REG-CP1B-2425-ASM-SET 4-MATH
建議題解

結構式試題

1. (a) $f(x) = 3x^2 - 12kx + 11k^2 - 15$

$= 3[x - 2(2k)x + (2k)^2] - k^2 - 15$ 1M

$= 3(x - 2k)^2 - k^2 - 15$

所求坐標為 $\left(2k,\ -k^2 - 15\right)$。 1A

(b) $y = g(x)$ 的圖像的頂點的坐標為 $\left(3k,\ k^2 + 30\right)$。 1A

$g(x)$ 的最大值為 $k^2 + 30$，且 $k^2 + 30 > 0$。

不同意該宣稱。 1A

2. (a) $f(x) = x^2 - 8kx + 6x + 16k^2 - 19k + 11$

$= [x^2 - 2(x)(4k - 3) + (4k - 3)^2] + 5k + 2$ 1M

$= [x - (4k - 3)]^2 + 5k + 2$

頂點的坐標為 $(4k - 3,\ 5k + 2)$。 1A

(b) P 及 Q 的坐標分別為 $(4k - 3,\ 5k + 2)$ 及 $(4k + 6,\ 5k + 8)$。 1A

(OH 的斜率)(PQ 的斜率)

$= \dfrac{12 - 0}{-9 - 0} \times \dfrac{(5k + 8) - (5k + 2)}{(4k + 6) - (4k - 3)}$ 1M

$= -\dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{3}$

$= -\dfrac{8}{9} \neq -1$

不可能。 1A

3. (a) $p(x) = 4x^2 - 48ax + 146a^2 - 5$

$= 4[x^2 - 2(x)(6a) + (6a)^2] + 2a^2 - 5$ 1M

$= 4(x - 6a)^2 + 2a^2 - 5$

頂點的坐標為 $\left(6a,\ 2a^2 - 5\right)$。 1A

(b) H 的坐標為 $\left(6a,\ 2a^2 - 5\right)$。

K 的坐標為 $\left(-2a,\ -2a^2 + 5\right)$。 1A

留意 $HR : RK = (6a - 0) : (0 + 2a) = 3 : 1$。

設 $(0,\ r)$ 為 R 的坐標。

$\dfrac{(2a^2 - 5) - r}{r - (-2a^2 + 5)} = \dfrac{3}{1}$ 1M

$2a^2 - 5 - r = 3r + 6a^2 - 15$

$r = \dfrac{5}{2} - a^2$

R 的坐標為 $\left(0,\ \dfrac{5}{2}-a^2\right)$。 1A

4. (a) $g(x)=f(kx-1)$ 1M

$=2k^2x^2-(k^2+4k)x+k+2$ 1A

(b) $-2x+3=2k^2x^2-(k^2+4k)x+k+2$

$0=2k^2x^2-(k^2+4k-2)x+k-1$

$\Delta=(k^2+4k-2)^2-4(2k^2)(k-1)$ 1M

$=k^4+20k^2-16k+4$

$=k^4+4k^2+(16k^2-16k+4)$

$=k^4+4k^2+4(2k-1)^2$ 1M

>0

因此，L 與 Γ 相交於兩相異點。 1

5. (a) $f(x)=3x^2-24kx+200$

$=3[x^2-2(x)(4k)+(4k)^2]+200-48k^2$ 1M

$=3(x-4k)^2+200-48k^2$

P 的坐標為 $\left(4k,\ 200-48k^2\right)$。 1A

(b) (i) Q 的坐標為 $\left(4k-8,\ 200-48k^2\right)$。 1A

外心在 PQ 的垂直平分線上。

$\dfrac{4k+(4k-8)}{2}=4$

$k=2$ 1A

(ii) 可得 $\angle QPR=90^\circ$ 及 QR 為圓 PQR 的直徑。 1M

Q 的坐標為 $(0,\ 8)$。

設 R 的坐標為 $(a,\ b)$。

$\dfrac{a+0}{2}=4$ 及 $\dfrac{b+8}{2}=-8$ 1M

$a=8$ $b=-24$

R 的坐標為 $(8,\ -24)$。 1A

6. (a) $f(x)=2x^2-(4k+8)x+2k^2+4k+9$

$=2[x^2-2(x)(k+2)+(k+2)^2]-4k+1$ 1M

$=2[x-(k+2)]^2-4k+1$

該頂點的坐標為 $(k+2,\ -4k+1)$。 1A

(b) (i) A 及 B 的坐標分別為 $(k+2,\ -4k+1)$ 及 $(3k+6,\ 4k-1)$。 1A

S 的坐標為 $(2k+4,\ 0)$。 1A

(ii) 留意 $\triangle OAS$ 的面積為 $\triangle OAB$ 的面積的一半。

$$110 = 2 \times \frac{(4k-1)(2k+4)}{2} \quad \text{1M}$$

$$0 = 8k^2 + 14k - 114$$

$$k = 3 \quad 或 \quad -\frac{19}{4} \ （捨去） \quad \text{1A}$$

7. (a) 設 $f(x) = ax^2 + b(2x-7)$，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} 10 = a(4)^2 + b(8-7) \\ 7 = a(7)^2 + b(14-7) \end{cases} \quad \text{1M}$$

求解後，可得 $a = 1$ 及 $b = -6$。 1A+1A

因此，$f(x) = x^2 - 6(2x-7) = x^2 - 12x + 42$。

(b) (i) $f(x) = x^2 - 12x + 42$

$= [x^2 - 2(6)(x) + 6^2] + 6$ 1M

$= (x-6)^2 + 6$

所求坐標為 $(6,\ 6)$。 1A

(ii) $(-2,\ 0)$ 1A

(iii) (QS 的斜率)(RS 的斜率)

$$= \frac{7-6}{-1-6} \times \frac{7-0}{-1+2} \quad \text{1M}$$

$= -1$

可得 $\angle QS \perp RS$，且 P 在 S 點。

因此，$PQ \perp PR$。

同意該宣稱。 1A

8. (a) $f(x+k) = (x+k)^2 - 2(x+k) + 2$ 及 $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 2$ 1M

$= x^2 + (2k-2)x + k^2 - 2k + 2$ $= x^2 + 2x + 2$

比較 x 的係數及常數項。

可得 $2k - 2 = 2$ 及 $k^2 - 2k + 2 = 2$。

求解後，可得 $k = 2$。 1A

(b) $f(x) = f(-x)$

$x^2 - 2x + 2 = x^2 + 2x + 2$ 1M

$x = 0$

A 的坐標為 $(0,\ 2)$。 1A

(c) B 及 C 的坐標分別為 $(1,\ 1)$ 及 $(-1,\ 1)$。 1A

(的斜率AB)(AC 的斜率)

$$= \frac{2-1}{0-1} \times \frac{2-1}{0+1} \quad \text{1M}$$

$= -1$

可得 $AB \perp AC$。

$\triangle ABC$ 的垂心在點 A，不是在該三角形以外。
不同意該宣稱。 1A

9. (a) $f(x) = x^2 - 4kx + 3k^2 + 25$
$= [x^2 - 2(2k)x + (2k)^2] - k^2 + 25$ 1M
$= (x - 2k)^2 - k^2 + 25$
所求坐標為 $\left(2k,\ -k^2 + 25\right)$。 1A

(b) $-k^2 + 25 > 0$ 1M
$-5 < k < 5$ 1A

(c) B 及 C 的坐標分別為 $\left(2k,\ -k^2 + 15\right)$ 及 $\left(2k - 24,\ -k^2 + 15\right)$。 1A
$\triangle ABC$ 的外心在 BC 的垂直平分線上。
$$x = \frac{(2k) + (2k - 24)}{2}$$
$$x = 2k - 12$$
由於 $-5 < k < 5$，可得 $x = 2k - 12 < -2 < 0$。 1M
$\triangle ABC$ 的外心不可能在 y 軸的右方。 1A

10. (a) $f(x) = 3x^2 - 6(k - 1)x + 4k^2 - 6k - 6$
$= 3[x^2 - 2(k - 1)x + (k - 1)^2] + k^2 - 9$ 1M
$= 3[x - (k - 1)]^2 + k^2 - 9$
所求坐標為 $\left(k - 1,\ k^2 - 9\right)$。 1A

(b) (i) $y = f(x)$ 的圖像沿 x 軸反射；
然後向上平移 6 單位。 1A

$y = f(x)$ 的圖像向下平移 6 單位； 然後沿 x 軸反射。

1A

(ii) Q 的坐標為 $\left(k - 1,\ -k^2 + 15\right)$。
$-k^2 + 15 > 0$ 1M
$-\sqrt{15} < k < \sqrt{15}$
留意 k 為正數，可得 $0 < k < \sqrt{15}$。 1A

(iii) (1) 可得 $k = 3$、$P\,(2,\ 0)$ 及 $Q\,(2,\ 6)$。 1M
留意 $OP \perp PQ$。
F 的坐標為 $(2,\ 0)$。 1A
G 為 OQ 的中點。
G 的坐標為 $(1,\ 3)$。 1A
由於 FG 為 $\triangle OPQ$ 的中線，H 在 FG 上。
因此，F、G 與 H 共線。 1

(2) GP 的斜率 $= \dfrac{3-0}{1-2} = -3 \neq -1$

可得 $\angle GPO \neq 45^\circ$ 及 GP 不是 $\angle OPQ$ 的角平分線。 1M

$\triangle OPQ$ 的內心不在直線 GP 上。

不同意該宣稱。 1A