**REG-EOC-2425-ASM-SET 4-MATH**
**建議題解**

**多項選擇題**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. D | 2. A | 3. D | 4. D | 5. C |
| 6. A | 7. D | 8. A | 9. B | 10. C |
| 11. D | 12. C | 13. C | 14. C | 15. D |
| 16. B | 17. D | 18. A | 19. C | 20. A |
| 21. C | 22. A | 23. D | 24. C | |

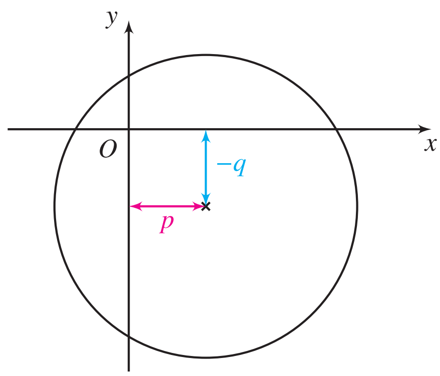
1. $\boxed{\text{D}}$

圓心 $(p, q)$ 在第四象限。故此，$p > 0$ 及 $q < 0$。

I. ✓。

II. ✓。$p - r < 0$
（長度 $p$ 較半徑短）

III. ✓。$\sqrt{p^2 + q^2} < r$
（原點與圓心的距離小於半徑）



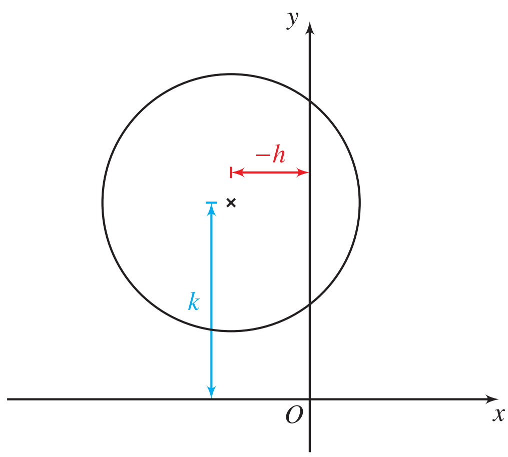

2. $\boxed{\text{A}}$

圓心在第二象限內。所以，$h < 0$ 及 $k > 0$。

I. ✓。$k + h = k - (-h) > 0$
（與 $x$ 軸的距離大於與 $y$ 軸的距離）

II. ✓。$r - h = r + (-h) > 0$
（長度為正數）

III. ✗。$r - k < 0$
（半徑小於與 $x$ 軸的距離）



3. $\boxed{\text{D}}$

I. 半徑 $= \sqrt{3^2 + 4^2 - 10} = \sqrt{15}$

II. 半徑 $= \sqrt{4^2 + 3^2 - 10} = \sqrt{15}$

III. 半徑 $= \sqrt{5^2 - 10} = \sqrt{15}$

所有的圓均有相同面積。
答案為 D。

4. $\boxed{\text{D}}$

$C：x^2 + y^2 + 3x + 4y - \frac{25}{2} = 0$

圓心 $\left(-\frac{3}{2},\ -2\right)$

半徑 $= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 + \frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

5. $\boxed{\text{C}}$

圓心 $\left(-\frac{k}{2},\ -\frac{k+1}{2}\right)$

$$-\frac{k}{2} - \frac{k+1}{2} + 1 = 0$$
$$k = \frac{1}{2}$$

6. $\boxed{\text{A}}$

$L$ 通過圓心 $\left(\frac{k}{-2},\ -2\right)$。

$$\frac{3-(-2)}{16 - \frac{k}{-2}} = \frac{1}{2}$$
$$k = -12$$

7. $\boxed{\text{D}}$

直徑通過圓心 (4, 3)。

$$\frac{-5-3}{k-4} = -4$$
$$k = 6$$

8. $\boxed{\text{A}}$

設 $S$ 的圓心為 $G$。$G$ 的坐標為 $(1,\ 2)$。留意 $GM \perp AB$。

$GM$ 的斜率 $= \dfrac{2+2}{1-3} = -2$

$AB$ 的斜率 $= \dfrac{1}{2}$

所求方程為

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$x - 2y - 7 = 0$$

9. $\boxed{\text{B}}$

半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$

所求面積 $= 4 \times \dfrac{(3)(3)}{2}$

$= 18$

10. $\boxed{\text{C}}$

圓心距離 $= \sqrt{(3+3)^2 + (7+1)^2}$

$= 10$

$= 8 + 2$

兩圓外切。

11. $\boxed{\text{D}}$

將該點的坐標代入方程的左式。

A. $10^2 + 6^2 - 8(10) + 4(6) - 16 = 64 > 0$。$W$ 在圓外。

B. $8^2 + 8^2 - 8(8) + 4(8) - 16 = 80 > 0$。$X$ 在圓外。

C. $6^2 + 6^2 - 8(6) + 4(6) - 16 = 32 > 0$。$Y$ 在圓外。

D. $9^2 + 0 - 8(9) - 16 = -7 < 0$。$Z$ 在圓內。

12. $\boxed{\text{C}}$

I. ✓。圓心的坐標為 $(-1,\ 0)$。
圓心在 $x$ 軸上。

II. ✓。半徑 $= \sqrt{9} = 3$

III. ✗。當 $y = 0$，

$$(x + 1)^2 + 0 = 9$$

$$x = 2 \quad 或 \quad -4$$

該圓與 $x$ 軸相交於 $(2,\ 0)$ 及 $(-4,\ 0)$。

13. $\boxed{\text{C}}$

$C_2$：$x^2 + y^2 + 6x - 8y + \dfrac{25}{2} = 0$

I. ✓。$G_1\,(8,\ -6)$、$G_2\,(-3,\ 4)$。$OG_1 = 10 = 2OG_2$

II. ✗。$m_{OG_1} \times m_{OG_2} = \dfrac{-6}{8} \times \dfrac{4}{-3} \neq -1$

III. ✓。$C_1$ 的半徑 $= \sqrt{8^2 + 6^2 - 75} = 5$，$C_2$ 的半徑 $= \sqrt{3^2 + 4^2 - \dfrac{25}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$C_1$ 的面積與 $C_2$ 的面積之比為 $5 : \left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 : 1$。

14. $\boxed{\text{C}}$

$C_1$：$x^2 + y^2 + 2x + 4y - \dfrac{149}{2} = 0$。

I. ✓。$(-1)^2 + (2)^2 - 8(-1) - 20(2) - 53 = 0$。它在 $C_2$ 上。

II. ✗。$C_1$ 的半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 + \dfrac{149}{2}} = \sqrt{79.5}$ 而 $C_2$ 的半徑 $= \sqrt{4^2 + 10^2 + 53} = 13$。

III. ✓。兩圓心的距離 $= 13$，在兩半徑的和與差之間，即在 $13 - \sqrt{79.5}$ 與 $13 + \sqrt{79.5}$ 之間。

所以，它們相交於兩相異點。

15. $\boxed{\text{D}}$

$C$: $x^2 + y^2 - 3x + y - \dfrac{13}{2} = 0$

I. ✗。

圓心的坐標為 $\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$。

II. ✓。

$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$

半徑 $= \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{13}{2}} = 3 < \sqrt{10}$

III. ✓。

將圓心記為 $G$。

$AB$ 的斜率 $= \dfrac{1+2}{2-1} = 3$

$BG$ 的斜率 $= \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{2}} = 3$

$A$、$B$ 與 $G$ 共線。

因此，$G$ 在通過 $A$ 及 $B$ 的直線上。

16. $\boxed{\text{B}}$

I. ✓。半徑 $= \sqrt{3^2 + 6^2 + 4} = 7$

II. ✗。圓心 $(3,\ -6)$ 在第四象限。

III. ✓。$0^2 + 0^2 - 6(0) + 12(0) - 4 = -4 < 0$
原點在圓內。

17. $\boxed{\text{D}}$

I. ✓。$G_1\ (-2,\ 6)$，$G_2\ (2,\ 4)$。$OG_2$ 的斜率 $\times$ $G_1G_2$ 的斜率 $= \dfrac{4}{2} \times \dfrac{6-4}{-2-2} = -1$

II. ✓。圓心的距離 $= \sqrt{(2+2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{20}$
$C_1$ 的半徑 $= \sqrt{2^2 + 6^2 + 40} = \sqrt{80} = 2\sqrt{20}$；$C_2$ 的半徑 $= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$
由於圓心的距離 = 半徑之差，該兩圓內切。

III. ✓。面積比 $= \left(\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{20}}\right)^2 = 4$

18. $\boxed{\text{A}}$

$x^2 + y^2 - x - \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{4} = 0$

I. ✗。圓心 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

II. ✗。半徑 $= \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{4} \neq 2$

III. ✓。半徑 $= \dfrac{1}{4}$ = 圓心的 $y$ 坐標。
故此，該圓與 $x$ 軸相切。

19. $\boxed{\text{C}}$

$C_1$: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$
$C_2$: $x^2 + y^2 + 6x - 8y + \dfrac{33}{2} = 0$
$G_1$ 及 $G_2$ 的坐標分別為 $(4, 3)$ 及 $(-3, 4)$。

I. ✓。
$G_1O$ 的斜率 $= \dfrac{3-0}{4-0} = \dfrac{3}{4}$
$G_2O$ 的斜率 $= \dfrac{4-0}{-3-0} = -\dfrac{4}{3} = -1 \div \dfrac{3}{4}$
因此，$G_1O$ 垂直於 $G_2O$。

II. ✗。
$C_1$ 的面積 $= \pi\left(\sqrt{4^3 + 3^2 - 20}\right)^2 = 5\pi$
$C_2$ 的面積 $= \pi\left(\sqrt{3^2 + 4^2 - \dfrac{33}{2}}\right)^2 = \dfrac{17\pi}{2} > 5\pi$

III. ✓。
$OG_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
$OG_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

20. $\boxed{\text{A}}$

$x^2 + y^2 - 9x + 8y - \dfrac{1}{2} = 0$

I. ✓。$0 + y^2 - 0 + 8y - \dfrac{1}{2} = 0$
$y \approx 0.0620$ 或 $-8.06$
圓與 $y$ 軸有兩個交點。

II. ✗。圓心的坐標為 $\left(\dfrac{9}{2}, -4\right)$。

III. ✗。代 $(0, 0)$，左式 $= -\dfrac{1}{2} < 0$。圓心在圓內。

21. $\boxed{\text{C}}$

I. ✗。$C_1$ 及 $C_2$ 的圓心的坐標分別為 $(-4, 3)$ 及 $(4, -3)$。
它們不是同心圓。

II. ✓。兩圓的半徑 $= \sqrt{4^3 + 3^2 + 25} = \sqrt{50}$
直徑長度相等。

III. ✓。圓心與 $y$ 軸的距離均為 4，小於半徑。
$C_1$ 及 $C_2$ 均與 $y$ 軸有兩相異交點。

22. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。$C_1$ 的半徑 $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$；$C_2$ 的半徑 $= \sqrt{25} = 5$

II. ✓。圓心的距離 $= \sqrt{(3-0)^2 + (0+4)^2} = 5$

III. ✗。(0, 0) 不滿足 $C_2$ 的方程。$C_2$ 不通過原點。

23. $\boxed{\text{D}}$

I. ✓。(0, 0) 滿足該方程。

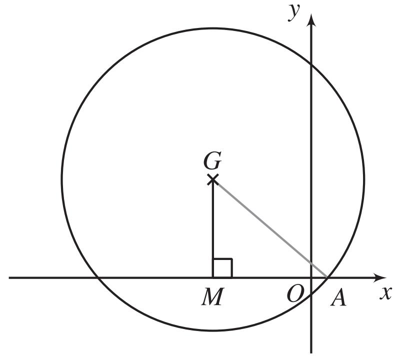
II. ✗。圓心的坐標為 (0, −4)。
它不在 $x$ 軸上。

III. ✓。半徑 $= \sqrt{0^2 + 4^2 - 0} = 4$
圓心與 $x$ 軸的距離等於半徑。
$C$ 與 $x$ 軸相切。

24. $\boxed{\text{C}}$

將圓心記為 $G$。

設 $M$ 為 $x$ 軸上的一點使得 $GM$ 垂直於 $x$ 軸。
設 $A$ 為該圓與正 $x$ 軸的交點。
$M$ 的坐標為 (−3, 0)。
$AM = \dfrac{8}{2} = 4$ 及 $A$ 的坐標為 (1, 0)。
圓的半徑 $= \sqrt{(1+3)^2 + (0-3)^2} = 5$
所求方程為 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$。



**結構式試題**

25. (a) $(x-6)^2+(y+5)^2=6^2+5^2$ 1M

$(x-6)^2+(y+5)^2=61$ 1A

(b) (i) $H=(12,\ 0)$ 及 $K=(0,\ -10)$ 1A+1A

(ii) $O$、$P$、$Q$ 共線。 1A

(iii) 所求面積 $=12\times 10$ 1M

$=120$ 1A

26. (a) 由於 $FB=FE$，$\angle FBE=\angle FEB$。

$\angle FCA=\dfrac{1}{2}\angle FEA$ 1M

在 $\triangle ABC$ 中，

$$\angle ABC+\angle BCA=\angle CAE$$

$$\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ABC=\theta \quad 1M$$

$$\angle ABC=\frac{2\theta}{3} \quad 1A$$

(b) (i) $\angle ABC=\dfrac{2}{3}(45^\circ)=30^\circ$ 1M

$BE=\dfrac{CE}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}CE$ 及 $AE=\dfrac{CE}{\tan 45^\circ}=CE$

$$AB=BE-AE$$

$$0-(1-\sqrt{3})=CE(\sqrt{3}-1) \quad 1M$$

$$CE=1 \quad 1A$$

$C$ 的坐標 $=(0+1,\ 0+1)=(1,\ 1)$ 1A

$D$ 的坐標 $=(0+1+1,\ 0)=(2,\ 0)$ 1A

(ii) 圓 $ADCF$ 的方程為 $(x-1)^2+y^2=1$ 1A

27. (a) $y^2-12y+32=0$

$y=4$ 或 $8$

$A$ 的坐標為 $(0,\ 4)$。 1A

(b) $c=4$ 1A

$P$ 的坐標為 $(6,\ 6)$。 1M

$AP$ 的斜率 $=\dfrac{6-4}{6-0}=\dfrac{1}{3}$

$L$ 的斜率 $=m=-3$ 1A

(c) 設 $B$ 的 $x$ 坐標為 $b$。

由於 $B$ 在 $y=-3x+4$ 上，$B$ 的坐標為 $(b,\ -3b+4)$。

$$\sqrt{b^2+(-3b+4-4)^2}=\sqrt{(0-6)^2+(4-6)^2} \quad 1M$$

$$b^2+9b^2=40$$

$b=2$ 或 $-2$（捨去）

$B$ 的坐標為 $(2, -2)$。 1A

$C_2$ 的方程為

$$(x+10)^2+(y+6)^2=(2+10)^2+(-2+6)^2 \quad \text{1M}$$

$$(x+10)^2+(y+6)^2=160 \quad \text{1A}$$

28. (a) $OQ = OP = r$ 1A

$AP = AQ = 4 - r$ 及 $BP = BR = 3 - r$ 1M+1A

(b) $(3-r)+(4-r)=\sqrt{3^2+4^2}$ 1M

$$r = 1$$

$C$ 的坐標為 $(1, 1)$。 1A

(c) 圓的方程為

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1^2$$

$$x^2+y^2-2x-2y+1=0 \quad \text{1A}$$

29. (a) 設圓的方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中 $D$、$E$ 及 $F$ 均為常數。 1A

$$\begin{cases} 1+4+D+2E+F=0 & (1) \\ 9+3E+F=0 & (2) \\ 16+4D+F=0 & (3) \end{cases} \quad \text{1M}$$

考慮 $(2)-(1)$ 及 $(3)-(2)$。

$$\begin{cases} -D+E=-4 \\ 4D-3E=-7 \end{cases} \quad \text{1M}$$

求解後，$D=-19$ 及 $E=-23$。 1A

當 $D=-19$ 及 $E=-23$ 時，$F=-9-3(-23)=60$。

圓的方程為 $x^2+y^2-19x-23y+60=0$。 1A

(b) 圓心 $=\left(\frac{19}{2}, \frac{23}{2}\right)$ 1A

圓的半徑 $=\sqrt{\left(\frac{19}{2}\right)^2+\left(\frac{23}{2}\right)^2-60}=\frac{5\sqrt{26}}{2}$ 1A

(c) 若圓上的兩點能成直徑，它們的中點必需為圓心。

$AB$ 的中點 $=\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 1M

$BC$ 的中點 $=\left(2, \frac{3}{2}\right)$

$CA$ 的中點 $=\left(\frac{5}{2}, 1\right)$

以上皆不是圓的圓心。

因此，該宣稱不正確。 1A



– 試卷完 –