結構式試題

1. $\dfrac{m^{-12}n^8}{n^3} = \dfrac{n^8}{m^{12}n^3}$ 1M

$= \dfrac{n^{8-3}}{m^{12}}$ 1M

$= \dfrac{n^5}{m^{12}}$ 1A

2. $\dfrac{x^{20}y^{13}}{(x^5y)^6} = \dfrac{x^{20}y^{13}}{x^{30}y^6}$ 1M

$= \dfrac{y^{13-6}}{x^{30-20}}$ 1M

$= \dfrac{y^7}{x^{10}}$ 1A

3. $\dfrac{(xy^{-2})^3}{y^4} = \dfrac{x^3y^{-6}}{y^4}$ 1M

$= \dfrac{x^3}{y^{4-(-6)}}$ 1M

$= \dfrac{x^3}{y^{10}}$ 1A

4. $\dfrac{m^9}{(m^3n^{-7})^5} = \dfrac{m^9}{m^{15}n^{-35}}$ 1M

$= \dfrac{n^{35}}{m^{15-9}}$ 1M

$= \dfrac{n^{35}}{m^6}$ 1A

5. $\dfrac{(x^8y^7)^2}{x^5y^{-6}} = \dfrac{x^{16}y^{14}}{x^5y^{-6}}$ 1M

$= x^{16-5}y^{14+6}$ 1M

$= x^{11}y^{20}$ 1A

6. $\dfrac{(m^4n^{-1})^3}{(m^{-2})^5} = \dfrac{m^{12}n^{-3}}{m^{-10}}$ 1M

$= \dfrac{m^{12+10}}{n^3}$ 1M

$= \dfrac{m^{22}}{n^3}$ 1A

7. $\dfrac{xy^7}{(x^{-2}y^3)^4} = \dfrac{xy^7}{x^{-8}y^{12}}$ 1M

$= \dfrac{x^{1+8}}{y^{12-7}}$ 1M

$= \dfrac{x^9}{y^5}$ 1A

8. $\dfrac{(mn^{-2})^5}{m^{-4}} = \dfrac{m^5n^{-10}}{m^{-4}}$ 1M

$= \dfrac{m^{5+4}}{n^{10}}$ 1M

$= \dfrac{m^9}{n^{10}}$ 1A

9. $(\alpha\beta^3)(\alpha^{-2}\beta^4)^5 = (\alpha\beta^3)(\alpha^{-10}\beta^{20})$ 1M

$= \dfrac{\beta^{3+20}}{\alpha^{10-1}}$ 1M

$= \dfrac{\beta^{23}}{\alpha^9}$ 1A

10. $\dfrac{(a^3b^{-2})^4}{a^{-5}b^6} = \dfrac{a^{12}b^{-8}}{a^{-5}b^6}$ 1M

$= \dfrac{a^{12+5}}{b^{6+8}}$ 1M

$= \dfrac{a^{17}}{b^{14}}$ 1A

11. $\dfrac{x^{-8}y}{(x^7y^9)^{-6}} = \dfrac{x^{-8}y}{x^{-42}y^{-54}}$ 1M

$= x^{-8+42}y^{1+54}$ 1M

$= x^{34}y^{55}$ 1A

12. $\dfrac{3a+b}{8} = b-1$

$3a+b = 8b-8$ 1M

$3a = 7b-8$ 1M

$a = \dfrac{7b-8}{3}$ 1A

13. (a) $2(3m+n) = m+7$

$6m+2n = m+7$ 1M

$n = \dfrac{7-5m}{2}$ 1A

(b) n 減少的值 1M

$= 5$ 1M

14. $Ax = (4x+B)C$

$Ax = 4Cx+BC$ 1M

$Ax-4Cx = BC$ 1M

$x = \dfrac{BC}{A-4C}$ 1A

15. $\dfrac{a+4}{3} = \dfrac{b+1}{2}$ 1M

$2a + 8 = 3b + 3$

$3b = 2a + 5$ 1M

$b = \dfrac{2a+5}{3}$ 1A

16. $9(h + 6k) = 7h + 8$

$9h + 54k = 7h + 8$ 1M

$2h = 8 - 54k$ 1M

$h = 4 - 27k$ 1A

17. $\dfrac{4-3a}{b} = 5$

$4 - 3a = 5b$ 1M

$-3a = 5b - 4$ 1M

$a = \dfrac{4-5b}{3}$ 1A

18. $\dfrac{3}{h} - \dfrac{1}{k} = 2$

$\dfrac{1}{k} = \dfrac{3}{h} - 2$ 1M

$\dfrac{1}{k} = \dfrac{3-2h}{h}$ 1M

$k = \dfrac{h}{3-2h}$ 1A

19. $\dfrac{4a+4b-7}{b} = 8$

$4a + 5b - 7 = 8b$ 1M

$4a - 7 = 8b - 5b$ 1M

$b = \dfrac{4a-7}{3}$ 1A

20. $k = \dfrac{3x-y}{y}$

$ky = 3x - y$ 1M

$ky + y = 3x$ 1M

$y = \dfrac{3x}{k+1}$ 1A

21. $\dfrac{5}{h+k} = \dfrac{k}{h-3}$

$5h - 15 = hk + k^2$ 1M

$h(5-k) = k^2 + 15$ 1M

$h = \dfrac{k^2+15}{5-k}$ 1A

22. (a) $x^2 - 6xy + 9y^2 = (x-3y)^2$ 1A

(b) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 7x - 21y = (x-3y)^2 + 7x - 21y$ 1M

$= (x-3y)(x-3y+7)$ 1A

23. (a) $4m^2 - 25n^2 = (2m-5n)(2m+5n)$ 1A

(b) $4m^2 - 25n^2 + 6m - 15n = (2m-5n)(2m+5n) + 6m - 15n$ 1M

$= (2m-5n)(2m+5n+3)$ 1A

24. (a) $x^3 + x^2y - 7x^2 = x^2(x + y - 7)$ 1A

(b) $x^3 + x^2y - 7x^2 - x - y + 7 = x^2(x + y - 7) - x - y + 7$ 1M

$= (x^2 - 1)(x + y - 7)$ 1M

$= (x - 1)(x + 1)(x + y - 7)$ 1A

25. (a) $9r^2 - 18r^2s = 9r^2(r - 2s)$ 1A

(b) $9r^3 - 18r^2s - rs^2 + 2s^3 = 9r^2(r - 2s) - s^2(r - 2s)$ 1M

$= (9r^2 - s^2)(r - 2s)$ 1M

$= (3r + s)(3r - s)(r - 2s)$ 1A

26. (a) $a^2 - 2a - 3 = (a - 3)(a + 1)$ 1A

(b) $ab^2 + b^2 + a^2 - 2a - 3 = b^2(a + 1) + (a - 3)(a + 1)$ 1M

$= (b^2 + a - 3)(a + 1)$ 1A

27. (a) $5m - 10n = 5(m - 2n)$ 1A

(b) $m^2 + mn - 6n^2 = (m + 3n)(m - 2n)$ 1A

(c) $m^2 + mn - 6n^2 - 5m + 10n = (m + 3n)(m - 2n) - 5(m - 2n)$ 1M

$= (m - 2n)(m + 3n - 5)$ 1A

28. (a) $x^2 - 4xy + 3y^2 = (x - y)(x - 3y)$ 1A

(b) $x^2 - 4xy + 3y^2 + 11x - 33y = (x - y)(x - 3y) + 11(x - 3y)$ 1M

$= (x - 3y)(x - y + 11)$ 1A

29. (a) $4m^2 - 9 = (2m + 3)(2m - 3)$ 1A

(b) $2m^2n + 7mn - 15n = n(2m^2 + 7m - 15)$

$= n(2m - 3)(m + 5)$ 1A

(c) $4m^2 - 9 - 2m^2n - 7mn + 15 = (2m + 3)(2m - 3) - n(2m - 3)(m + 5)$ 1M

$= (2m - 3)[(2m + 3) - n(m + 5)]$ 1A

$= (2m - 3)(-mn + 2m - 5n + 3)$

30. (a) $\alpha^2 + \alpha - 6 = (\alpha + 3)(\alpha - 2)$ 1A

(b) $\alpha^4 + \alpha^3 - 6\alpha^2 = \alpha^2(\alpha^2 + \alpha - 6)$ 1M

$= \alpha^2(\alpha + 3)(\alpha - 2)$ 1A

31. (a) $6x^2 + xy - 2y^2 = (3x + 2y)(2x - y)$ 1A

(b) $8x - 4y - 6x^2 - xy + 2y^2 = 4(2x - y) - (3x + 2y)(2x - y)$ 1M

$= (2x - y)(4 - 3x - 2y)$ 1A

32. (a) $9c^2 - 6c + 1 = (3c - 1)^2$ 1A

(b) $(4c + d)^2 - 9c^2 + 6c - 1 = (4c + d)^2 - (3c - 1)^2$ 1M

$= [(4c + d) + (3c - 1)][(4c + d) - (3c - 1)]$ 1M

$= (7c + d - 1)(c + d + 1)$ 1A

33. (a) $\frac{4x + 6}{7} > 2(x - 3)$

$-\frac{10x}{7} > -\frac{48}{7}$

$x < \frac{24}{5}$ 1A

$2x - 10 \le 0$

$x \le 5$ 1A

因此，$x < \frac{24}{5}$。 1M

(b) 4 1A

34. (a) $\dfrac{19-7x}{3} > 23-5x$

$\dfrac{8x}{3} > \dfrac{50}{3}$ 1M

$x > \dfrac{25}{4}$ 1A

(b) $18-2x \geq 0$

$x \leq 9$ 1A

因此，$\dfrac{25}{4} < x \leq 9$。

所求的整數為 7、8 及 9。 1A

35. (a) $\dfrac{7-3x}{5} \leq 2(x+2)$

$-\dfrac{13x}{5} \leq \dfrac{13}{5}$

$x \geq 1$ 1A

$4x-13 > 0$

$x > \dfrac{13}{4}$ 1A

因此，$x > \dfrac{13}{4}$。 1M

(b) 4 1A

36. (a) $7(x-2) \leq \dfrac{11x+8}{3}$

$\dfrac{10x}{3} \leq \dfrac{50}{3}$

$x \leq 5$ 1A

$6-x < 5$

$x > 1$ 1A

因此，$1 < x \leq 5$。 1M

(b) 4 1A

37. (a) $\dfrac{3-x}{2} > 2x+7$

$-\dfrac{5x}{2} > \dfrac{11}{2}$

$x < -\dfrac{11}{5}$ 1A

$x+8 \geq 0$

$x \geq -8$ 1A

因此，$-8 \leq x < -\dfrac{11}{5}$。 1M

(b) -3 1A

38. (a) $\dfrac{7x+26}{4} \leq 2(3x-1)$

$-\dfrac{17}{4}x \leq -\dfrac{17}{2}$

$x \geq 2$ 1A

(b) $\dfrac{7x+26}{4} \leq 2(3x-1)$ 及 $45-5x \geq 0$

$x \geq 2$ $x \leq 9$ 1A

因此，$2 \leq x \leq 9$。 1M

共有 8 個整數同時滿足兩不等式。 1A

39. (a) $\dfrac{7(x-2)}{5} + 11 > 3(x-1)$

$-\dfrac{8x}{5} > -\dfrac{56}{5}$

$x < 7$ 1A

$x+4 \geq 0$

$x \geq -4$ 1A

因此，$-4 \leq x < 7$。 1M

(b) 6 1A

40. (a) $3x + 2 > \dfrac{4x - 5}{2}$

$6x - 4x > -5 - 4$ 1M

$x > -\dfrac{9}{2}$ 1A

$3x - 2 < 7$

$x < 3$

因此，$-\dfrac{9}{2} < x < 3$。 1A

(b) 4 1A

41. (a) $x + 6 < 6(x + 11)$

$-5x < 60$ 1M

$x > -12$ 1A

因此，不等式的解為所有實數。 1A

(b) -1 1A

42. (a) $3 - x > \dfrac{7 - x}{2}$

$-\dfrac{x}{2} > \dfrac{1}{2}$

$x < -1$ 1A

$5 + x > 4$

$x > -1$ 1A

因此，$x < -1$ 或 $x > -1$。 1M

(b) -2 1A

43. (a) $-2(3x+2) > x+10$

$-7x > 14$

$x < -2$ 1A

$2x \le -8$

$x \le -4$ 1A

因此，$x < -2$。 1M

(b) -3 1A

44. (a) 售價 $= 255(1-40\%)$ 1M

$= \$153$ 1A

(b) 成本 $= \dfrac{153}{1+2\%}$ 1M

$= \$150$ 1A

45. (a) 該書的售價 $= 250(1+20\%)$ 1M

$= \$300$ 1A

(b) 該書的標價 $= \dfrac{300}{75\%}$ 1M

$= \$400$ 1A

46. 設標價為 $\$x$。

$x(60\%) = \dfrac{x}{1+30\%} - 88$ 3M+1A

$x = 520$ 1A

標價為 \$520。

47. (a) 標價 $= \dfrac{690}{75\%}$ 1M

$= \$920$ 1A

(b) 成本 $= \dfrac{690}{1 + 15\%}$ 1M

$= \$600$ 1A

48. 設標價為 $\$x$。

$x(90\%) = (x - 80)(1 + 30\%)$ 2M+1A

$x = 260$

標價為 \$260。 1A

49. 設標價為 $\$x$。

售價 $= x(1 - 30\%) = \$0.7x$ 1M

成本 $= \dfrac{0.7x}{1 + 26\%} = \$\dfrac{5x}{9}$ 1M

$78 = 0.7x - \dfrac{5x}{9}$ 1M

$x = 540$ 1A

標價為 \$540。

50. (a) 佩玲的日薪 $= 480(1 + 20\%)$ 1M

$= \$576$ 1A

(b) □儀的日薪 $= \dfrac{480}{1 - 20\%}$ 1M

$= \$600$

因此，潔儀的日薪最高。 1A

51. (a) L 為 $\angle AOB$ 的角平分線。 1A

(b) 設 $S(r,\ \theta)$ 為交點的極坐標。

$r = 26\cos 60° = 13$ 1M+1A

$\theta = \dfrac{10° + 130°}{2} = 70°$ 1A

所求坐標為 $(13,\ 70°)$。

52. (a) $\angle AOB = 135° - 75° = 60°$ 1A

(b) 由於 $OA = OB$，可得 $\angle OAB = \angle OBA$。

留意 $\angle OAB + \angle OBA + 60° = 180°$。

故此，可得 $\angle OAB = \angle OBA = 60°$。

故此，$\triangle AOB$ 為等邊三角形。 1M

$\triangle AOB$ 的周界 $= 3(12) = 36$ 1A

(c) 3 1A

53. (a) $\angle POQ = 140° - 80° = 60°$ 1A

(b) $\angle OPQ = \angle OQP = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$

$\triangle OPQ$ 為等邊三角形。 1M

因此，$r = PQ = 21$。 1A

(c) 周界 $= 21 \times 3$

$= 63$ 1A

54. (a) $P'(5,\ 3)$ 1A

$Q'(-19,\ -7)$ 1A

(b) PQ 的斜率 $= \dfrac{5+7}{-3-2} = -\dfrac{12}{5}$ 1M+1A

$P'Q'$ 的斜率 $= \dfrac{3+7}{5+19} = \dfrac{5}{12} = -1 \div \left(-\dfrac{12}{5}\right)$

因此，PQ 垂直於 $P'Q'$。 1

55. (a) $A'(-4,\ -3)$ 1A

$B'(9,\ 9)$ 1A

(b) AB 的斜率 $= \dfrac{4+9}{-3-9} = -\dfrac{13}{12}$

$A'B'$ 的斜率 $= \dfrac{9+3}{9+4} = \dfrac{12}{13}$

由於 AB 的斜率 $\times$ $A'B'$ 的斜率 $= \left(-\dfrac{13}{12}\right)\left(\dfrac{12}{13}\right) = -1$， 1M

AB 垂直於 $A'B'$。 1

56. (a) $S'(5,\ 12)$ 1A

$T'(-3,\ 7)$ 1A

(b) $S'T'$ 的斜率 $= \dfrac{12-7}{5+3}$ 1M

$= \dfrac{5}{8}$ 1A

57. (a) 200 1A

(b) 123 1A

(c) 123.4 1A

58. (a) 266 1A

(b) 265.4 1A

(c) 270 1A

59. (a) 600 1A

(b) 534.76 1A

(c) 530 1A

60. (a) 最小可取重量 $= 100 - 0.5$ 1M

$= 99.5\ \text{g}$ 1A

(b) 32 包普通裝海鹽的最小可取重量

$= (99.5)(32)$ 1M

$= 3184\ \text{g}$ 1M

$> 3.15\ \text{kg}$

32 包普通裝海鹽不可能量得 3.1 kg 準確至最接近的 0.1 kg。 1A

61. (a) 最小可取容量 $= 200 - \dfrac{10}{2} = 195\ \text{mL}$ 1A

(b) 最小總容量

$= 195 \times 120$ 1M

$= 23\,400\ \text{mL}$ 1A

$> 23.35\ \text{L}$ 1M

不同意該宣稱。 1A

62. 一包 普通裝芝士的最小可取重量

$= 220 - 5$ 1M

$= 215\ \text{g}$

最小可取總重量

$= 215(250)$ 1M

$= 53\,750\ \text{g}$

$= 53.75\ \text{kg}$

$> 53.65\ \text{kg}$

該宣稱不正確。 1A

63. $(17-3r)^2 = 24^2 + (13+r)^2$ 1M

$8r^2 - 128r - 456 = 0$ 1M

$8(r+3)(r-19) = 0$

$r = -3$　或　19（捨去） 1A

64. (a) 設 $y = \dfrac{k}{\sqrt{x}}$，其中 k 為一非零常數。 1A

$81 = \dfrac{k}{\sqrt{144}}$ 1M

$k = 972$ 1A

因此，$y = \dfrac{972}{\sqrt{x}}$。

(b) 當 $x = 324$，$y = \dfrac{972}{\sqrt{324}} = 54$。 1A

y 的值的改變 $= 54 - 81 = -27$ 1A

y 的值減小 27。

65. (a) 設 $S = a + bn$，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} a + 10b = 10\,600 \\ a + 6b = 9000 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a = 6600$ 及 $b = 400$。 1A

所求收入 $= 6600 + 400(20)$

$= \$14\,600$ 1A

(b) 假定素姍在某月售出 n 個手袋。

$6600 + 400n = 18\,000$ 1M

$400n = 11\,400$

$n = 28.5$

由於 28.5 不是整數，

她的月入不可能為 \$18 000。 1A

66. (a) 設 $P = a + bh^3$，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} 59 = a + 3^3 b \\ 691 = a + 7^3 b \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a = 5$ 及 $b = 2$。 1A

所求價錢 $= 5 + 2(4)^3 = \$133$ 1A

(b) 高度 5 cm 的紀念品的價錢 $= 5 + 2(5)^3 = \$255$

兩高度 4 cm 的紀念品的價錢 $= 2 \times 133 = \$266 > \$255$。 1A

該宣稱不正確。 1A

67. (a) 設 $W = h\ell + k\ell^2$，其中 h 及 k 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} h + k = 181 \\ 2h + 4k = 402 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $h = 161$ 及 $k = 20$。 1A

所求重量 $= 161(1.2) + 20(1.2^2)$

$= 222\text{ g}$ 1A

(b) $20\ell^2 + 161\ell = 594$

$20\ell^2 + 16\ell - 594 = 0$ 1M

$(4\ell - 11)(5\ell + 54) = 0$

$\ell = \frac{11}{4}$ 或 $-\frac{54}{5}$（捨去） 1A

該托盤的周界為 $\frac{11}{4}$ m。

68. (a) 設 $f(x) = ax + bx^2$，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} 3h + 9k = 48 \\ 9h + 81k = 198 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $h = 13$ 及 $k = 1$。

因此，$f(x) = 13x + x^2$。 1A

(b) $f(x) = 90$

$13x + x^2 = 90$

$x^2 + 13x - 90 = 0$ 1M

$x = 5$ 或 -18 1A

69. (a) 設 $h(x)=a+bx$，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} h(-2)=-96=a-2b \\ h(5)=72=a+5b \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a=-48$ 及 $b=24$ 1A

因此，$h(x)=-48+24x$。

(b) $-48+24x=3x^2$

$$0=3x^2-24x+48$$ 1M

$$x=4$$ 1A

70. (a) 設 $f(x)=px^2+q$，其中 p 及 q 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} 4p+q=59 \\ 49p+q=-121 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $p=-4$ 及 $q=75$。 1A

故此，

$$f(x)=75-4x^2$$

$$f(6)=75-4(6)^2$$

$$=-69$$ 1A

(b) 利用 (a)，可得 $a=-69$。 1M

$$b=f(-6)$$

$$=-69$$

$AB=6-(-6)$ 1M

$=12$

$\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{(12)(69)}{2}$ 1M

$=414$ 1A

71. (a) 設 $f(x) = a + b(x+4)^2$，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} 0 = a + b(-3+4)^2 \\ 105 = a + b(2+4)^2 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a = -3$ 及 $b = 3$。 1A

$f(0) = -3 + 3(0+4)^2 = 45$ 1A

(b) (i) 48 1A

(ii) $0 = -3 + 3(x+4)^2 + 3$ 1M

$0 = (x+4)^2$

$x = -4$

G 的 x 截距為 -4。 1A

72. (a) 設 $f(x) = ax^2 + bx$，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} 96 = 16a + 4b \\ 15 = 25a - 5b \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a = 3$ 及 $b = 12$。 1A

因此，$f(x) = 3x^2 + 12x$。

(b) 0 及 -4 1A

(c) $f(x) = k$

$3x^2 + 12x - k = 0$

$\Delta = 12^2 - 4(3)(-k) > 0$ 1M

$k > -12$ 1A

73. (a) 設 $C = r + sA$，其中 r 及 s 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} r + 2s = 62 \\ r + 6s = 74 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $r = 56$ 及 $s = 3$。 1A

所求成本 $= 56 + 3(13)$

$= \$95$ 1A

(b) $\dfrac{\text{較大的罐的表面面積}}{\text{較小的罐的表面面積}} = \left(\dfrac{8}{1}\right)^{\frac{2}{3}}$

$\dfrac{\text{較大的罐的表面面積}}{13} = 4$ 1M

較大的罐的表面面積 $= 52\text{ m}^2$

所求成本 $= 56 + 3(52)$

$= \$212$ 1A

74. (a) 設扇形的圓心角為 θ。

$$12^2\pi \times \frac{\theta}{360^\circ} = 30\pi$$ 1M

$$\theta = 75^\circ$$

所求之角為 75°。 1A

(b) 扇形的周界 r

$$= 2(12) + 2(12)\pi \times \frac{75^\circ}{360^\circ}$$ 1M+1M

$$= (5\pi + 24)\text{ cm}$$ 1A

75. (a) $OP = OR$ （已知）

$PS = RS$ （已知）

$OS = OS$ （公共邊）

$\triangle OPS \cong \triangle ORS$ (SSS)

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) $\angle POQ = 2 \times \angle PRQ = 20^\circ$ 1A

$\angle ROQ = \angle POQ = 20^\circ$

扇形面積 $= \pi(6)^2 \times \left(\frac{20^\circ + 20^\circ}{360^\circ}\right)^2$ 1M+1A

$= 4\pi\text{ cm}^2$ 1A

76. (a) 設 x cm 為 AD 的長度。

$$\frac{(6+x)(12)}{2}(10) = 1020 \qquad 1M$$

$$x = 11 \qquad 1A$$

AD 的長度為 11 cm。

(b) $CD = \sqrt{12^2 + (11-6)^2} = 13$ cm

柱體 $ABCDEFGH$ 的總表面面積

$$= (12+11+13+6)(10) + \frac{(6+11)(12)}{2}(2) \qquad 1M$$

$$= 624 \text{ cm}^2 \qquad 1A$$

77. (a) (i) $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{9}$ 1M

$\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$（捨去）

$r : R = 1 : 3$ 1A

(ii) 設較大圓柱的高為 h cm。

$$2\pi R^2 h = 27(\pi r^2(10)) \qquad 1M$$

$$h = 135\left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad 1M$$

$$h = 15 \qquad 1A$$

(b) $\frac{\text{較小圓柱的底半徑}}{\text{較大圓柱的底半徑}} = \frac{1}{3}$

$\frac{\text{較小圓柱的高 r}}{\text{較大圓柱的高 r}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{3}$ 1M

因此，兩圓柱不相似。不同意該宣稱。 1A

78. (a) 圓錐的斜高 $= \sqrt{72^2 + 96^2}$ 1M

$= 120\text{ cm}$

所求面積

$= \pi(72)(120) \times \dfrac{(96-60+28)^2 - (96-60)^2}{96^2}$ 1M+1M

$= 2625\pi\text{ cm}^2$ 1A

(b) 圓錐體積

$= \dfrac{1}{3}\pi(72)^2(96)$ 1M

$= 165\,888\pi\text{ cm}^3$

容器內水的體積

$= 165\,888\pi\left(\dfrac{64^3 - 36^3}{96^3}\right)$ 1M+1A

$= 40\,404\pi\text{ cm}^3$

$\approx 0.127\text{ m}^3$

$> 0.1\text{ m}^3$

同意該宣稱。 1A

79. (a) 設 $V\text{ cm}^3$ 為容器內牛奶的最終體積。

$\dfrac{V - 444\pi}{V} = \left(\dfrac{12}{16}\right)^3$ 1M+1A

$V = 678\pi$ 1A

(b) 設 r cm 為容器內牛奶的表面的最終半徑。

$\dfrac{1}{3}\pi r^2(16) = 768\pi$ 1M

$r = 12$

最終被浸濕的曲面面積

$= \pi(12)\sqrt{12^2 + 16^2}$ 1M

$= 240\pi$

$\approx 753.982\,236\,9\text{ cm}^2$

$< 800\text{ cm}^2$

不同意該宣稱。 1A

80. (a) 圓錐體積 $= \frac{1}{3}(15)^2\pi(36)$ 1M

$= 2700\pi\text{ cm}^3$

所求體積 $= 2700\pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2700\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$ 1M

$= 700\pi\text{ cm}^3$ 1A

(b) 圓錐曲面面積

$= \pi(15)\sqrt{15^2 + 36^2}$ 1M

$= 585\pi\text{ cm}^2$

所求面積 $= 585\pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 585\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$ 1M

$= 195\pi\text{ cm}^2$ 1A

81. (a) 設較大角錐及較小角錐的體積分別為 $x\text{ cm}^3$ 及 $y\text{ cm}^3$。

$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 1M

$\frac{x}{y} = \frac{27}{8}$

$\frac{x}{(84)(20) - x} = \frac{27}{8}$ 1M

$8x = 45\,360 - 27x$

$x = 1296$ 1A

(b) 設較大角錐的底正方形的邊長為 a cm。

$\frac{1}{3}(a)^2(12) = 1296$ 1M

$a = 18$ 或 -18（捨去）

較大角錐的總表面面積

$= 18^2 + 4 \times \left[\frac{1}{2}(18)(\sqrt{12^2 + \left(\frac{18}{2}\right)^2})\right]$ 1M

$= 864\text{ cm}^2$

較小角錐的總表面面積

$= 864 \times \frac{4}{9}$ 1M

$= 384\text{ cm}^2$ 1A

82. (a) 設 Y 的底半徑為 r cm。

$$\frac{1}{3}r^2\pi(24) = 800\pi \qquad \text{1M}$$

$$r = 10 \qquad \text{1A}$$

Y 的底半徑為 10 cm。

(b) Z 的體積 $= \pi(10)^2(20) + 800\pi$ 1M

$= 2800\pi\ \text{cm}^3$

設 Z 的高為 h cm。

$$\frac{1}{3}(20)^2 h = 2800\pi$$

$$h = 21$$

$\dfrac{Y\text{ 的底半徑}}{Z\text{ 的底半徑}} = \dfrac{1}{2}$ 及 $\dfrac{Y\text{ 的高}}{Z\text{ 的高}} = \dfrac{24}{21} \neq \dfrac{1}{2}$ 1M

因此，Y 與 Z 不相似。 1A

(c) X 及 Y 的曲面面積之和

$= 2\pi(10)(20) + \pi(10)(\sqrt{24^2 + 10^2})$ 1M

$= 660\pi\ \text{cm}^2$

Z 的曲面面積

$= \pi(20)\sqrt{20^2 + 21^2}$

$= 580\pi\ \text{cm}^2 < 660\pi\ \text{cm}^2$ 1A

同意該宣稱。 1A

83. (a) 水的體積 $= \pi(8)^2(64)$ 1M

$= 4096\pi\ \text{cm}^3$ 1A

(b) 圓錐的體積 $= \dfrac{\pi}{3}(20)^2(60)$ 1M

$= 8000\pi\ \text{cm}^3$

設水深為 h cm。

$$\frac{4096\pi}{8000\pi} = \left(\frac{h}{60}\right)^3 \qquad \text{1M+1A}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{h}{60}$$

$$h = 48 \qquad \text{1A}$$

水深為 48 cm。

(c) 球體與水的總體積

$= 4096\pi + \dfrac{4}{3}\pi(14)^3$ 1M+1M

$= \dfrac{23\,264}{3}\pi\ \text{cm}^3$

$< 8000\pi\ \text{cm}^3$

水不會溢出。 1A

84. (a) 所求體積 $= \frac{1}{3}\pi(48)^2(96)$ 1M

$= 73\,728\pi \text{ cm}^3$ 1A

(b) (i) 所求體積 $= \frac{2}{3}\pi(60)^3$ 1M

$= 144\,000\pi \text{ cm}^3$ 1A

(ii) 設 h cm 為奶表面以下的平截頭體的高度。

$h = \sqrt{60^2 - 48^2} = 36$ 1M

容器內的牛奶的體積

$= 144\,000\pi - \left[73\,728\pi - 73\,728\pi\left(\frac{96-36}{96}\right)^3\right]$ 1M

$= 88\,272\pi \text{ cm}^3$

$\approx 0.277 \text{ m}^3$

$< 0.3 \text{ m}^3$

不同意該宣稱。 1A

85. (a) 設較小球體的半徑為 r cm。

$\frac{4}{3}\pi(2r)^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 = 324\pi$ 1M+1A

$r^3 = 27$

$r = 3$

所求體積 $= \frac{4}{3}\pi(6)^3 = 288\pi \text{ cm}^3$ 1A

(b) 所求面積 $= 4\pi(6)^2 + 4\pi(3)^2$ 1M

$= 180\pi \text{ cm}^2$ 1A

86. (a) 設該圓錐體的高為 h cm。

$$\pi(14)(\sqrt{h^2+14^2}) = 700\pi \qquad \text{1M+1M}$$

$$(\sqrt{h^2+196})^2 = 50^2$$

$$h^2+196 = 2500$$

$$h = 48 \quad \text{或} \quad -48\text{（捨去）} \qquad \text{1A}$$

(b) (i) 原來的圓錐體的體積

$$= \frac{1}{3}\pi(14)^2(48) \qquad \text{1M}$$

$$= 3136\pi \text{ cm}^3$$

所求體積

$$= 3136\pi - 3136\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1+15}}\right)^3 \qquad \text{1M}$$

$$= 3087\pi \text{ cm}^3 \qquad \text{1A}$$

(ii) 設該球體的半徑為 r cm。

$$2\times\frac{4}{3}\pi r^3 = 3087\pi \qquad \text{1M}$$

$$r^3 = \frac{9261}{8}$$

$$r = \frac{21}{2}$$

所求直徑為 21 cm。 1A

87. (a) 較小球體的半徑 $= 9\times\sqrt{\frac{4}{9}}$ 1M

$= 6$ cm

所求體積 $= \frac{4}{3}\pi(6)^3$ 1M

$= 288\pi \text{ cm}^3$ 1A

(b) 設圓錐 B 的高為 h cm。

$$288\pi + \frac{4}{3}\pi(9)^3 = \frac{1}{3}(6)^2(10) + \frac{1}{3}\pi(12)^2(h) \qquad \text{1M}$$

$$h = 23.75 \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\text{圓錐 } A \text{ 的半徑}}{\text{圓錐 } B \text{ 的半徑}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{圓錐 } A \text{ 的高}}{\text{圓錐 } B \text{ 的高}} = \frac{10}{23.75} = \frac{8}{19} \neq \frac{1}{2} \qquad \text{1M}$$

兩圓錐不相似。

該宣稱不正確。 1A

88. (a) 平均值 $= \dfrac{10+10+11+...+36}{20} = 18$ 1A

中位數 $= 16$ 1A

(b) (a) 平均值 $= \dfrac{18(20)+18(4)}{24}$

18 1A

(b) 設 a 及 b 為另外兩份問卷記錄得的時數。

$$\frac{a+b+19+20}{4} = 18$$

$$a+b = 33$$ 1M

若兩中位數相同，則可得 $a \le 16$ 及 $b \le 16$。 1M

故此，$a+b \le 32$，是為不可能。

因此，不可能使兩中位數相同。 1A

89. (a) (i) 1 1A

(ii) 8 1A

(b) (i) 3 1A

(ii) 19 1A

(c) $2 = \dfrac{0+1\times 2+2\times 9+3\times 6+4\times 7}{k+2+9+6+7}$ 1M

$2k+48 = 66$

$k = 9$ 1A

90. (a) 平均值 $= \dfrac{1(15)+2(9)+...+7(5)}{15+9+...+5}$ 1M

$= 3$ 1A

(b) 中位數 $= 2$，眾數 $= 1 \ne 2$。 1A

它們不相同。 1A

(c) (i) 42 1A

(ii) 11 1A

(iii) 10 1A

91. (a) 四分位數間距 $= 38 - 23 = 15$ 克 1M+1A

分佈域 $= (50 + w) - 11 = 3 \times 15$ 1M

$w = 6$ 1A

(b) 眾數 $= 38$ 1A

所求概率 $= \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$ 1A

92. (a) 中位數 $= 31$ 1A

眾數 $= 23$ 1A

(b) (i) 由於 $0 \le a \le 5$ 及 $7 \le b \le 9$，

可得 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 7 \end{cases}$、$\begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \end{cases}$ 。 1A+1A

(ii) 所求概率 $= \dfrac{3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 9 + 9}{20 \times 13}$ 1M

$= \dfrac{8}{65}$ 1A

93. (a) 平均值 $= \dfrac{40 + 42 + \ldots + 79}{20}$

$= 55\,\text{kg}$ 1A

中位數 $= 52\,\text{kg}$ 1A

分佈域 $= 79 - 40$

$= 39\,\text{kg}$ 1A

(b) 設 a kg 及 b kg 為該兩名學生的體重，其中 $a \le b$。

$\dfrac{a + b + 55(20)}{22} = 55 + 1$ 1M

$a + b = 132$

新的分佈域為 40 kg。

<u>情況 1：$a = 39$</u> 1M

$b = 132 - 39 = 93$

新的分佈域 $= 93 - 39 = 54\,\text{kg}$

不可能。

<u>情況 2：$40 \le a \le 80$</u>

$a = 132 - 80 = 52$ 1A

新的分佈域 $= 80 - 40 = 40\,\text{kg}$

因此，該兩名學生的體重為 52 kg 及 80 kg。 1A

94. (a) $11 + a = 11 + b + 4$ 1M

$a = b + 4$

留意 $a > 11$ 及 $4 < b < 10$。

因此，可得 $(a,\ b) = (12,\ 8)$ 或 $(13,\ 9)$。 1A+1A

(b) (i) 當四名小童的年歲為 7、8、9 及 10 時，中位數最大。 1M

最大可取中位數為 8。 1A

(ii) 當四名小童的年歲為 6、7、8 及 9 時，平均值最小。 1M

利用 (a)，共有兩個情況。

情況 1： $a = 12$ 及 $b = 8$

該組小童的年歲的平均值

$$= \frac{12(6) + 13(7) + 12(8) + 9(9) + 4(10)}{12 + 13 + 12 + 9 + 4}$$

$$= 7.6$$

情況 2： $a = 13$ 及 $b = 9$

該組小童的年歲的平均值

$$= \frac{12(6) + 14(7) + 12(8) + 10(9) + 4(10)}{12 + 14 + 12 + 10 + 4}$$

$$\approx 7.615\,384\,615$$

因此，該組小童的年歲的最小可取平均值為 7.6。 1A

95. (a) $a = 18.1 - 6.8$

$= 11.3$ 1A

$b = 12.1 + 3.2$

$= 15.3$ 1A

(b) 在訓練後，該些學生完成 100 m 賽跑的最長所需時間為 15.2 s，小於訓練前的分佈的上四分位數。 1M

因此，同意該宣稱。 1A

96. (a) 分佈域 $= 91 - 18$ 1M

$= 73$ 千元 1A

四分位數間距 $= 63 - 42$

$= 21$ 千元 1A

(b) 該畫廊餘下的油畫的價錢的平均值

$= \dfrac{(33)(53) - 32 - 34 - 58 - 59}{33 - 4}$ 1M

$= 54$ 千元 1A

由於 32 及 34 小於 55，而 58 及 59 大於 55。

餘下的油畫的價錢的中位數為 55 千元。 1A

97. (a) 平均值 $= \dfrac{4(1) + 16(2) + 20(3) + 16(4) + 8(5) + 4(6) + 4(7)}{4 + 16 + 20 + 16 + 8 + 4 + 4}$

$= 3.5$ 1A

四分位數間距 $= 4 - 2$ 1M

$= 2$ 1A

標準差 $= 1.5$ 1A

(b) 新標準差 ≈ 1.451456116

標準差的減小 $\approx 1.5 - 1.451456116$

≈ 0.0485 1A

98. 中位數 $= 1$ 1A

眾數 $= 2$ 1A

標準差 ≈ 0.889 1A

99. (a) 中位數 = \$69 1A

分佈域 = 22 = (80 + b) − 61

$b = 3$ 1A

平均值 = $70 = \dfrac{61 + 61 + \ldots + (70 + a) + \ldots + 83}{15}$ 1M

$a = 2$ 1A

標準差 ≈ \$7.33 1A

(b) 所求概率 = $\dfrac{6}{15}$ 1M

$= \dfrac{2}{5}$ 1A

100. (a) $\dfrac{12 + k + 16}{12 + k + 16 + 9 + 11 + 4} = \dfrac{7}{10}$ 1M

$k = 28$ 1A

(b) 分佈域 = 5 1A

四分位數間距 = 26 − 24 = 2 1A

標準差 ≈ 1.43 1A

101. (a) 平均值 = 5.4 1A

中位數 = 5.5 1A

標準差 ≈ 0.917 1A

(b) 新的中位數 = 5 1A

中位數的改變 = 5 − 5.5 = −0.5 1A

102. (a) 中位數 = 31 = 30 + b

$b = 1$ 1A

14 = 36 − (20 + a) 1M

$a = 2$ 1A

(b) (i) 原來的眾數 = 36，對應頻數為 4。

第二高的頻數為 2。

不論任何球員退出球隊，數據 36 對應的頻數最小為 3。 1M

因此，新的眾數仍然為 36。

眾數沒有改變。 1A

(ii) 分佈域只有當最年輕或最年長的球員退出球隊時改變， 1M

對應新的標準差分別為 7.16 及 7.13。

最大可取標準差為 7.16。 1A

103. (a) $2 = \dfrac{1(8)+2(5)+3n+4(1)}{8+5+n+1}$ 1M

$28+2n = 22+3n$

$n = 6$

中位數 $= 2$ 1A

四分位數間距 $= 3-1 = 2$ 1M+1A

方差 $= 0.9$ 1A

(b) 原來的分佈域為 3。

該兩名學生擁有計算機的總數目為 4。

只有 $2+2$ 及 $1+3$ 這兩個數目的可能性。

在這兩個情況中，新的分佈域仍然為 3。 1M

該分佈的分佈域沒有因該兩名學生退學而改變。 1A

104. (a) $8 = 72-(60+c)$ 1M

$c = 4$ 1A

(b) (i) 平均值 $= 69 = \dfrac{(50+a)+60+60+\ldots+(80+b)}{20}$ 1M

$1380 = 1373+a+b$

$a+b = 7$ 1A

分佈域 $= (80+b)-(50+a) > 34$

$b-a > 4$ 1A

故此，$(a,\ b) = (0,\ 7)$ 或 $(1,\ 6)$。 1A

(ii) 當 $(a,\ b) = (0,\ 7)$ 時，標準差 ≈ 7.58 s。 1M

當 $(a,\ b) = (1,\ 6)$ 時，標準差 ≈ 7.34 s。

最小標準差為 7.34 s。 1A