REG-EOC-2425-ASM-SET 3-MATH
建議題解

多項選擇題

1. A	2. A	3. C	4. D	5. C
6. C	7. C	8. C	9. A	10. D
11. C	12. A	13. C	14. B	15. B
16. B	17. B	18. C	19. A	20. A
21. D	22. B	23. A	24. C	25. B
26. A	27. D	28. C	29. A	30. B

1. $\boxed{\text{A}}$

所求方程為

$$(x+2)^2+(y-5)^2=(2+2)^2+(1-5)^2$$
$$x^2+y^2+4x-10y-3=0$$

2. $\boxed{\text{A}}$

所求方程為

$$(x+2)^2+(y-4)^2=(3+2)^2+(5-4)^2$$
$$x^2+y^2+4x-8y-6=0$$

3. $\boxed{\text{C}}$

半徑 $=0-(-4)=4$。該方程為

$$(x+4)^2+(y-3)^2=4^2$$
$$x^2+y^2+8x-6y+9=0$$

4. $\boxed{\text{D}}$

所求方程為

$$(x+5)^2+(y-12)^2=(0+5)^2+(0-12)^2$$
$$(x+5)^2+(y-12)^2=169$$

5. $\boxed{\text{C}}$

圓心 $(-10,\ 12)$。圓方程為 $x^2 + y^2 + 20x - 24y + F = 0$ 的形式，其中 F 為一常數。
AB 的中點的坐標為 $(-10,\ 0)$。
因此，A 及 B 的 x 坐標為 $-10 \pm 16 = 6$ 或 -26。

$$\begin{aligned}(6)^2 + (0)^2 + 20(6) - 24(0) + F &= 0 \\ F &= -156\end{aligned}$$

C：$x^2 + y^2 + 20x - 24y - 156 = 0$

6. $\boxed{\text{C}}$

該圓通過點 $(5 \pm 12,\ 0)$，即 $(-7,\ 0)$ 及 $(17,\ 0)$。
圓心 $(5,\ -7) \Rightarrow$ 該圓為 $x^2 + y^2 - 10x + 14y + F = 0$ 的形式。
代 $(-7,\ 0)$，$F = -119$。

7. $\boxed{\text{C}}$

半徑 $= \sqrt{\left(\dfrac{8}{2}\right)^2 + 3^2} = 5$
所求方程為

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= 5^2 \\ x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 &= 0\end{aligned}$$

8. $\boxed{\text{C}}$

圓心為 AB 的中點。
圓心的坐標為 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$。
所求方程為

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 &= \left(0 + \frac{3}{2}\right)^2 + (1 - 2)^2 \\ x^2 + y^2 + 3x - 4y + 3 &= 0\end{aligned}$$

9. $\boxed{\text{A}}$

圓心為 AB 的中點。
圓心的坐標為 $(-1,\ -1)$.
所求方程為

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 + (y + 1)^2 &= (2 + 1)^2 + (3 + 1)^2 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 &= 0\end{aligned}$$

10. $\boxed{\text{D}}$

兩點的距離 $= \sqrt{(0+8)^2 + (0+6)^2} = 10 = 2(5)$
連接兩點的線段因此為所求的圓的一直徑。
圓心的坐標為 $(-4,\ -3)$。
所求方程為

$$(x+4)^2 + (y+3)^2 = 5^2$$
$$x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$$

11. $\boxed{\text{C}}$

圓心為 AC 的中點，坐標為 $(7,\ 5)$。
所求方程為 $x^2 + y^2 - 14x - 10y + F = 0$，其中 F 為一常數。

$$8^2 + 8^2 - 14(8) - 10(8) + F = 0$$
$$F = 64$$

12. $\boxed{\text{A}}$

由於 $\angle AOB = 90°$，其中 O 為原點。
該圓的圓心為 AB 的中點。
圓心的坐標為 $\left(\frac{-3}{2},\ 2\right)$。
所求方程為

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \left(0 + \frac{3}{2}\right)^2 + (0-2)^2$$
$$x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$$

13. $\boxed{\text{C}}$

圓心為 $(4,\ 0)$ 和 $(0,\ -6)$ 的中點。
圓心的坐標為 $(2,\ -3)$。
所求方程為

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = (0-2)^2 + (0+3)^2$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

14. $\boxed{\text{B}}$

連接 $(0,\ 8)$ 與 $(-6,\ 0)$ 的線段為直徑。
圓心的坐標為 $(-3,\ 4)$。
所求方程為 $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ （通過原點）。

15. $\boxed{\text{B}}$

圓心的 x 坐標 $= \dfrac{1+5}{2} = 3$
圓心的 y 坐標 $= \dfrac{1+(-3)}{2} = -1$
半徑 $= 5 - 3 = 2$
所求方程為 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$。

16. $\boxed{\text{B}}$

設 C 的坐標為 $(h,\ 0)$，其中 $h < 0$。
由於 $y = 3$ 為該圓的一切線，圓的半徑為 3。
由於 $x = 1$ 為該圓的一切線，可得

$$1 - h = 3$$
$$h = -2$$

所求方程為 $(x+2)^2 + y^2 = 9$。

17. $\boxed{\text{B}}$

半徑 $= 3$
所求方程為

$$(x+5)^2 + (y+3)^2 = 3^2$$
$$x^2 + y^2 + 10x + 6y + 25 = 0$$

18. $\boxed{\text{C}}$

圓心的 y 坐標 $= 2$
圓心的 x 坐標 $= \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$
半徑 $= \dfrac{5}{2}$
所求方程為

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$x^2 + y^2 - 5x - 4y + 4 = 0$$

19. $\boxed{\text{A}}$

圓心的 y 坐標 $= \dfrac{(-1)+(-9)}{2} = -5$
圓的半徑 $= 0 - (-5) = 5$
設圓心的坐標為 $(h,\ -5)$。

$$\sqrt{(h-0)^2 + (-5+1)^2} = 5$$
$$h = -3 \quad 或 \quad （捨去）$$

20. $\boxed{\text{A}}$

圓心的 x 坐標 $= \dfrac{2+8}{2} = 5$
半徑 = 5 及圓心的 y 坐標 = 4
所求方程為

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 16$$
$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$$

21. $\boxed{\text{D}}$

設半徑為 r。
圓心的坐標為 $(r,\ -r)$。
圓心在 L 上。

$$(r) + 2(-r) + 4 = 0$$
$$r = 4$$

所求方程為

$$(x-4)^2 + (y+4)^2 = 4^2$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$$

22. $\boxed{\text{B}}$

設圓心的坐標為 $(h,\ 0)$。
C 的方程為 $(x-h)^2 + y^2 = (-h)^2$。

$$(-2-h)^2 + (-4)^2 = h^2$$
$$h^2 + 4h + 20 = h^2$$
$$h = -5$$

所求方程為

$$(x+5)^2 + y^2 = 5^2$$
$$x^2 + y^2 + 10x = 0$$

23. $\boxed{\text{A}}$

設圓心的坐標為 $(1,\ k)$。
C 的方程為 $(x-1)^2+(y-k)^2=k^2$。

$$\begin{aligned}(5-1)^2+(8-k)^2&=k^2\\ k^2-16k+80&=k^2\\ k&=5\end{aligned}$$

所求方程為

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-5)^2&=5^2\\ x^2+y^2-2x-10y+1&=0\end{aligned}$$

24. $\boxed{\text{C}}$

設該圓的半徑為 r。
圓心的坐標為 $(-r,\ r)$。
C 的方程為 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$。

$$\begin{aligned}\frac{r-12}{-r-0}&=\frac{12-0}{0+24}\\ 2r-24&=-r\\ r&=8\end{aligned}$$

所求方程為

$$\begin{aligned}(x+8)^2+(y-8)^2&=8^2\\ x^2+y^2+16x-16y+64&=0\end{aligned}$$

25. $\boxed{\text{B}}$

設圓心的坐標為 $(h,\ 0)$。

$$\begin{aligned}\sqrt{(h-0)^2+(5-0)^2}&=\sqrt{(h-6)^2+(1-0)^2}\\ h^2+25&=h^2-12h+37\\ h&=1\end{aligned}$$

所求方程為

$$\begin{aligned}(x-1)^2+y^2&=(0-1)^2+5^2\\ x^2+y^2-2x-25&=0\end{aligned}$$

26. $\boxed{\text{A}}$

A. ✓。
B. ✗。圓心 $(1,\ -7)$ 不在 L 上。
C. ✗。圓心 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)$ 不在 L 上。
D. ✗。$(3,\ 4)$ 不在圓上。

27. $\boxed{\text{D}}$

A. ✗。圓心 $\left(-\frac{5}{2},\ 5\right)$ 不在直線 $x+y-1=0$ 上。

B. ✗。圓心 $\left(\frac{19}{2},\ -4\right)$ 不在直線 $x+y-1=0$ 上。

C. ✗。圓心 $\left(\frac{17}{2},\ -\frac{19}{2}\right)$ 不在直線 $x+y-1=0$ 上。

D. ✓。圓心 $\left(-\frac{17}{2},\ \frac{19}{2}\right)$ 在直線 $x+y-1=0$ 上，
且 $(0,\ 0)$ 及 $(3,\ 4)$ 均滿足該方程。

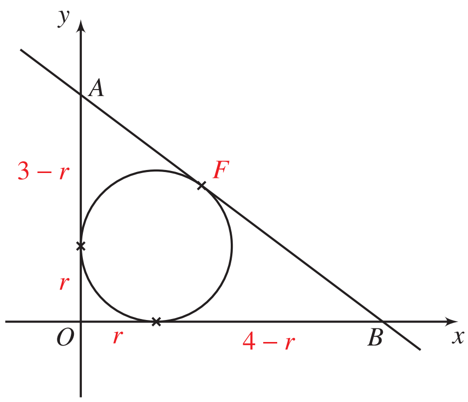
28. $\boxed{\text{C}}$

設 F 為 AB 與該圓的切線。設 r 為半徑。

$AF = 3 - r$ 及 $BF = 4 - r$

$$(3-r)+(4-r)=\sqrt{3^2+4^2}$$
$$r = 1$$

圓的方程為 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$。



29. $\boxed{\text{A}}$

圓的半徑為 2。設 C_3 的圓心為 $(h,\ k)$。
留意由三個圓心形成等邊三角形。
藉考慮連接 C_1 與 C_3 的圓心的線段，

$$h-2=(2+2)\cos 60^\circ \quad 及 \quad k-2=(2+2)\sin 60^\circ$$
$$h=4 \qquad\qquad k=2+2\sqrt{3}$$

只有選項 A 的圓心在 $\left(4,\ 2+2\sqrt{3}\right)$。

30. $\boxed{\text{B}}$

$$圓心的\ y\ 坐標 = \frac{2\sqrt{3}+8\sqrt{3}}{2}$$
$$= 5\sqrt{3}$$

圓心為 $\triangle CAB$ 的形心/垂心/外心/內心。
（備註：當三角形為等邊時，四心在同一位置。）

A. ✗。圓心 $\left(-5,\ 5\sqrt{3}\right)$ 不應在直線 AB 上。

B. ✓。

C. ✗。圓心的 y 坐標 $=-5\sqrt{3}\neq 5\sqrt{3}$

D. ✗。圓心的 y 坐標 $=-5\sqrt{3}\neq 5\sqrt{3}$

結構式試題

31. (a) $(x-7)^2+(y+3)^2=(-8-7)^2+(5+3)^2$ 1M

$(x-7)^2+(y+3)^2=289$ 1A

(b) $JK=\sqrt{(7+1)^2+(-3-25)^2}=\sqrt{848}>C$ 的半徑。 1M

因此，J 在圓外。 1A

(c) (i) J、K 與 P 共線。 1A

(ii) 該直線的斜率 $=\dfrac{25+3}{-1-7}=-\dfrac{7}{2}$。

所求的方程為

$$y-25=-\frac{7}{2}(x+1)$$ 1M

$$7x+2y-43=0$$ 1A

32. (a) (i) 考慮 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ODA$，

$AB=AD$	（已知）
$\angle ACB=\angle ACD$	（等弦對等角）
$\angle OAD=\angle ACD$	（交錯弓形的圓周角）
$=\angle ACB$	
$\angle ADO=\angle ABC$	（圓內接四邊形外角）
$\triangle ABC\sim\triangle ODA$	（AA）
$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{OD}{AD}$	（相似 △ 的對應邊）
$AB^2=BC\cdot OD$	

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(ii) 由於 $\angle ACD=\angle ACB$，

$$\cos\angle ACD=\cos\angle ACB$$

$$\frac{CD^2+AC^2-AD^2}{2(CD)(AC)}=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2(AC)(BC)}$$ 1M

$$2\left(CD^2+AC^2-AD^2\right)=AC^2+BC^2-AB^2$$

$$2CD^2+2AC^2-2AD^2=AC^2+(2CD)^2-AD^2$$ 1M

$$AC^2=2CD^2+AD^2$$ 1

(b) (i) 由於 $\angle BCD=90°$，BD 為一直徑。

圓心 $=\left(\dfrac{15+27}{2},\ \dfrac{0+24}{2}\right)=(21,\ 12)$

該圓的方程為

$$(x - 21)^2 + (y - 12)^2 = (15 - 21)^2 + (0 - 12)^2$$ 1M

$$(x - 21)^2 + (y - 12)^2 = 180$$ 1A

(ii) $AB^2 = BC \cdot OD$

$AB = \sqrt{24 \cdot 15}$

$= 6\sqrt{10}$ 1A

$AC^2 = 2CD^2 + AD^2$

$AC^2 = 2(12)^2 + (6\sqrt{10})^2$ 1M

$AC = 18\sqrt{2}$ 1A