

1. (a) $f_n(x) = \frac{-1}{n}x^2 + 2x$
 $= \frac{-1}{n}(x^2 - 2nx + n^2) + n$ 1M
 $= \frac{-1}{n}(x - n)^2 + n$
 V_n 的坐標為 (n, n) 。
 因此， V_n 在 $y = x$ 上。 1
- (b) (i) 2 1A
 (ii) A_2 及 V_2 的坐標分別為 $(4, 0)$ 及 $(2, 2)$ 。
 所求面積
 $= (\triangle OA_2V_2 \text{ 的面積}) - (\triangle OA_1V_1 \text{ 的面積})$
 $= \frac{(4)(2)}{2} - \frac{(2)(1)}{2}$ 1M
 $= 3$ 1A
- (c) $\triangle A_3V_3V_4A_4$ 的面積
 $= \frac{(8)(4)}{2} - \frac{(6)(3)}{2}$
 $= 7$
 該數列的首項及公差分別為 3 及 4。 1M
 設 p 為所需的梯形的數目。
 $\frac{p}{2}[2(3) + (p - 1)4] > 500$ 1M
 $2p^2 + p - 500 > 0$
 $p > 15.6$ 或 $p < -16.1$ (捨去)
 需要 16 個梯形以求得所求之面積和。
 由於 $n = 2p - 1$ ， n 的最小值為 31。 1A
2. (a) $(2x^2 - 3) - (11x + 1) = (3x + 1) - (2x^2 - 3)$ 1M
 $4x^2 - 14x - 8 = 0$
 $x = 4$ 或 $-\frac{1}{2}$ (捨去)
 可得 $A(2) = 45$ 、 $A(6) = 29$ 及 $A(10) = 13$ 。
 公差 $= \frac{A(6) - A(2)}{4} = -4$
 可得 $A(1) = 45 - (-4) = 49$ 及 $A(n) = 49 + (n - 1)(-4) = -4n + 53$ 。
 $A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(n)$
 $= [49 + (-4n + 53)] \frac{n}{2}$ 1M
 $= -2n^2 + 51n$ 1A

(b) $B(k+1)B(k+2)\dots B(4k+1) < 0.09^{-149}$

$\log_{0.3} B(k+1) + \log_{0.3} B(k+2) + \dots + \log_{0.3} B(4k+1) > -149 \log_{0.3} 0.09$ 1M

$A(k+1) + A(k+2) + \dots + A(4k+1) > -298$

$[A(1) + A(2) + \dots + A(4k+1)] - [A(1) + A(2) + \dots + A(k)] > -298$

$[-2(4k+1)^2 + 51(4k+1)] - [-2k^2 + 51k] > -298$

$-30k^2 + 137k + 347 > 0$

$-1.81 < k < 6.38$ 1M

k 的最大值為 6。 1A

3. (a) $a_3 = a_1 - 3$

$a_1 = 66$ 1A

$a_4 = a_2 + 2$

$a_4 = 9$ 1A

(b) 數列 $a_1, a_3, a_5, \dots$ 的首項為 66 且公差為 -3 。

數列 $a_2, a_4, a_6, \dots$ 的首項為 7 且公差為 2。

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2m-1} > 2251$

$(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2m-1}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2m-2}) > 2251$

$\frac{m}{2} [66 + (66 + (m-1)(-3))] + \frac{m-1}{2} [7 + (7 + (m-2)2)] > 2251$ 1M+1M

$m(-3m + 135) + (m-1)(2m + 10) > 4502$

$-m^2 + 143m - 4512 > 0$

$47 < m < 96$

m 的最小值為 48。 1A

(c) $b_1 b_2 b_3 \dots b_k < 10^{30}$

$1.2^{a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k}} < 10^{30}$ 1M

$(a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k}) \log 1.2 < 30$ 1M

$\frac{k}{2} [7 + 7 + (k-1)2] \log 1.2 < 20$

$k^2 + 6k - \frac{30}{\log 1.2} < 0$

$-22.7 < k < 16.7$

k 的最大值為 16。 1A

4. (a) $a - 16 = 4 - a$ 1M

$a = 10$ 1A

$\frac{1(16) + 2(10) + 3(4) + 4(b)}{16 + 10 + 4 + b} = 1.75$

$b = 2$ 1A

(b) 1.5 1A

$$\begin{aligned}
 5. \quad (a) \quad A_{n+1} - A_n &= \log_2(a \times 2^n) - \log_2(a \times 2^{n-1}) \\
 &= (\log_2 a + n) - (\log_2 a + (n-1)) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 為等差數列。

1M

$$A_1 + A_2 + \dots + A_{10} = 75$$

$$[2 \log_2 a + (10-1)(1)] \frac{10}{2} = 75$$

1M

$$\log_2 a = 3$$

$$a = 2^3$$

$$a = 8$$

1A

$$(b) \quad A_1 + A_2 + \dots + A_n > 100$$

$$3 + 4 + \dots + (n+2) > 100$$

$$[3 + (n+2)] \frac{n}{2} > 100$$

$$\frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} - 100 > 0$$

1M

$$n < -16.9 \quad \text{或} \quad n > 11.9$$

1M

n 的最小值為 12。

$$6. \quad (a) \quad \text{可得 } \alpha_n + \beta_n = \sqrt{\log_2 3^n} \text{ 及 } \alpha_n \beta_n = \log_4 \sqrt{3^n}。$$

1A

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n$$

$$= \log_2 3^n - 2 \log_4 \sqrt{3^n}$$

$$= \frac{n \log 3}{\log 2} - \frac{2 \times \frac{n}{2} \times \log 3}{2 \log 2}$$

1M

$$= \frac{n \log 3}{2 \log 2}$$

1A

$$(b) \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha_5^2 + \beta_5^2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha_6^2 + \beta_6^2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha_7^2 + \beta_7^2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha_k^2 + \beta_k^2} > \frac{1}{27^{5k+13}}$$

$$(\alpha_5^2 + \beta_5^2) \log \frac{1}{8} + (\alpha_6^2 + \beta_6^2) \log \frac{1}{8} + \dots + (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \log \frac{1}{8} > (5k+13) \log \frac{1}{27}$$

1M

$$-3 \log 2 \cdot \left(\frac{5 \log 3}{2 \log 2} + \frac{6 \log 3}{2 \log 2} + \dots + \frac{k \log 3}{2 \log 2} \right) > -3(5k+13) \log 3$$

$$5 + 6 + \dots + k < 10k + 26$$

$$\frac{(k+5)(k-4)}{2} < 10k + 26$$

1M

$$\frac{k^2}{2} - \frac{19k}{2} - 36 < 0$$

$$-3.24 < k < 22.2$$

1M

留意 $k \geq 5$ ，可得 $5 \leq k < 22.2$ 。

k 的最大值為 22。

1A

7. (a) 所求之和

$$= 25 + (25 + \log 9) + \dots + [25 + (n-1)\log 9]$$

$$= [25 + (25 + 2(n-1)\log 3)] \frac{n}{2} \quad 1M$$

$$= n(n-1)\log 3 + 25n \quad 1A$$

(b) $6[k(k-1)\log 3 + 25k] < 4.5 \times 100^2 \quad 1M$

$$k^2 \log 3 + (25 - \log 3)k - 7500 < 0$$

$$-153.7 < k < 102.3 \quad 1A$$

k 的最大值為 102。 1A

8. (a) α 及 β 為方程 $x^2 - 128x + 2 = 0$ 的根。

可得 $\alpha + \beta = 128$ 及 $\alpha\beta = 2$ 。 1A

(b) 第 1 項 $= \log \alpha + \log \beta = \log \alpha\beta = \log 2 \quad 1M$

$$\text{第 3 項} = \log(\alpha + \beta) = \log 128 = 7 \log 2$$

$$\text{公差} = \frac{7 \log 2 - \log 2}{2} = 3 \log 2 \quad 1M$$

$$\frac{n}{2} [2 \log 2 + (n-1)(3 \log 2)] < 2025 \quad 1M$$

$$(3 \log 2)n^2 - (\log 2)n - 4050 < 0$$

$$-66.8 < n < 67.1 \quad 1M$$

n 的最大值為 67。 1A

9. (a) 設 a 及 d 分別為首項及公差。

$$\begin{cases} a + 7d = 35 \\ a + 12d = 55 \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $a = 7$ 及 $d = 4$ 。

因此， $A(1) = 7$ 。 1A

(b) $\log_{81} [G(1)G(2)G(3) \dots G(k)] < 666$

$$\log_{81} G(1) + \log_{81} G(2) + \dots + \log_{81} G(k) < 666 \quad 1M$$

$$\frac{\log_3 G(1)}{\log_3 81} + \frac{\log_3 G(2)}{\log_3 81} + \dots + \frac{\log_3 G(k)}{\log_3 81} < 666 \quad 1M$$

$$\frac{1}{4} [A(1) + A(2) + \dots + A(k)] < 666$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{k}{2} [2(7) + (k-1)4] < 666 \quad 1M$$

$$\frac{k^2}{4} + \frac{5k}{4} - 666 < 0$$

$$-37.8 < k < 35.3 \quad 1M$$

k 的最大值為 35。 1A

10. (a) 可得 $\alpha_n + \beta_n = \sqrt{\log_3 2^n}$ 及 $\alpha_n \beta_n = \log_9 \sqrt{2^n}$ 。 1A

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n$$
 1M

$$= \log_3 2^n - 2 \log_9 \sqrt{2^n}$$

$$= \log_3 2^n - \frac{2 \times \frac{n}{2} \log_3 2^n}{\log_3 9}$$
 1M

$$= n \log_3 2 - \frac{n}{2} \log_3 2$$

$$= \frac{n \log_3 2}{2}$$
 1A

(b) $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \dots + \alpha_k^2 + \beta_k^2 = \log_3 32^k$

$$\frac{\log_3 2}{2} + \frac{2 \log_3 2}{2} + \dots + \frac{k \log_3 2}{2} = 5k \log_3 2$$
 1M

$$\frac{k(k+1)}{2} \times \frac{\log_3 2}{2} = 5k \log_3 2$$
 1M

$$\frac{k(k+1)}{4} = 5k$$

$$\frac{k^2}{4} - \frac{19k}{4} = 0$$

$$k = 19 \text{ 或 } 0 \text{ (捨去)}$$
 1A

11. (a) $\frac{A(3)}{A(6)} = 9 \div \frac{1}{3}$

$$\frac{\alpha}{\beta^3} \div \frac{\alpha}{\beta^6} = 27$$
 1M

$$\beta^3 = 27$$

$$\beta = 3$$
 1A

可得 $\alpha = 243$ 。 1A

(b) $B(n) = \log_9 \frac{243}{3^n}$

$$= \log_9 243 - n \log_9 3$$
 1M

$$= \frac{5-n}{2}$$

$$B(1) + B(2) + B(3) + \dots + B(n) > 0$$

$$\frac{n}{2} \left[2 + \frac{5-n}{2} \right] > 0$$
 1M

$$-\frac{n^2}{4} + \frac{9n}{4} > 0$$

$$0 < n < 9$$
 1M

n 的最大值為 8。 1A

12. (a) $S(n) = P(1) + P(2) + \dots + P(n)$
 $= -1 + 3 + \dots + (4n - 5)$
 $= [-1 + (4n - 5)] \frac{n}{2}$ 1M
 $= 2n^2 - 3n$ 1A
- (b) $Q(1)Q(2) \dots Q(m) < 10^{16\,000}$
 $P(1) \log 100 + P(2) \log 100 + \dots + P(m) \log 100 < 16\,000$ 1M
 $2(2n^2 - 3n) < 16\,000$
 $2n^2 - 3n - 8000 < 0$
 $-62.5 < m < 64$ 1M
 m 的最大值為 63。 1A
13. (a) 設 d 為公差。

$$\begin{cases} A(1) + 3d = 16 \\ A(1) + 9d = 28 \end{cases}$$
 1M
 求解後，可得 $A(1) = 10$ 及 $d = 2$ 。 1A
- (b) $\log_4[G(1)G(2)G(3) \dots G(k)] < 2024$
 $\frac{\log_2[G(1)G(2)G(3) \dots G(k)]}{\log_2 4} < 2024$ 1M
 $\frac{A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(k)}{2} < 2024$ 1M
 $\frac{1}{2} \cdot [10 + (10 + (k - 1)2)] \frac{k}{2} < 2024$ 1M
 $\frac{k^2}{2} + \frac{9k}{2} - 2024 < 0$
 $-68.3 < k < 59.3$ 1M
 k 的最大值為 59。 1A
14. (a) 設 d 為該數列的公差。
 $-321 + (23 - 1)d = -123$ 1M
 $d = 9$ 1A
 該數列的公差為 9。
- (b) $\frac{[2(-321) + (n - 1)9]n}{2} > 0$ 1M
 $(9n - 651)n > 0$
 $n < 0$ 或 $n > \frac{217}{3}$ 1A
 所求之值為 73。 1A

15. (a) 設 d 為公差。

$$\begin{cases} A(1) + 2d = -14 \\ A(1) + 9d = 7 \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $A(1) = -20$ 及 $d = 3$ 。 1A

(b) $G(1)G(2)G(3) \dots G(k) < 100\,000$

$$3^{A(1)+A(2)+A(3)+\dots+A(k)} < 100\,000 \quad 1M$$

$$[A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(k)] \log 3 < \log 100\,000 \quad 1M$$

$$[-20 + (-20 + (k-1)3)] \frac{k}{2} \cdot \log 3 < 5 \quad 1M$$

$$\frac{3(\log 3)k^2}{2} - \frac{43(\log 3)k}{2} - 5 < 0$$

$$-0.472 < k < 14.8 \quad 1M$$

k 的最大值為 14。 1A

16. (a) 設 d 為該等差數列的公差。

$$\begin{cases} A(1) + 3d = 13 \\ A(1) + 16d = 52 \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $A(1) = 4$ 及 $d = 3$ 。 1A

(b) (i) $A(n) = 4 + (n-1)3 = 3n + 1$

$$G(1)G(2) \dots G(n) \quad 1M$$

$$= 10^{A(1)} 10^{A(2)} \dots 10^{A(n)} \quad 1M$$

$$= 10^{A(1)+A(2)+\dots+A(n)} \quad 1M$$

$$= 10^{[4+(3n+1)] \frac{n}{2}} \quad 1M$$

$$= 10^{\frac{3n^2+5n}{2}} \quad 1A$$

(ii) $\log(G(1)G(2) \dots G(k)) < 2000$

$$\log 10^{\frac{3k^2+5k}{2}} < 2000$$

$$\frac{3k^2+5k}{2} < 2000$$

$$\frac{3k^2}{2} + \frac{5k}{2} - 2000 < 0$$

$$-37.4 < k < 35.7 \quad 1M$$

k 的最大值為 35。 1A

17. 設 n 為最底層的罐頭數目。

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 \geq 74$$

$$\frac{(n+1)n}{2} \geq 74 \quad 1M$$

$$n^2 + n - 148 \geq 0$$

$$n \geq 11.7 \quad \text{或} \quad n \leq -12.7 \quad (\text{捨去}) \quad 1A$$

最底層共有 12 個罐頭。

留意 $(12 + 11 + 10 + \dots + 1) - 74 = 4$ 。

考慮從 12 層，其中頂層有 1 個罐頭，底層有 12 個罐頭的罐頭堆的頂部，取走 4 個罐頭。 1M

共可擺放 10 層。 1A

18. (a) $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{10} = 75$

$$\log_2 a + \log_2 2a + \log_2 2^2 a + \dots + \log_2 2^9 a = 75$$

$$\log_2 a + (\log_2 a + 1) + (\log_2 a + 2) + \dots + (\log_2 a + 9) = 75 \quad 1M$$

$$10 \log_2 a + \frac{(1+9)9}{2} = 75 \quad 1M$$

$$\log_2 a = 3$$

$$a = 2^3$$

$$a = 8 \quad 1A$$

(b) $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n > 100$

$$3 + 4 + 5 + \dots + [3 + (n - 1)1] > 100$$

$$\frac{[3 + (n + 2)]n}{2} > 100$$

$$\frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} - 100 > 0 \quad 1M$$

$$n < -16.9 \quad \text{或} \quad n > 11.9 \quad 1M$$

n 的最小值為 12。 1A

19. (a) 設公差為 d 。

$$2014 + 15d = 1729 \quad 1M$$

$$d = -19 \quad 1A$$

(b) $S(n) = \frac{n}{2}[2(2014) + (n - 1)(-19)] < 0 \quad 1M$

$$-19n^2 + 4047n < 0$$

$$n < 0 \quad (\text{捨去}) \quad \text{或} \quad n > 213 \quad 1A$$

n 的最小值為 214。 1A

20. (a) $x^2 - 8x + 7 = k$

$$x^2 - 8x + (7 - k) = 0$$

可得 $\alpha + \beta = 8$ 及 $\alpha\beta = 7 - k$ 。 1M

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= 8^2 - 4(7 - k)$$

$$= 4k + 36$$

1A

(b) $(4k + 36) - 6k = 122 - (4k + 36)$

$$k = 25$$

1A

可得 $A(1) = 150$ 及 $A(2) = 136$ 。

$$A(n) = 150 + (n - 1)(-14)$$

$$= -14n + 164$$

$$\log_2[G(1)G(2)G(3)\dots G(m)] > 2000$$

$$\frac{\log_{16}[G(1)G(2)G(3)\dots G(m)]}{\log_{16} 2} > 2000$$

1M

$$\log_{16} G(1) + \log_{16} G(2) + \log_{16} G(3) + \dots + \log_{16} G(m) > 500$$

$$A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(m) > 500$$

$$\frac{[150 + (-14m + 164)]m}{2} > 500$$

1M

$$-7m^2 + 157m - 500 > 0$$

$$3.84 < m < 18.6$$

1M

m 的最大值為 18。

1A

21. (a) (i) $W(2) - W(1) = 364\,650 - 363\,900$

$$1000a^2 - 1000a = 750$$

1M

$$4a^2 - 4a - 3 = 0$$

$$a = 1.5 \quad \text{或} \quad -0.5 \quad (\text{捨去})$$

1A

$$k = W(1) - 1000a = 362\,400$$

1A

(ii) $W(n) = 362\,400 + 1000(1.5)^n$

$$\frac{W(n) - W(n-1)}{W(n-1)} \times 100\% > 40\%$$

$$\frac{1000(1.5)^n - 1000(1.5)^{n-1}}{362\,400 + 1000(1.5)^{n-1}} > 0.4$$

1M

$$1000(1.5)^n - 1000(1.5)^{n-1} > 144\,960 + 400(1.5)^{n-1}$$

$$(1500 - 1000 - 400)(1.5)^{n-1} > 144\,960$$

$$1.5^{n-1} > 1449.6$$

$$(n-1) \log 1.5 > \log 1449.6$$

1M

$$n > 18.95$$

在第 19 年起 P 須處理的垃圾的重量每年增加超過 40%。

1A

(b) (i) 所求重量

$$= (k + 1000a) + (k + 1000a^2) + \dots + (k + 1000a^n)$$

$$= nk + 1000(a + a^2 + \dots + a^n)$$

$$= nk + 1000 \times \frac{a(a^n - 1)}{a - 1}$$

1M

$$= [362\,400n + 3000(1.5^n - 1)] \text{ tonnes}$$

1A

(ii) 所求重量

$$= 362\,400(18) + 3000(1.5^{18} - 1)$$

$$\approx 10\,953\,876 \text{ tonnes}$$

1A

(c) $W(19) = 362\,400 + 1000(1.5)^{19} \approx 2\,579\,238$

第 19 年的垃圾的重量上限

$$= 700\,000 + (19 - 1)100\,000$$

1M

$$= 2\,500\,000 \text{ tonnes}$$

$$< 2\,579\,238 \text{ tonnes}$$

P 在第 19 年不能滿足須處理的垃圾的重量。

$$2\,579\,238 \times 40\% \approx 1\,031\,695$$

$$> 100\,000$$

1M

P 在第 19 年後的各年均不能滿足須處理的垃圾的重量。

同意該宣稱。

1A

22. $360\,000(1 + r\%)^{5-2} = 622\,080$

1M

$$(1 + r\%)^3 = 1.728$$

$$1 + r\% = 1.2$$

$$r = 20$$

1A

$$A(1) = \frac{360\,000}{1.2} = 300\,000$$

$$A(n) = 300\,000(1.2)^{n-1}$$

$$A(1) + A(2) + \dots + A(k) > 9\,500\,000$$

$$\frac{300\,000(1.2^k - 1)}{1.2 - 1} > 9\,500\,000$$

1M

$$1.2^k > \frac{22}{3}$$

$$k \log 1.2 > \log \frac{22}{3}$$

1M

$$k > 10.9$$

k 的最小值為 11。

1A

23. (a) 設 r 為該等比數列的公比。

$$\log_3 \beta \times r^2 = \log_\beta 81 \quad 1\text{M}$$

$$\frac{\log \beta}{\log 3} \times r^2 = \frac{4 \log 3}{\log \beta} \quad 1\text{M}$$

$$r^2 = \frac{4(\log 3)^2}{(\log \beta)^2}$$

$$r = \frac{2 \log 3}{\log \beta} \quad \text{或} \quad \frac{-2 \log 3}{\log \beta} \quad (\text{捨去}) \quad 1\text{A}$$

(b) $\frac{\log_3 \beta}{1 - \frac{2 \log 3}{\log \beta}} = 9 \quad 1\text{M}$

$$\frac{\log \beta}{\log 3} = 9 - \frac{18 \log 3}{\log \beta}$$

$$\left(\frac{\log \beta}{\log 3}\right)^2 - 9\left(\frac{\log \beta}{\log 3}\right) + 18 = 0$$

$$\frac{\log \beta}{\log 3} = 3 \quad \text{或} \quad 6$$

$$\beta = 27 \quad \text{或} \quad 729 \quad 1\text{A}$$

24. (a) 設 a 及 r 分別為該等比數列的首項及公比。

可得 $a + ar = 1$ 及 $\frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = 5$ 。 1M

$$\frac{1}{1+r} \times \frac{r^4 - 1}{r - 1} = 5$$

$$\frac{(r^2 + 1)(r^2 - 1)}{r^2 - 1} = 5$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2 \quad \text{或} \quad -2 \quad (\text{捨去})$$

首項 $= \frac{1}{1+r} = \frac{1}{3} \quad 1\text{A}$

(b) $\frac{\frac{1}{3}(2^n - 1)}{2 - 1} > 5^{30} \quad 1\text{M}$

$$2^n > 3(5^{30}) + 1$$

$$n \log 2 > \log[3(5^{30}) + 1] \quad 1\text{M}$$

$$n > 71.2$$

n 的最小值為 72。 1A

25. (a) $(x+2)(x-2) = 8(x-1)$

$$x^2 - 8x + 4 = 0$$

因此， $p = 8$ 及 $q = 4$ 。 $1\text{A}+1\text{A}$

$$(b) \text{ 公比} = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{3 \log 2}{2 \log 2} = \frac{3}{2} \circ \quad 1M$$

$$(\log 4) \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha + (\log 4) \left(\frac{3}{2}\right)^{2\alpha} < \log 2^{2020} \quad 1M$$

$$2(1.5)^\alpha + 2(1.5)^{2\alpha} < 2020$$

$$(1.5)^{2\alpha} + 1.5^\alpha - 1010 < 0$$

$$\frac{-1 - \sqrt{4041}}{2} < 1.5^\alpha < \frac{-1 + \sqrt{4041}}{2}$$

由於 $1.5^\alpha > 0$,

$$0 < 1.5^\alpha < \frac{-1 + \sqrt{4041}}{2}$$

$$\alpha \log 1.5 < \log \frac{-1 + \sqrt{4041}}{2} \quad 1M$$

$$\alpha < 8.49$$

α 的最大值為 8。 1A

26. (a) 所求數目

$$= C_1^5 C_1^3 \times 2! \times 6! \quad 1M$$

$$= 21\,600 \quad 1A$$

(b) (i) 所求概率

$$= 0.3 + (0.7)(0.6)(0.3) + [(0.7)(0.6)]^2(0.3) + \dots \quad 1M$$

$$= \frac{0.3}{1 - 0.42} \quad 1M$$

$$= \frac{15}{29} \quad 1A$$

(ii) 所求概率

$$= \frac{15}{29} \times \frac{C_4^6 \times 4! \times 3!}{8!} + \left(1 - \frac{15}{29}\right) \times \frac{C_2^6 \times 2! \times 5!}{8!} \quad 1M+1M$$

$$= \frac{115}{1624} \quad 1A$$

$$27. (a) 8(\alpha + \beta) - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} - 8(\alpha + \beta) \quad 1M$$

$$16(\alpha + \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$16 = \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$\log_4 16 = \log_4 \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$2 = -\log_4 \alpha - \log_4 \beta \quad 1M$$

$$\log_4 \beta = -2 - \log_4 \alpha \quad 1A$$

$$(b) \log_{\alpha\beta} \frac{\alpha}{\beta} \div \log_4 \frac{4}{\alpha} = \log_4 \frac{4}{\beta} \div \log_{\alpha\beta} \frac{\alpha}{\beta} \quad 1M$$

$$\left(\frac{\log_4 \alpha - \log_4 \beta}{\log_4 \alpha\beta} \right)^2 = (1 - \log_4 \beta)(1 - \log_4 \alpha) \quad 1M$$

$$\left(\frac{\log_4 \alpha - \log_4 \beta}{-2} \right)^2 = (1 - \log_4 \beta)(1 - \log_4 \alpha)$$

設 $u = \log_4 \alpha$ 。

$$\frac{[u - (-2 - u)]^2}{4} = [1 - (-2 - u)](1 - u) \quad 1M$$

$$(u + 1)^2 = (3 + u)(1 - u)$$

$$2u^2 + 4u - 2 = 0$$

$$u = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)}$$

$$u = -1 - \sqrt{2} \quad \text{或} \quad -1 + \sqrt{2} \quad (\text{捨去})$$

$$\text{公比} = \log_{\alpha\beta} \frac{\alpha}{\beta} \div \log_4 \frac{4}{\alpha}$$

$$= \frac{\log_4 \alpha - \log_4 \beta}{\log_4 \alpha\beta} \div (1 - \log_4 \alpha)$$

$$= \frac{u - (-2 - u)}{-2} \div (1 - u)$$

$$= -(u + 1)(1 - u)$$

$$= -(-\sqrt{2}) \div (2 + \sqrt{2}) \quad 1M$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$$= \log_4 \beta \quad 1$$

$$28. (a) (i) \frac{m(1 - k\%)^2}{m(1 - k\%)} = \frac{3\,739\,770}{4\,617\,000} \quad 1M$$

$$1 - k\% = 0.81$$

$$k = 19 \quad 1A$$

$$m = \frac{4\,617\,000}{1 - k\%} = 5\,700\,000 \quad 1A$$

(ii) 總收入

$$< 5\,700\,000 + 5\,700\,000(1 - 19\%) + 5\,700\,000(1 - 19\%)^2 + \dots$$

$$= \frac{5\,700\,000}{1 - 0.81} \quad 1M$$

$$= \$30\,000\,000$$

公司 P 的總收入不會多於 \$30\,000\,000\$。 1A

(b) (i) 總收入

$$\begin{aligned} &= 5\,700\,000 + 5\,700\,000(1 - 10\%) + \dots + 5\,700\,000(1 - 10\%)^{n-1} \\ &= \frac{5\,700\,000(1 - 0.9^n)}{1 - 0.9} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \\ 1M \end{array}$$

$$= \$5\,700\,000(1 - 0.9^n) \quad 1A$$

$$(ii) \quad 5\,700\,000(1 - 0.9^n) > 5\,700\,000 + 5\,700\,000(0.81) + \dots + 5\,700\,000(0.81)^{n+2} \quad 1M$$

$$5\,700\,000(1 - 0.9^n) > \frac{5\,700\,000(1 - 0.81^{n+3})}{1 - 0.81} \quad 1A$$

$$1.9(1 - 0.9^n) > 1 - 0.81^{n+3}$$

$$(0.81^3)(0.9^n)^2 - 1.9(0.9^n) + 0.9 > 0 \quad 1M$$

$$0.9^n < 0.562 \quad \text{或} \quad 0.9^n > 3.01 \quad (\text{捨去})$$

$$n \log 0.9 < \log 0.562 \quad 1M$$

$$n > 5.47$$

自成立公司 Q 起計的第 6 年錦民會把公司 P 結束。 1A

$$29. \quad (a) \quad \text{可得 } \alpha + \beta = -c \text{ 及 } \alpha\beta = -7. \quad 1A$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \quad 1M$$

$$= c^2 + 14 \quad 1A$$

$$(b) \quad \frac{c^2}{25} = \frac{c^2 + 14}{c^2} \quad 1M$$

$$c^4 - 25c^2 - 350 = 0$$

$$c^2 = 35 \quad \text{或} \quad -10 \quad (\text{捨去})$$

$$\text{公比} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$$

$$25 + 25\left(\frac{7}{5}\right) + 25\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \dots + 25\left(\frac{7}{5}\right)^{n-1} > 3 \times 10^7$$

$$\frac{25\left[\left(\frac{7}{5}\right)^n - 1\right]}{\frac{7}{5} - 1} > 3 \times 10^7 \quad 1M$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^n > 4.8 \times 10^5$$

$$n \log \frac{7}{5} > \log(4.8 \times 10^5) \quad 1M$$

$$n > 38.9$$

n 的最小值為 39。 1A

30. (a) 設 a 及 r 分別為該等比數列的首項及公比。

$$a + ar^2 = ar \times \frac{10}{3} \quad 1M$$

$$r^2 - \frac{10r}{3} + 1 = 0$$

$$r = \frac{1}{3} \quad \text{或} \quad 3 \quad (\text{捨去}) \quad 1A$$

該等比數列的無限項之和為 2322。

$$\frac{a}{1 - \frac{1}{3}} = 2322$$

$$a = 1548$$

該數列的首項為 1548。

1A

$$(b) \quad 1548 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1548 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots + 1548 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} > 1$$

$$\frac{1548 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}{1 - \frac{1}{3}} > 1 \quad 1M+1A$$

$$2322 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 2322 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} > 1$$

$$-2322 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + 6966 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 > 0$$

$$1.44 \times 10^{-4} < \left(\frac{1}{3}\right)^n < 3.00$$

$$\log 1.44 \times 10^{-4} < n \log \frac{1}{3} < \log 3.00 \quad 1M$$

$$-1.00 < n < 8.05$$

n 的最大值為 8。

1A

31. (a) 設 a 及 r 分別為該數列的首項及公比。

$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{3072}{48} \quad 1M$$

$$r^3 = 64$$

$$r = 4$$

$$a = 3$$

可得 $A(n) = 3(4^{n-1})$ 。

1A

$$(b) \quad B(n) = \log[3(4^{n-1})]$$

$$= \log 3 + (n-1) \log 4 \quad 1M$$

$$\begin{aligned}
& B(1) + B(2) + B(3) + \dots + B(k) > 2023 \\
& k \log 3 + [1 + 2 + 3 + \dots + (k-1)] \log 4 > 2023 \\
& k \log 3 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot \log 4 > 2023 \quad 1M \\
& k^2 \log 2 + (\log 3 - \log 2)k - 2023 > 0 \\
& k > 81.7 \quad \text{或} \quad k < -82.3 \quad (\text{捨去}) \quad 1M \\
& k \text{ 的最小值為 } 82。 \quad 1A
\end{aligned}$$

32. (a) 設 a 及 r 分別為該等比數列的首項及公比。

$$\begin{aligned}
& \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{1}{27} \quad 1M \\
& r^3 = \frac{1}{27} \\
& r = \frac{1}{3} \\
& \text{首項} = a = \frac{27}{r^2} = 243 \quad 1A
\end{aligned}$$

(b) $\log_9(G(1)G(2)\dots G(n)) < -100$

$$\log_9 243 + \log_9 \left(243 \times \frac{1}{3}\right) + \dots + \log_9 \left[243 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] < -100 \quad 1M+1M$$

$$\frac{5}{2} + 2 + \dots + \frac{6-n}{2} < -100$$

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{6-n}{2}\right) \frac{n}{2} < -100 \quad 1M$$

$$-\frac{n^2}{4} + \frac{11n}{4} + 100 < 0$$

$$n < -15.2 \quad \text{或} \quad n > 26.2 \quad 1M$$

n 的最小值為 27。

1A

33. (a) $\frac{\log_{8m} k}{\log_{m^2} k} = \frac{\log_{128m} k}{\log_{8m} k} \quad 1M$

$$\left(\frac{\log k}{3 \log 2 + \log m}\right)^2 = \frac{\log k}{2 \log m} \times \frac{\log k}{7 \log 2 + \log m} \quad 1M$$

$$14(\log 2)(\log m) + 2(\log m)^2 = 9(\log 2)^2 + 6(\log 2)(\log m) + (\log m)^2$$

$$(\log m)^2 + 8(\log 2)(\log m) - 9(\log 2)^2 = 0$$

$$(\log m - \log 2)(\log m + 9 \log 2) = 0 \quad 1M$$

$$\log m = \log 2 \quad \text{或} \quad -9 \log 2 \quad (\text{捨去})$$

$$m = 2 \quad 1A$$

$$(b) \log_{m^2} k - \log_k (128m) = \log_m \frac{k}{2} - \log_{m^2} k \quad 1M$$

$$2 \log_4 k = \log_2 \frac{k}{2} + \log_k 256 \quad 1M$$

$$2 \times \frac{\log k}{2 \log 2} = \frac{\log k - \log 2}{\log 2} + \frac{8 \log 2}{\log k} \quad 1M$$

$$\text{設 } u = \frac{\log k}{\log 2} \circ$$

$$u = (u - 1) + \frac{8}{u}$$

$$\frac{8}{u} = 1$$

$$u = 8$$

$$\log k = \log 2^8$$

$$k = 256$$

公差

$$= \log_4 256 - \log_{256} (128 \times 2)$$

$$= 3$$

1A

34. (a) 所求開支

$$= 3.24 \times 10^{10} [1 + (1 + 5\%) + (1 + 5\%)^2 + \dots + (1 + 5\%)^{14}] \quad 1M$$

$$= \frac{3.24 \times 10^{10} (1.05^{15} - 1)}{1.05 - 1} \quad 1M$$

$$\approx \$6.99 \times 10^{11} \quad 1A$$

$$(b) 3.24 \times 10^{10} (1 + 1.05 + 1.05^2 + \dots + 1.05^{n-1}) > 10^{12} \quad 1M$$

$$\frac{3.24 \times 10^{10} (1.05^n - 1)}{1.05 - 1} > 10^{12}$$

$$1.05^n > \frac{206}{81}$$

$$n \log 1.05 > \log \frac{206}{81} \quad 1M$$

$$n > 19.1$$

n 的最小值為 20。

1A

$$35. (a) A_n = 100\,000 \times 1.0404^n + 100\,000 \times 1.0201 \times 1.0404^{n-1} + \dots + 100\,000 \times 1.0201^{n-1} \times 1.0404 \quad 1M$$

$$= 10^6 \times \frac{1.0404^n \left[1 - \left(\frac{1.0201}{1.0404} \right)^n \right]}{1 - \frac{1.0201}{1.0404}} \quad 1M$$

$$= \frac{10\,404}{203} \times 10^6 (1.0404^n - 1.0201^n) \quad 1A$$

$$(b) 10\,353\,510 \times (1 + r\%) = 10\,666\,186$$

$$1 + r\% = 1.0302$$

$$r = 3.02$$

$$W = \frac{10\,353\,510}{1 + r\%} = 1.005 \times 10^7 \quad 1M$$

$$\begin{aligned} \frac{10\,404}{203} \times 10^6 (1.0404^m - 1.0201^m) &> 1.005 \times 10^7 (1.0302)^{m-1} \\ \frac{10\,404}{203} \times 1.0404^m - 10.05 \times 1.0302^{m-1} - \frac{10\,404}{203} \times 1.0201^m &> 0 \\ \frac{10\,404}{203} \times \frac{1.0404^m}{1.0201^m} - \frac{10.05}{1.0302} \times \frac{1.0302^m}{1.0201^m} - \frac{10\,404}{203} &> 0 \\ \frac{10\,404}{203} \times \left(\frac{102}{101}\right)^{2m} - \frac{10.05}{1.0302} \times \left(\frac{102}{101}\right)^m - \frac{10\,404}{203} &> 0 \\ \left(\frac{102}{101}\right)^m < -0.910 \text{ (捨去)} \quad \text{或} \quad \left(\frac{102}{101}\right)^m &> 1.10 \end{aligned}$$

$$m \log \frac{102}{101} > \log 1.10 \quad 1M$$

$$m > 9.65$$

m 的最小值為 10。 1A

36. (a) 設 a 及 r 分別為首項及公比。

$$\begin{aligned} \frac{ar^4}{ar} &= \frac{625}{320} \\ r^3 &= \frac{125}{64} \\ r &= 1.25 \end{aligned} \quad 1M$$

$$\text{首項} = \frac{320}{r} = 256 \quad 1A$$

$$(b) \quad \frac{256(1.25)^n(1.25^n - 1)}{1.25 - 1} > 8 \times 10^{12} \quad 1M$$

$$256(1.25^{2n}) - 256(1.25^n) - 2 \times 10^{12} > 0$$

$$1.25^n > 88\,400 \quad \text{或} \quad 1.25^n < -88\,400 \text{ (捨去)} \quad 1M$$

$$n \log 1.25 > \log 88\,400 \quad 1M$$

$$n > 51.04$$

n 的最小值為 52。 1A

$$37. (a) f(x) = x^2 - (2k + 6)x + k^2 + 7k + 7$$

$$= [x^2 - 2(k + 3)x + (k + 3)^2 - (k + 3)^2] + k^2 + 7k + 7 \quad 1M$$

$$= [x - (k + 3)]^2 + k - 2$$

P 的坐標為 $(k + 3, k - 2)$ 。 1A

(b) 沿 y 軸放大至原來的 3 倍。 1A

向左平移 1 單位。 1A

(c) (i) Q 的坐標為 $(k+2, 3k-6)$ 。 1M

$$\frac{11k-2}{b_2} = \frac{b_2}{b_1} \quad 1M$$

$$\frac{11k-2}{3k-6} = \frac{3k-6}{k-2}$$

$$11k-2 = 3(3k-6)$$

$$k = -8$$

P 及 Q 的坐標分別為 $(-5, -10)$ 及 $(-6, -30)$ 。 1A

(ii) (1) 設 $(r, 0)$ 為 R 的坐標。

$$\frac{-10+30}{-5+6} \times \frac{0+10}{r+5} = -1 \quad 1M$$

$$r = -205$$

R 的坐標為 $(-205, 0)$ 。 1A

(2) S 的坐標為 $(-10, -8)$ 。

$$RS \text{ 的斜率} = \frac{15-0}{-10+205} = \frac{1}{13} \quad 1M$$

$$QS \text{ 的斜率} = \frac{15+30}{-10+6} = -\frac{45}{4} \neq -13$$

$$\angle QSR \neq 90^\circ$$

可得 $\angle QPR \neq \angle QSR$ 。 1M

$PQRS$ 不是圓內接四邊形。

不同意該宣稱。 1A

38. (a) $2048 + 2048r + 2048r^2 = 5408$ 1M

$$2048r^2 + 2048r - 3360 = 0$$

$$r = \frac{7}{8} \text{ 或 } -\frac{15}{8} \quad 1A$$

(b) 可得 $r = \frac{7}{8}$ 。

$$\frac{2048 \left[1 - \left(\frac{7}{8} \right)^n \right]}{1 - \frac{7}{8}} > 16270 \quad 1M$$

$$\left(\frac{7}{8} \right)^n < \frac{57}{8192}$$

$$n \log \frac{7}{8} < \log \frac{57}{8192} \quad 1M$$

$$n > 37.2$$

n 的最小值為 38。 1A

39. (a) 設 a 及 r 分別為該等比數列的首項及公比。

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{2304}{972} \quad 1M$$

$$r^3 = \frac{64}{27}$$

$$r = \frac{4}{3}$$

$$\text{首項} = \frac{972}{r} = 729 \quad 1A$$

(b) $729 + 729 \times \frac{4}{3} + \dots + 729 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} < 5 \times 10^{12}$

$$\frac{729 \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1 \right]}{\frac{4}{3} - 1} < 5 \times 10^{12} \quad 1M$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n < \frac{5 \times 10^{12}}{2187} + 1$$

$$n \log \frac{4}{3} < \log \left(\frac{5 \times 10^{12}}{2187} + 1 \right) \quad 1M$$

$$n < 74.9$$

n 的最大值為 74。 1A

40. (a) 可得 $\alpha + \beta = \frac{c+3}{6}$ 及 $\alpha\beta = \frac{4c-2}{6} = \frac{2c-1}{3}$ 。

$$\frac{7}{\alpha+6} = \frac{\beta+8}{7} \quad 1M$$

$$49 = \alpha\beta + 8\alpha + 6\beta + 48$$

$$49 = \frac{2c-1}{3} + 6\left(\frac{c+3}{6}\right) + 2\alpha + 48 \quad 1M$$

$$\alpha = -\frac{5c+5}{6} \quad 1$$

(b) $6\left(-\frac{5c+5}{6}\right)^2 - (c+3)\left(-\frac{5c+5}{6}\right) + 4c - 2 = 0 \quad 1M$

$$5c^2 + \frac{47c}{3} + \frac{14}{3} = 0$$

$$c = -\frac{14}{5} \quad \text{或} \quad -\frac{1}{3}$$

留意當 $c = -\frac{1}{3}$ 時，該等比數列的無限項之和不存在。

因此， $c = -\frac{14}{5}$ 。

1A

$$\frac{\frac{15}{2} \left(\frac{14}{15}\right)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{14}{15}\right)^{n+3}\right]}{1 - \frac{14}{15}} > 37$$

1M

$$-\left(\frac{14}{15}\right)^{2n+2} + \left(\frac{14}{15}\right)^{n-1} - \frac{74}{225} > 0$$

$$-\frac{196}{225} \left(\frac{14}{15}\right)^{2n} + \frac{15}{14} \left(\frac{14}{15}\right)^n - \frac{74}{225} > 0$$

$$0.590 < \left(\frac{14}{15}\right)^n < 0.640$$

$$\log 0.590 < n \log \frac{14}{15} < \log 0.640$$

1M

$$6.46 < n < 7.66$$

因此， $n = 7$ 。

1A

41. D

設 d 為該數列的公差。

$$(x_1, x_4, x_7) = (x_1, x_1 + 3d, x_1 + 6d)$$

$$(2x_3, 2x_6, 2x_9) = (2x_1 + 4d, 2x_1 + 10d, 2x_1 + 16d)$$

新的數字可由將每個數字乘以 2 然後加 $4d$ 獲得。

因此， $v_2 = 2^2 v_1 = 4v_1$ 及 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{4}$ 。

42. B

設首項及公差分別為 a 及 d 。

留意新的數字組由原來的數字每個加上 d 組成。

I. $\times$ 。可得 $x_2 = x_1 + d$ 。

取 $d = -1$ ，則可得 $x_1 > x_2$ 。

II. $\checkmark$ 。

III. $\times$ 。可得 $z_1 = z_2$ 。

43. C

設 a 及 d 分別為首項及公差。

$$\begin{cases} a + (a + d) = 3 \\ (a + 3d) + (a + 4d) = -27 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 4$ 及 $d = -5$ 。

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 &= (a + d) + (a + 2d) \\ &= -7 \end{aligned}$$

44. A

$$\text{公差} = \frac{-7+13}{2} = 3$$

I. ✓。第 11 項 $= -13 + (11 - 1)(3) = 17$

II. ✓。首兩個奇數項為 -13 及 -7 。

首 50 個奇數項之和

$$= \frac{[-13 + (-13 + (50 - 1)6)]50}{2}$$

$$= 6700$$

III. ✗。設項數為 n 。

$$-13 + (n - 1)(3) < 200$$

$$n < 72$$

該數列共有 71 項小於 200。

45. D

設 d 為原來的等差數列的公差。

I. ✓。

留意 $2b - 2a = 2(b - a) = 2d$ 及 $2c - 2b = 2(c - b) = 2d$ 。

II. ✓。

可得 $b - c = a - b = -d$ 。

III. ✓。

可得 $(b + x) - (a + x) = b - a = d$ 及 $(c + x) - (b + x) = c - b = d$ 。

46. D

留意 $\log 9 - \log 3 = \log 27 - \log 9 = \log 81 - \log 27 = \log 3$ 。

$\log 3$, $\log 9$, $\log 27$, $\log 81$ 為等差數列。

47. A

I. ✓。

公差為 $1 - m$ 。

II. ✓。

公差為 $\log m$ 。

III. ✗。

取 $m = 2$ ，該數列變為 8, 16, 32, 64。

留意 $16 - 8 \neq 32 - 16$ 。

該數列不是等差數列。

48. C

I. ✓。

$$\text{首項} = 5(1)^2 + 1 = 6$$

II. ✗。

設 $T(n)$ 為該數列的第 n 項。

$$\begin{aligned} T(n) &= (5n^2 + n) - [5(n-1)^2 + (n-1)] \\ &= 10n - 4 \end{aligned}$$

當 $T(n) = 31$ 時， $n = 3.5$ （捨去）。

因此，31 不是該數列的項。

III. ✓。

留意 $T(n) = 10n - 4$ 。

$$\begin{aligned} T(n+1) - T(n) &= [10(n+1) - 4] - (10n - 4) \\ &= 10 \end{aligned}$$

該數列為等差數列，其公差為 10。

49. C

$$\text{公差} = \log 2a - \log a = \log 2$$

$$\text{所求之和} = [2 \log a + (n-1) \log 2] \frac{n}{2}$$

$$= n \log a + \frac{n(n-1)}{2} \log 2$$

50. A

設 a 及 d 分別為首項及公差。

$$\begin{cases} a + 25d = 224 \\ (a + 41d) - (a + 33d) = -256 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 1024$ 及 $d = -32$ 。

$$A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(k) > 5500$$

$$\frac{k}{2} [1024 + 1024 + (k-1)(-32)] > 5500$$

$$-16k^2 + 1040k - 5500 > 0$$

$$5.81 < k < 59.2$$

k 的最大值為 59。

51. B

新的數字組可藉以下步驟求得：

(1) 乘以 4。

(2) 加 3。

I. ✗。

留意 $u_1 = T(50)$ 及 $u_2 = 4T(50) + 3$ 。

有可能使 $T(50) = -2$ ，使得 $u_1 = -2$ 及 $u_2 = -5 < u_1$ 。

II. ✓。

III. ✗。

假定該數列的公差為 0。

可得 $w_1 = w_2 = 0$ 。

52. A

設 a 及 d 分別為該數列的首項及公差。

$$\begin{cases} (a + 17d) + (a + 19d) = 92 \\ (a + 199d) + 300 = a + 99d \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 100$ 及 $d = -3$ 。

I. ✓。

II. ✓。

可得 $x_{2018} = 100 + 2017(-3) = -5951$ 。

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2018} &= (100 - 5951) \frac{2018}{2} \\ &= -5\,903\,659 \\ &< -5.9 \times 10^6 \end{aligned}$$

III. ✓。

$$\begin{aligned} 100 + (n - 1)(-3) &> 0 \\ n &< \frac{103}{3} \end{aligned}$$

x_{33} 為最小正數項。

53. C

公差 $= \log 10 - \log 2 = \log 5$

所求之和 $= \frac{[\log 2 + (\log 2 + 6 \log 5)](7)}{2}$

$$= 7(\log 2 + 3 \log 5)$$

$$= 7 \log(2 \times 5^3)$$

$$= 7 \log 250$$

54. D

I. ✓。

設 $S(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 。則 $S(n) = nb_n = 3n^2 - 8n$ 。

$$\begin{aligned}a_n &= S(n) - S(n-1) \\&= (3n^2 - 8n) - [3(n-1)^2 - 8(n-1)] \\&= 6n - 11 \\a_{n+1} - a_n &= [6(n+1) - 11] - (6n - 11) \\&= 6\end{aligned}$$

此為等差數列，其公差為 6。

II. ✓。

$$\begin{aligned}3n - 8 &= 79 \\n &= 29\end{aligned}$$

此為該數列的第 29 項。

III. ✓。

留意 $b_2 - b_1 = (-2) - (-5) = 3$ 。

$$\begin{aligned}b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n &= [(-5) + ((-5) + (n-1)(3))]\frac{n}{2} \\&= \frac{3n^2 - 13n}{2}\end{aligned}$$

55. C

設 D 為公差。

I. ✓。

$$\begin{aligned}c - 5d &= (a + 2D) - 5(a + 3D) = -4a - 13D \\9a - 13b &= 9a - 13(a + D) = -4a - 13D = c - 5d\end{aligned}$$

II. ✓。

$$\begin{aligned}a + d &= a + (a + 3D) = 2a + 3D \\b + c &= (a + D) + (a + 2D) = 2a + 3D\end{aligned}$$

III. ✗。

取 $a = 1$ ， $b = 2$ ， $c = 3$ 及 $d = 4$ 使得 a, b, c, d 為等差數列。
可得 $ad = 4$ 及 $bc = 6 \neq ad$ 。

56. A

I. ✓。

設 $T(n)$ 為該數列的第 n 項。

$$\begin{aligned}T(n) &= (3n^2 + 8n) - [3(n-1)^2 + 8(n-1)] \\&= 6n + 5\end{aligned}$$

當 $T(n) = 95$ 時，可得 $n = 15$ 。

95 為該數列的第 15 項。

II. ✓。

留意 $T(n) = 6n + 5$ 。

$$\begin{aligned} T(n+1) - T(n) &= [6(n+1) + 5] - (6n + 5) \\ &= 6 \end{aligned}$$

該數列為等差數列，其公差為 6。

III. ✗。

留意 $a_1 = 11$ 及 $a_{2019} = 12\,119$ 。

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2019} &= (11 + 12\,119) \frac{1010}{2} \\ &= 6\,125\,650 \\ &> 7 \times 10^5 \end{aligned}$$

57. A

設 d 為公差。

I. ✓。

可得 $z - x = 2d$ 及 $y - w = 2d = z - x$ 。

II. ✗。

取 $w = 1, x = 2, y = 3, z = 4$ 使得 w, x, y, z 為等差數列。

可得 $\frac{z}{x} = 2$ 及 $\frac{y}{w} = 3 \neq \frac{z}{x}$ 。

III. ✗。

取 $w = -1, x = -2, y = -3, z = -4$ 使得 w, x, y, z 為等差數列。

可得 $w > x > y > z$ 。

58. A

I. ✓。

公差為 5。

II. ✓。

公差為 $5\sqrt{a}$ 。

III. ✗。

取 $a = 4$ ，該數列變為 $2^{20}, 2^{25}, 2^{30}, 2^{35}$ 。

留意 $2^{25} - 2^{20} \neq 2^{30} - 2^{25}$ 。

此數列不是等差數列。

59. C

設 a 及 d 分別為該等差數列的首項及公差。

$$\begin{cases} (a+d) + (a+3d) = 242 \\ (a+4d) + (a+6d) = 224 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 127$ 及 $d = -3$ 。

$$\begin{aligned} \text{所求之和} &= [127 + 127 + (10-1)(-3)] \frac{10}{2} \\ &= 1135 \end{aligned}$$

60. D

設 d 為公差。

$$3 + 19d = 10(3 + d)$$

$$d = 3$$

I. ✓。

$$\begin{aligned} \text{所求之和} &= \frac{2n}{2} [3 + 3 + (2n-1)(3)] \\ &= 3n(1+2n) \end{aligned}$$

II. ✓。

$a_1 = 3$ ， $a_4 = 12$ ， $a_{16} = 48$ 為等比數列，其公比為 4。

III. ✓。

$$\begin{aligned} &(a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{50}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{49}) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \dots + (a_{50} - a_{49}) \\ &= 3 \times 25 \\ &= 75 \\ &> 0 \end{aligned}$$

因此， $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{50} > a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{49}$ 。

61. D

$$\frac{18}{x-16} = \frac{x-1}{18}$$

$$324 = (x-1)(x-16)$$

$$0 = x^2 - 17x - 308$$

$$x = 28 \quad \text{or} \quad -11$$

設 r 為該等比數列的公比。

當 $x = -11$ 時， $r^2 = \frac{18}{-11-16} < 0$ 。捨去該情況。

當 $x = 28$ 時， $r^2 = \frac{18}{28-16} = \frac{3}{2}$ 。

可得 $a_8 = a_6 \times r^2 = (28-1) \times \frac{3}{2} = \frac{81}{2}$ 。

62. C

設 $S(n) = 2n^2 - 5n$ 及 $T(n)$ 為該數列的第 n 項。

I. ✓。

$$2014\text{th term} = S(2014) - S(2013) = 8049$$

II. ✗。

$$T(1) = S(1) = -3$$

$$T(2) = S(2) - S(1) = 1$$

$$T(3) = S(3) - S(2) = 5$$

$$\text{留意 } \frac{T(2)}{T(1)} \neq \frac{T(3)}{T(2)}。$$

該數列不是等比數列。

III. ✓。

$$T(n) = S(n) - S(n-1)$$

$$= 2[n^2 - (n-1)^2] - 5[n - (n-1)]$$

$$= 4n - 7$$

$$= -3 + (n-1)4$$

該數列為等差數列，首項 -3 ，公差 4 。

唯一負數項為 -3 。

63. C

I. ✓。

公比為 $\log x$ 。

II. ✗。

$$\text{留意 } \frac{\log x^2}{\log x} = 2 \text{ and } \frac{\log x^3}{\log x^2} = \frac{3 \log x}{2 \log x} = \frac{3}{2} \neq 2。$$

III. ✓。

$$\frac{\log_4 x}{\log_2 x} = \frac{\log x}{2 \log 2} \div \frac{\log x}{\log 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\log_{16} x}{\log_4 x} = \frac{\log x}{4 \log 2} \div \frac{\log x}{2 \log 2} = \frac{1}{2}$$

公比為 $\frac{1}{2}$ 。

64. D

設首項及公比分別為 a 及 r 。

$$\frac{ar^7}{ar^3} = \frac{4}{243} \div \frac{1}{12}$$

$$r^4 = \frac{16}{81}$$

$$r = \pm \frac{2}{3}$$

當 $r = \frac{2}{3}$ 時, $a = \frac{1}{12} \div r^3 = \frac{9}{32}$ 及 $S(\infty) = \frac{a}{1-r} = \frac{27}{32}$ (捨去)

當 $r = -\frac{2}{3}$ 時, $a = \frac{1}{12} \div r^3 = \frac{-9}{32}$ 。

I. ✗。

II. ✓。 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = \frac{a(r^9 - 1)}{r - 1} \approx -0.173 < -\frac{1}{10}$ 。

III. ✓。 $a_2 + a_4 + \dots = \frac{ar}{1 - r^2} = \frac{27}{80}$ 。

65. C

I. ✓。可得 $\frac{7^b}{7^a} = 7^{b-a}$ 及 $\frac{7^c}{7^b} = 7^{c-b} = 7^{b-a}$ 。

因此, $7^a, 7^b, 7^c$ 成一等比數列。

II. ✓。可得 $(a+c) - (a+b) = c-b$ 及 $(b+c) - (a+c) = b-a = c-b$ 。

因此, $a+b, a+c, b+c$ 成一等差數列。

66. D

最後 5 項可藉將首 5 項分別乘以 2^7 獲得。

所求方差 = $10 \times (2^7)^2 = 163\,840$ 。

67. A

設 r 為該等比數列的公比。

留意 $0 < \frac{T(2)}{T(1)} = r < 1$ 。

第二組數字可藉將第一組的每個數字乘以 r^{40} 獲得。

I. ✓。

$$x_2 = r^{40}x_1 < x_1$$

II. ✓。

$$y_2 = r^{40}y_1 < y_1$$

III. ✗。

$$z_2 = (r^{40})^2z_1 < z_1$$

68. D

設首項及公比分別為 a 及 r 。

$$\frac{ar^7}{ar^2} = \frac{6}{192}$$

$$r^5 = \frac{1}{32}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

I. ✗。

II. ✓。 $a = \frac{192}{r^2} = 768$ 。

$$768 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 10^{-2}$$

$$(n-1) \log \frac{1}{2} > \log \frac{1}{76800}$$
$$n < 172$$

有 17 項大於 10^{-2} 。

$$\text{III. } \checkmark。 \text{所求之和} = \frac{768 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{13}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \approx 15358$$
$$> 1535$$

69. B

$$\text{I. } \checkmark。 \text{通項} = (1 - 2^{-n}) - (1 - 2^{-(n-1)})$$
$$= 2^{-n}(-1 + 2)$$
$$= 2^{-n}$$

可得 $2^{-n} < 1$ 對所有正整數 n 。

II. ✗。對所有正整數 n ，第 n 項 $= \frac{1}{2^n}$ 為有理數。

$$\text{III. } \checkmark。 \log T_{n+1} - \log T_n = \log 2^{-n-1} - \log 2^{-n}$$
$$= (-n-1) \log 2 + n \log 2$$
$$= -\log 2 = \text{常數}$$

因此，它是一等差數列。

70. D

設首項及公差分別為 a 及 d 。

可得 $d = \frac{12-8}{2} = 2$ 及 $a = 8 - 3d = 2$ 。

$$\text{I. } \checkmark。 x_{n+1} - x_n = 2 > 0$$

$$\text{II. } \checkmark。 x_{92} + x_{100} = (a + 91d) + (a + 99d) = 2(a + 95d) = 2x_{96}$$

$$\text{III. } \checkmark。 2^{-x_1} + 2^{-x_2} + 2^{-x_3} + \dots + 2^{-x_n}$$
$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}$$
$$< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots$$
$$= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$= \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

71. D

$$\begin{aligned}\text{方差} &= 10 \times (2^{10})^2 \\ &= 10\,485\,760\end{aligned}$$

72. A

$$\begin{aligned}\text{通項} &= (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2) \\ &= 2^n(2 - 1) \\ &= 2^n\end{aligned}$$

I. $\checkmark$ 。 $\frac{T(n+1)}{T(n)} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 = \text{常數}。$

II. $\times$ 。第二項 $= 2^2 = 4 \neq 6。$

III. $\times$ 。

73. A

所求概率

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{5}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{5}{10}\right)^5\left(\frac{3}{10}\right) + \dots \\ &= \frac{\frac{3}{20}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

74. D

設 a 及 r 為該等比數列的首項及公比。

$$\frac{ar^5}{ar} = \frac{2}{27} \div \frac{3}{8}$$

$$r^4 = \frac{16}{81}$$

$$r = \pm \frac{2}{3}$$

當 $r = \frac{2}{3}$ 時， $a = \frac{3}{8} \div r = \frac{9}{16}。$

無限項之和 $= \frac{a}{1-r} = \frac{27}{16} > 1$

捨去。

當 $r = -\frac{2}{3}$ 時， $a = \frac{3}{8} \div r = -\frac{9}{16}。$

無限項之和 $= \frac{a}{1-r} = -\frac{27}{80}$

I. ✗。

$$\begin{aligned}-\frac{9}{16}\left(\frac{-2}{3}\right)^{n-1} &= \frac{1}{4} \\ \left(\frac{-2}{3}\right)^{n-1} &= -\frac{4}{9} \\ \left(\frac{-2}{3}\right)^{n-1} &= -\left(\frac{2}{3}\right)^2\end{aligned}$$

留意當 $n-1=2$ 時，左式給出正數。

該方程無解。

因此， $\frac{1}{4}$ 不是該數列的項。

II. ✓。

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_9 - a_{10}$$

$$= \frac{-\frac{9}{16}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\approx -1.66$$

$$< -1$$

III. ✓。

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots$$

$$= \frac{-\frac{9}{16} \times \frac{-2}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{27}{40}$$

$$\frac{1}{20a_6} = 1 \div \left[20\left(-\frac{9}{16}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^5\right]$$

$$= \frac{27}{40}$$

$$= a_2 + a_4 + a_6 + \dots$$

75. C

a, b, c 為等差數列。

$$b - a = c - b$$

$$2b = a + c$$

$$2b = 24 - b$$

$$b = 8$$

b, c, d 為等比數列。

$$\frac{c}{b} = \frac{d}{c}$$

$$c^2 = bd$$

$$c^2 = \frac{1728}{c}$$

$$c = 12$$

可得 $a = 24 - b - c = 4$ 及 $d = \frac{1728}{bc} = 18$ 。

因此， $ad = 4 \times 18 = 72$ 。

76. B

所求概率

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{5}{10}\right) \frac{3}{10} + \left(\frac{5}{10}\right)^3 \frac{3}{10} + \left(\frac{5}{10}\right)^5 \frac{3}{10} + \dots \\ &= \frac{\frac{3}{20}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

77. D

在一擲中取得兩個相同數字的概率

$$\begin{aligned} &= \frac{6}{36} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

所求概率

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{6} \times \frac{1}{36} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{36} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \times \frac{1}{36} + \dots \\ &= \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{36}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \\ &= \frac{5}{66} \end{aligned}$$

78. C

所求之和 = $1024 + 256 + \dots$

$$\begin{aligned} &= \frac{1024}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4096}{3} \end{aligned}$$

79. C

$$\frac{5a}{1-a} = 4 + 2a$$

$$5a = (1-a)(4+2a)$$

$$0 = -2a^2 - 7a + 4$$

$$a = -4 \text{ (捨去)} \quad \text{或} \quad \frac{1}{2}$$

80. B

設 r 為該等比數列的公比。

I. $\checkmark$ 。

$$\text{公比} = r^3$$

II. $\times$ 。

取 $x = 1$ 、 $y = 2$ 及 $z = 4$ 使得 x, y, z 為等比數列。

$$\frac{3^y}{3^x} = \frac{3^2}{3^1} = 3$$

$$\frac{3^z}{3^y} = \frac{3^4}{3^2} = 9 \neq 3$$

該數列不是等比數列。

III. $\checkmark$ 。

$$\log y^2 - \log x^2 = 2 \log \frac{y}{x} = 2 \log r$$

$$\log z^2 - \log y^2 = 2 \log \frac{z}{y} = 2 \log r$$

公差為 $2 \log r$ 。