

REG-2425-MOCK-SET 6-MATH-EP(M2)

建議題解

$$\begin{aligned}
 1. \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5(x+h)^2+3} - \frac{1}{5x^2+3}}{h} & 1M \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5x^2+3) - (5(x+h)^2+3)}{h(5x^2+3)(5(x+h)^2+3)} & 1M \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10hx - 5h^2}{h(5x^2+3)(5(x+h)^2+3)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10x - 5h}{(5x^2+3)(5(x+h)^2+3)} & 1M \\
 &= \frac{-10x}{(5x^2+3)^2} & 1A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad (a) \quad (1-3x)^n &= 1 + C_1^n(-3x) + C_2^n(-3x)^2 + \dots \\
 &= 1 - 3nx + \frac{9n(n-1)}{2}x^2 + \dots & 1M \\
 \frac{9n(n-1)}{2} &= 90 & 1M \\
 n^2 - n - 20 &= 0 \\
 n &= 5 \quad \text{或} \quad -4 \quad (\text{捨去}) & 1A \\
 (b) \quad (1-3n)^5 &= (-3x)^5 + C_1^5(-3x)^4 + \dots \\
 &= -243x^5 + 405x^4 - \dots \\
 \left(1 + \frac{k}{x}\right)^6 &= 1 + C_1^6\left(\frac{k}{x}\right) + \dots \\
 &= 1 + \frac{6k}{x} + \dots & 1M \\
 (405)(1) + (-243)(6k) &= 1620 & 1M \\
 k &= -\frac{5}{6} & 1A
 \end{aligned}$$

解	分
3. 當 $n = 1$ 時， 左式 $= (-1)^2 2^1 = 2$ 右式 $= \frac{2 + (-2)^2}{3} = 2 = \text{左式}$ 對 $n = 1$，命題為真。 假設 $\sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} 2^k = \frac{2 + (-2)^{p+1}}{3}$，其中 $p \in \mathbb{Z}^+$。 $\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} 2^k \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} 2^k + (-1)^{p+2} 2^{p+1} \\ &= \frac{2 + (-2)^{p+1}}{3} + (-1)^{p+2} 2^{p+1} \\ &= \frac{2 + (-2)^{p+1} + 3(-1)^{p+2} 2^{p+1}}{3} \\ &= \frac{2 + (-2)^{p+1} [1 + 3(-1)]}{3} \\ &= \frac{2 + (-2)^{p+2}}{3} \end{aligned}$ 對 $n = p + 1$，命題為真。 藉數學歸納法，$\forall n \in \mathbb{Z}^+$，命題為真。	1 1 1M 1M 1
4. (a) $\begin{aligned} & \frac{\sin \theta}{1 + \tan \theta} - \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta} \\ &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) - \cos^2 \theta (\cos \theta + \sin \theta)}{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta (-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{-\cos \theta}{\cos \theta - (1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta}{1 - 2 \cos^2 \theta} \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} & \frac{\sin(\pi + \theta)}{1 + \tan \theta} - \frac{\cos(\pi + \theta)}{1 - \tan \theta} = 2 \cos \theta \\ & \frac{-\sin \theta}{1 + \tan \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta} = 2 \cos \theta \\ & \frac{\cos \theta}{1 - 2 \cos^2 \theta} = 2 \cos \theta \\ & \cos \theta = 2 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) \\ & 0 = \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3) \\ & \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{或} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{捨去}) \quad \text{或} \quad 0 \quad (\text{捨去}) \\ & \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{或} \quad -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$	1M 1 1M 1A 1M 1A

解	分
5. (a) $\int \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta$ $= \frac{1}{4} \int \sin^2 2\theta \, d\theta$ $= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4\theta) \, d\theta$ $= \frac{\theta}{8} - \frac{\sin 4\theta}{32} + \text{常數}$ (b) 體積 $= \pi \int_0^1 \left[6x(1-x^2)^{\frac{1}{4}} \right]^2 \, dx$ $= 36\pi \int_0^1 x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \, dx$ 設 $x = \sin \theta$。則 $dx = \cos \theta \, d\theta$。 體積 $= 36\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \, d\theta$ $= 36\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta$ $= 36\pi \left[\frac{\theta}{8} - \frac{\sin 4\theta}{32} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{9\pi^2}{4}$	1M 1A 1M 1M 1A

解	分
6. (a) 留意 $x^2 + 6x + 34 = (x + 3)^2 + 25$。 設 $x + 3 = 5 \tan \theta$。則 $dx = 5 \sec^2 \theta d\theta$。 $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 34} dx = \int \frac{5 \sec^2 \theta}{25 \tan^2 \theta + 25} d\theta$ $= \frac{1}{5} \int d\theta$ $= \frac{\theta}{5} + \text{常數}$ $= \frac{1}{5} \tan^{-1} \frac{x+3}{5} + \text{常數}$ (b) 設 $u = x^2 + 6x + 34$。則 $du = (2x + 6) dx$。 $y = \int \frac{2x + 5}{x^2 + 6x + 34} dx$ $= \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 34} dx - \int \frac{1}{x^2 + 6x + 34} dx$ $= \int \frac{du}{u} - \frac{1}{5} \tan^{-1} \frac{x+3}{5}$ $= \ln u - \frac{1}{5} \tan^{-1} \frac{x+3}{5} + C$ $= \ln(x^2 + 6x + 34) - \frac{1}{5} \tan^{-1} \frac{x+3}{5} + C$ G 通過點 $(-8, \ln 2)$。 $\ln 2 = \ln(64 - 48 + 34) - \frac{1}{5} \tan^{-1} \frac{-8+3}{5} + C$ $\ln 2 = \ln 50 - \frac{1}{5} \left(-\frac{\pi}{4}\right) + C$ $C = -2 \ln 5 - \frac{\pi}{20}$ 代 $x = -3$。 $y = \ln(9 - 18 + 34) - 0 - 2 \ln 5 - \frac{\pi}{20}$ $= -\frac{\pi}{20}$ G 通過點 $\left(-3, -\frac{\pi}{20}\right)$。	1M 1M 1 1M 1M 1M 1A

解		分
7. (a)	(i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -4\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 \\ -1 & -4\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$	1M
	$= 3\lambda^2 - 3\lambda$	
	$= 3\lambda(\lambda - 1)$	
	若 (E) 有唯一解，則 $3\lambda(\lambda - 1) \neq 0$ 。	1M
	求解後，可得 $\lambda \neq 0$ 及 $\lambda \neq 1$ 。	1A
	因此， $\lambda < 0$ 或 $0 < \lambda < 1$ 或 $\lambda > 1$ 。	
	(ii) $y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & \mu & 2 \\ 1 & \lambda & -4\lambda \end{vmatrix}}{3\lambda(\lambda - 1)}$	1M
	$= \frac{\mu(\lambda^2 - 1)}{3\lambda(\lambda - 1)}$	
	$= \frac{\mu(\lambda + 1)}{3\lambda}$	1A
	(b) (E) 的增廣矩陣為	
	$\left(\begin{array}{ccc c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \mu \\ 1 & -1 & 0 & \mu \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & -1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \mu \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & -1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$	1M
	可得 $\mu = 0$ 。	1A
	解集為 $\{(-t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ 。	1A

解	分
8. (a) 設 $AP : PB = r : (1 - r)$。 $\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1 - r)\overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{OB} \\ &= (1 - r)(8\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + r(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ &= 3r\mathbf{i} + (-12r + 8)\mathbf{j} - 9r + 8\mathbf{k}\end{aligned}$ 由於 $OP \perp OB$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$。 $3r(3) + (-12r + 8)(-4) + (-9r + 8)(-1) = 0$ $r = \frac{20}{33}$ 代 $r = \frac{20}{33}$。 $\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= 3\left(\frac{20}{33}\right)\mathbf{i} + \left[-12\left(\frac{20}{33}\right) + 8\right]\mathbf{j} + \left[-9\left(\frac{20}{33}\right) + 8\right]\mathbf{k} \\ &= \frac{20}{11}\mathbf{i} + \frac{8}{11}\mathbf{j} + \frac{28}{11}\mathbf{k}\end{aligned}$ (b) 設 $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OP}$。 則 $\overrightarrow{OQ} = \frac{20s}{11}\mathbf{i} + \frac{8s}{11}\mathbf{j} + \frac{28s}{11}\mathbf{k}$。 $\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{20s}{11}\mathbf{i} + \left(\frac{8s}{11} - 8\right)\mathbf{j} + \left(\frac{28s}{11} - 8\right)\mathbf{k}\end{aligned}$ $\overrightarrow{AB} = 3\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ 留意 $\angle QAB = \angle QOB = 90^\circ$。 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ $\left(\frac{20s}{11}\right)(3) + \left(\frac{8s}{11} - 8\right)(-12) + \left(\frac{28s}{11} - 8\right)(-9) = 0$ $s = \frac{77}{12}$ 因此, $\overrightarrow{OQ} = \frac{35}{3}\mathbf{i} + \frac{14}{3}\mathbf{j} + \frac{49}{3}\mathbf{k}$。 (c) BQ 為 C 的直徑。 $\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{22}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{23}{3}\mathbf{k}\end{aligned}$	1M 1M 1A 1M 1M 1A 1A 1A

解	分
9. (a) $y = \sqrt{24 - x^2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(24 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$ $= \frac{-x}{\sqrt{24 - x^2}}$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=3\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{24 - (3\sqrt{2})^2}}$ $= -\sqrt{3}$ L 的方程為 $\frac{y - \sqrt{6}}{x - 3\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$ $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{6}$ (b) (i) $(3\sqrt{k - x^2})^2 = (-\sqrt{3}x + 4\sqrt{6})^2$ $9(k - x^2) = 3x^2 - 24\sqrt{2}x + 96$ $0 = 12x^2 - 24\sqrt{2}x + (96 - 9k)$ L 為 C_1 的切線。 $(24\sqrt{2})^2 - 4(12)(96 - 9k) = 0$ $432k - 3456 = 0$ $k = 8$ 代 $k = 8$。 $0 = 12x^2 - 24\sqrt{2}x + 24$ $0 = 12(x - \sqrt{2})^2$ $x = \sqrt{2}$ L 為 C_1 在 $x = \sqrt{2}$ 的切線。 (ii) $(3\sqrt{8 - x^2})^2 = (\sqrt{24 - x^2})^2$ $9(8 - x^2) = 24 - x^2$ $x^2 = 6$ $x = \sqrt{6} \text{ 或 } -\sqrt{6} \text{ (捨去)}$ 所求標為 $(\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$。 (iii) 所求面積 $= \int_2^{\sqrt{6}} (-\sqrt{3}x + 4\sqrt{6} - 3\sqrt{8 - x^2}) dx + \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} (-\sqrt{3}x + 4\sqrt{6} - \sqrt{24 - x^2}) dx$ $= \int_2^{3\sqrt{2}} (-\sqrt{3}x + 4\sqrt{6}) dx - 3 \int_2^{\sqrt{6}} \sqrt{8 - x^2} dx - \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \sqrt{24 - x^2} dx$	1M 1M 1A 1M 1 1M 1A 1M+1A

考慮 $\int_2^{\sqrt{6}} \sqrt{8-x^2} dx$ 。設 $x = \sqrt{8} \sin \theta$ 。則 $dx = \sqrt{8} \cos \theta d\theta$ 。

1M

$$\begin{aligned} \int_2^{\sqrt{6}} \sqrt{8-x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{8-8\sin^2 \theta} \cdot \sqrt{8} \cos \theta d\theta \\ &= 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 4 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -2 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

1M

考慮 $\int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \sqrt{24-x^2} dx$ 。

設 $x = \sqrt{24} \sin \beta$ 。則 $dx = \sqrt{24} \cos \beta d\beta$ 。

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \sqrt{24-x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{24-24\sin^2 \beta} \cdot \sqrt{24} \cos \beta d\beta \\ &= 24 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \beta d\beta \\ &= 12 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\beta) d\beta \\ &= 12 \left[\beta + \frac{\sin 2\beta}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

所求面積

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{\sqrt{3}x^2}{2} + 4\sqrt{6}x \right]_2^{3\sqrt{2}} - 3 \left(-2 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right) - 2\pi \\ &= 6 + 14\sqrt{3} - 8\sqrt{6} - 3\pi \end{aligned}$$

1A

10. (a) 設 $x = \sin \theta$ 。則 $dx = \cos \theta d\theta$ 。

1M

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{8} \left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

1M

1M

1A

(b) (i) 設 $u = k - x$ 。則 $du = -dx$ 。

1M

$$\begin{aligned} \int_0^k f(x)g(x) dx &= - \int_k^0 f(k-u)g(k-u) du \\ &= \int_0^k f(u)g(k-u) du \\ &= \int_0^k f(x)g(k-x) dx \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \int_0^k f(x)g(x) dx &= \frac{1}{2} \left[\int_0^k f(x)g(x) dx + \int_0^k f(x)g(k-x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^k f(x)[g(x) + g(k-x)] dx \\ &= \frac{a}{2} \int_0^k f(x) dx \end{aligned}$$

1M

1

(c) 代 $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ 及 $g(x) = \frac{1}{1+e^{\sin 8x}}$ 。

1M

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos^2 x \sin^2 x = f(x)$$

$$\begin{aligned} g(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{1+e^{\sin 8x}} + \frac{1}{1+e^{\sin(4\pi-8x)}} \\ &= \frac{1}{1+e^{\sin x}} + \frac{1}{1+e^{-\sin 8x}} \cdot \frac{e^{\sin 8x}}{e^{\sin 8x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{1+e^{\sin 8x}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{16} \right) \\ &= \frac{\pi}{32} \end{aligned}$$

1M

1M

1A

解	分
11. (a) $\det P = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -9 & 5 & \lambda \end{vmatrix}$ $= -2\lambda$ $\neq 0$ P 為非奇異。	1M 1
(b) (i) $P^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -9 & 5 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -9 & 5 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 8-9\lambda & 5+5\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$ $P^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ -26+8\lambda-9\lambda^2 & 5+5\lambda+5\lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix}$ $P^3 + 2P^2 - P - 2I = O$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9\lambda^2 - 10\lambda - 1 & 5\lambda^2 + 15\lambda + 10 & \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可得 $-9\lambda^2 - 10\lambda - 1 = 0$、$5\lambda^2 + 15\lambda + 10 = 0$ 及 $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$。 $-9\lambda^2 - 10\lambda - 1 = 0$ 及 $5\lambda^2 + 15\lambda + 10 = 0$ $\lambda = -\frac{1}{9}$ 或 -1 $\lambda = -1$ 或 -2 只有 $\lambda = -1$ 能滿足兩式。 留意當 $\lambda = -1$ 時，$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$。 因此，可得 $\lambda = -1$。	1A 1M 1A
(ii) 可得 $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -9 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ 及 $P^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 17 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。 留意 $P \left[\frac{1}{2}(P^2 + 2P - I) \right] = \left[\frac{1}{2}(P^2 + 2P - I) \right] P = I$。 $P^{-1} = \frac{1}{2}(P^2 + 2P - I)$ $= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 5 & -1 \end{pmatrix}$	1M 1M 1A

$$\begin{aligned}
 & P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} P \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -9 & 5 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

因此， $a = 3$ 、 $b = 2$ 及 $c = 1$ 。

1A

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}
 \end{aligned}$$

1M

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{2013} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2013} P^{-1}$$

1M

$$= P \begin{pmatrix} 3^{2013} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2013} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

1M

$$= \begin{pmatrix} 3^{2013} & 0 & 0 \\ 3^{2013} - 2^{2013} & 2^{2013} & 0 \\ \frac{3^{2015}}{2} - 5(2^{2013}) + \frac{1}{2} & 5(2^{2013}) - 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1A

解	分
12. (a) $OA = \sqrt{43^2 + 23^2} = \sqrt{2378}$ $OB = \sqrt{23^2 + 43^2} = \sqrt{2378}$ $OC = \sqrt{47^2 + 13^2} = \sqrt{2378}$ 可得 $OA = OB = OC$。 因此，O 為 $\triangle ABC$ 的外心。 (b) (i) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$ $= (-23 + 47\mu)\mathbf{i} + (43 + 13\mu)\mathbf{j}$ $\overrightarrow{BC} = 70\mathbf{i} - 30\mathbf{j}$ $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ $70(-23 + 47\mu) - 30(43 + 13\mu) = 0$ $\mu = 1$ (ii) $\overrightarrow{OH} = -19\mathbf{i} + 79\mathbf{j}$ $\overrightarrow{BH} = 4\mathbf{i} + 36\mathbf{j}$ $\overrightarrow{AC} = 90\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 4(90) + 36(-10)$ $= 0$ 可得 $BH \perp AC$。 由於 $BH \perp AC$ 及 $AH \perp BC$，H 為 $\triangle ABC$ 的垂心。 (c) (i) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AH} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AO}$ $= \frac{1}{\lambda+1}[(43\lambda+24)\mathbf{i} + (56-23\lambda)\mathbf{j}]$ (ii) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $= 55\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ (iii) A、K 與 M 共線。 可得 $AK \parallel AM$。 $\frac{43\lambda+24}{\lambda+1} \div 55 = \frac{56-23\lambda}{\lambda+1} \div 5$ $\lambda = 2$ (d) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = (OA)(AB) \cos \angle OAB$ $-43(20) + 23(20) = \sqrt{2378}\sqrt{20^2 + 20^2} \cos \angle OAB$ $\cos \angle OAB = -\frac{400}{\sqrt{2378}\sqrt{800}}$ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = (OA)(AC) \cos \angle OAC$ $-43(90) + 23(-10) = \sqrt{2378}\sqrt{90^2 + 10^2} \cos \angle OAC$ $\cos \angle OAC = \frac{-4100}{\sqrt{2378}\sqrt{8200}}$ $\neq \cos \angle OAB$ $\angle OAC \neq \angle OAB$ 因此，OA 不是 $\angle BAC$ 的角平分線。	1M 1A 1M 1A 1M 1A 1M 1A 1M 1A 1M 1A 1M

解	分
內心不在通過 $\triangle ABC$ 的外心與點 A 的直線。 不同意該宣稱。	1A