$。 1A

(ii) $QH$ 及 $QK$ 同為圓的半徑。

由於 $\triangle AQH$ 與 $\triangle BQK$ 的高度相同，

所求比例 $= QH : QK = 1 : 1$ 1M+1A

32. (a) $G$ 在 $AB$ 的垂直平分線上。$G$ 的 $x$ 坐標 $= \dfrac{-10+30}{2} = 10$ 1A

$C$ 的方程為

$$(x-10)^2 + (y+15)^2 = (-10-10)^2 + (0+15)^2$$ 1M

$$(x-10)^2 + (y+15)^2 = 625$$ 1A

(b) (i) $\Gamma$ 平行於 $L$。 1A

(ii) $\Gamma$ 的斜率 $= L$ 的斜率 $= \dfrac{0+15}{30-10} = \dfrac{3}{4}$ 1A

$\Gamma$ 的方程為

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x + 10)$$

$$y = \frac{3x}{4} + \frac{15}{2}$$ 1A

(iii) $(x-10)^2 + \left(\dfrac{3x}{4} + \dfrac{15}{2} + 15\right)^2 = 625$ 1M

$$\frac{25}{16}x^2 + \frac{55}{4}x - \frac{75}{4} = 0$$

$$x = \frac{6}{5} \quad 或 \quad -10$$

當 $x = \dfrac{6}{5}$ 時，$y = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{6}{5} + \dfrac{15}{2} = \dfrac{42}{5}$。$H$ 的坐標為 $\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{42}{5}\right)$。

$AH = \sqrt{\left(\dfrac{6}{5}+10\right)^2 + \left(\dfrac{42}{5}\right)^2} = 14$，圓的半徑 $= \sqrt{625} = 25$

$\cos\angle GAH = \dfrac{\left(\frac{14}{2}\right)}{25}$ 1M

$\angle GAH \approx 73.7° > 70°$

不同意該宣稱。 1A

33. (a) 考慮 $\triangle CDE$ 的面積，

$$a = \frac{r}{2}(CD) + \frac{r}{2}(CE) + \frac{r}{2}(DE) \quad \text{1M}$$
$$= \frac{r}{2}(CD + CE + DE)$$
$$pr = 2a \quad \text{1}$$

(b) (i) $\Gamma$ 為 $\angle OHK$ 的角平分線。 1A

(ii) $\triangle OHK$ 的面積 $= \frac{1}{2}(14)(12) = 84$

$\triangle OHK$ 的周界 $= 14 + \sqrt{9^2 + 12^2} + \sqrt{(14-9)^2 + 12^2} = 42$

利用 (a)，$r = \frac{2(84)}{42} = 4$ 1M

設 $\triangle OHK$ 的內心的坐標為 $(h,\ 4)$。

內切圓的方程為 $(x-h)^2 + (y-4)^2 = 16$。

$OH$ 的方程為 $y = \frac{4x}{3}$。

代 $y = \frac{4x}{3}$ 至 $(x-h)^2 + (y-4)^2 = 16$，

$$(x-h)^2 + \left(\frac{4x}{3} - 4\right)^2 = 16$$
$$\frac{25}{9}x^2 + \left(-2h - \frac{32}{3}\right)x + h^2 = 0$$

由於 $OH$ 為該圓的切線，

$$\Delta = \left(-2h - \frac{32}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{25}{9}\right)(h^2) = 0 \quad \text{1M}$$
$$-\frac{64}{9}h^2 + \frac{128}{3}h + \frac{1024}{9} = 0$$
$$h = 8 \quad \text{或} \quad -2 \text{（捨去）}$$

由於 $\Gamma$ 通過內心 $(8,\ 4)$，$\Gamma$ 的斜率 $= \frac{12-4}{9-8} = 8$

$\Gamma$ 的方程為

$$y - 4 = 8(x-8) \quad \text{1M}$$
$$y = 8x - 60 \quad \text{1A}$$

**– 試卷完 –**