REG-CP1B-2425-ASM-SET 3-MATH
建議題解

結構式試題

1. (a) $(4m,\ 3m)$ 1A

(b) (i) P 的軌跡為 $\angle SOT$ 的角平分線。
留意 P 的軌跡通過 C 的圓心。 1M
所求方程為

$$y - 0 = \frac{3m - 0}{4m - 0}(x - 0)$$
$$y = \frac{3x}{4}$$

可得 $g(x) = \dfrac{3x}{4}$。 1A

(ii) 留意 $OC = \sqrt{(4m)^2 + (3m)^2} = 5m$ 及 $OC : OE = 5 : (5 + 3)$。

$$\frac{4m}{32} = \frac{5}{3 + 5}$$ 1M
$$m = 5$$ 1A

$\triangle UST$ 的形心在 OS 上。
因此，S 為 UT 的中點。
可得 $OU = OT = 4m = 20$。 1M
$y = g(x + r)$ 的圖像可藉將 $y = g(x)$ 的圖像向左平移 20 單位求得。
因此，$r = 20$。 1A

2. (a) 圓心 $(-4,\ 3)$，半徑 $= \sqrt{4^2 + 3^2 - 5} = 2\sqrt{5}$ 1A

(b)
$$(2y - k)^2 + y^2 + 8(2y - k) - 6y + 5 = 0$$ 1M
$$(4 + 1)y^2 + (-4k + 16 - 6)y + (k^2 - 8k + 5) = 0$$
$$5y^2 + (-4k + 10)y + (k^2 - 8k + 5) = 0$$

M 的 y 坐標 $= \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{-4k + 10}{5}\right) = \dfrac{2k - 5}{5}$ 1M

當 $y = \dfrac{2k - 5}{5}$ 時，$x = 2\left(\dfrac{2k - 5}{5}\right) - k = \dfrac{-k - 10}{5}$。

所求坐標為 $\left(\dfrac{-k - 10}{5},\ \dfrac{2k - 5}{5}\right)$。 1A

(c) 若 M 在 x 軸以上，則 $2k - 5 > 0$。故此，$k > \dfrac{5}{2}$。 1A
考慮方程 $5y^2 + (-4k + 10)y + (k^2 - 8k + 5) = 0$。
若 L 與 C 相交於兩相異點，

$$\Delta = (-4k + 10)^2 - 4(5)(k^2 - 8k + 5) > 0$$ 1M
$$-4k^2 + 80k > 0$$
$$0 < k < 20$$ 1A

集合 $k > \dfrac{5}{2}$ 和 $0 < k < 20$，可得 $\dfrac{5}{2} < k < 20$。

因此，M 可能在 x 軸以上的區域。 1A

3. (a) (i) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{x+1-(x+2)}{x^2-1}$

$= \dfrac{-1}{x^2-1}$ 1A

因此，$A = 0$ 及 $B = -1$。 1A

(ii) $f(x) = -4x^2 - 16x - 19$

$= -4[x^2 + 2(2)(x) + 2^2] - 3$ 1M

$= -4(x+2)^2 - 3$ 1A

$f(x)$ 的極大值為 -3。 1A

(b) $x^2 + [(k+2)x]^2 + \dfrac{1}{k-1}x - \dfrac{1}{k^2-1}(k+2)x + \dfrac{1}{(k^2-1)^2} = 0$ 1M

$(k^2+4k+5)x^2 + \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{k+2}{k^2-1}\right)x + \dfrac{1}{(k^2-1)^2} = 0$

$(k^2+4k+5)x^2 - \dfrac{1}{k^2-1}x + \dfrac{1}{(k^2-1)^2} = 0$ 1A

$\Delta = \left(\dfrac{1}{k^2-1}\right)^2 - 4(k^2+4k+5)\left(\dfrac{1}{(k^2-1)^2}\right)$ 1M

$= \dfrac{1}{(k^2-1)^2}(-4k^2 - 16k - 19)$

$= \dfrac{1}{(k^2-1)^2}[-4(k+2)^2 - 3]$ 1M

$\leq -3\left(\dfrac{1}{(k^2-1)^2}\right) < 0$

C 與 L 不相交。

同意該宣稱。 1A

4. (a) 設直線的斜率為 m。

該切線的方程為 $y = mx + 12$。

$x^2 + (mx+12)^2 - 10x + 46(mx+12) - 71 = 0$ 1M

$(1+m^2)x^2 + (70m-10)x + 625 = 0$

該方程有重根。

$\Delta = (70m-10)^2 - 4(1+m^2)(625) = 0$ 1M

$2400m^2 - 1400m - 2400 = 0$

$m = \dfrac{4}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{4}$

所求方程為 $y = \dfrac{4x}{3} + 12$ 及 $y = -\dfrac{3x}{4} + 12$。 1A

(b) 留意 $PQ \perp PR$ 及 K 為 QR 的中點。 1A

P、G、H 與 K 共線。

H 的坐標為 $(5,\ -23)$。

C 的半徑 $= \sqrt{5^2 + 23^2 + 71} = 25$

$PH = \sqrt{5^2 + (12 + 23)^2} = 25\sqrt{2}$

$GK = \frac{1}{3}PK = \frac{1}{3}(25\sqrt{2} + 25)$ 1M

考慮所求的面積比。

$$t : 1 = GK : HK$$ 1M

$$= \frac{25\sqrt{2} + 25}{3} : 25$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 1}{3} : 1$$

$$t = \frac{\sqrt{2} + 1}{3}$$ 1A

5. (a) (i) $x^2 + (mx)^2 - 400x - 300mx + 40\,000 = 0$ 1M

$(1 + m^2)x^2 - (300m + 400)x + 40\,000 = 0$

$\Delta = (300m + 400)^2 - 4(1 + m^2)(40\,000) > 0$ 1M

$10\,000(-7m^2 + 24m) > 0$

$0 < m < \frac{24}{7}$ 1A

(ii) M 的 $x = \frac{1}{2}\left[\frac{300m + 400}{1 + m^2}\right]$

$= \frac{50(3m + 4)}{1 + m^2}$

M 的 $y = m \cdot \frac{50(3m + 4)}{1 + m^2}$

$= \frac{50m(3m + 4)}{1 + m^2}$ 1

(b) (i) AB 的垂直平分線為通過 O 及 C 的圓心的直線。 1M

C 的圓心的坐標為 $(200,\ 150)$。

所求方程為

$$y - 0 = \frac{150 - 0}{200 - 0}(x - 0)$$

$$3x - 4y = 0$$ 1A

(ii) 留意當 $m = 0$ 或 $\frac{24}{7}$ 時，L 與 C 相切。

當 $m = 0$，L 與 C 的交點的坐標為 $(200,\ 0)$。

B 的坐標為 $(200,\ 0)$。 1A

當 $m = \frac{24}{7}$ 時，可得 A 的坐標為 $(56,\ 192)$。

將 C 的圓心記為 $G\ (200,\ 150)$。

假定 G 與 M 為相異點。

留意 $\angle GMO = 90^\circ$ 及 $\angle OBG = 90^\circ$。

可得 O、B、G、M 共圓。 1M

由於 $\angle OAG = 90^\circ$ 及 $\angle GMO = 90^\circ$，可得 O、A、G、M 共圓。

因此，O、A、M、G、B 共圓。
若 G 與 M 重合，O、A、G、B 同為共圓。
留意 OG 為該圓的直徑。
所求之圓的圓心為 $(100, 75)$。 1M
所求方程為

$$(x-100)^2+(y-75)^2=(0-100)^2+(0-75)^2$$
$$(x-100)^2+(y-75)^2=15\,625$$ 1A

(iii) 將圓 AMB 的圓心記為 D。

$$\tan\angle BOG=\frac{150}{200}$$
$$\angle BOG\approx 36.9^\circ$$

$\angle ADB=2\angle AOB=2(2\angle BOG)\approx 147^\circ$ 1M

Γ 的長度 $\leq 2\pi(125)\times\dfrac{\angle ADB}{360^\circ}$ 1M

$\approx 322<330$

不同意該宣稱。 1A

6. (a) $(x-2)^2+(y-6)^2=r^2$ 1A

(b) (i) 設 G 為 C' 的圓心，則 $G(-2,\ 6-c)$。 1A
由於 $AG\perp PQ$，

$$\frac{6-c-6}{-2-2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$ 1M
$$c=8$$ 1A

(ii) AG 的中點在 PQ 上，即 $(0, 2)$ 在 PQ 上。 1M
PQ 的方程為 $y=-\dfrac{x}{2}+2$。 1A

(iii) $(x-2)^2+\left(-\dfrac{x}{2}+2-6\right)^2=r^2$ 1M

$$\frac{5}{4}x^2+20-r^2=0$$

a 及 d 為該方程的根。
故此，$a+d=0$ 及 $ad=\dfrac{4(20-r^2)}{5}$。 1M

$(a-d)^2=(a+d)^2-4ad$

$=\dfrac{16(r^2-20)}{5}$ 1A

(c) $PQ^2=(a-d)^2+\left[\left(-\dfrac{a}{2}+2\right)-\left(-\dfrac{d}{2}+2\right)\right]^2$

$80=\dfrac{5}{4}(a-d)^2$

$=4(r^2-20)$ 1M

$r^2=40$

$r=2\sqrt{10}$ 或 $-2\sqrt{10}$（捨去）

$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{34} < r$
故此，B 在 C 內。
同意該宣稱。 1A

7. (a) AG 的斜率 $= \dfrac{112-12}{83-158} = \dfrac{-4}{3}$
所求方程為

$$y - 12 = \frac{-4}{3}(x - 158)$$ 1M

$$4x + 3y - 668 = 0$$ 1A

(b) $GP = \sqrt{(83-23)^2 + (112-67)^2} = 75$
$AG = \sqrt{(158-83)^2 + (112-12)^2} = 125$
$AP = \sqrt{125^2 - 75^2} = 100$
將 AG 與 PQ 的交點記為 T。
留意 $\triangle AGP \sim \triangle APT$。

$$\frac{AT}{AP} = \frac{AP}{AG}$$ 1M

$$AT = 80$$

$AT : TG = 80 : (125 - 80) = 16 : 9$
所求坐標 $= \left(\dfrac{16(83)+9(158)}{16+9},\ \dfrac{16(112)+9(12)}{16+9}\right)$ 1M
$= (110,\ 76)$ 1A

(c) 將 $\triangle APQ$ 的內心及內切圓的半徑分別記為 S 及 r。
假定 AP 與該內切圓相切於 U。
留意 $\triangle AUS \sim \triangle APG$。

$$\frac{AS}{US} = \frac{AG}{PG}$$

$$\frac{80-r}{r} = \frac{125}{75}$$ 1M

$$r = 30$$ 1A

$AS : ST = (80 - 30) : 30 = 5 : 3$
S 的坐標 $= \left(\dfrac{5(110)+3(158)}{5+3},\ \dfrac{5(76)+3(12)}{5+3}\right)$ 1M
$= (128,\ 52)$
所求方程為

$$(x-128)^2 + (y-52)^2 = 30^2$$

$$(x-128)^2 + (y-52)^2 = 900$$ 1A

(d) 留意 A、P、G、Q 共圓。
$\triangle APQ$ 的外接圓的半徑 $= \dfrac{AG}{2} = \dfrac{125}{2}$ 1M
所求比例 $= 30^2 : \left(\dfrac{125}{2}\right)^2$ 1M
$= 144 : 625 \neq 1 : 4$

不同意該宣稱。 1A

8. (a) G 的坐標為 $(47,\ 42)$。

TG 的斜率 $= \dfrac{42-12}{47-7} = \dfrac{3}{4}$

所求方程為

$$y - 12 = \frac{3}{4}(x-7) \qquad \text{1M}$$

$$3x - 4y + 27 = 0 \qquad \text{1A}$$

(b) C 的半徑 $= \sqrt{47^2 + 42^2 - 3073} = 30$

留意 G 與 T 的垂直距離為 30。

其中一條通過 T 的切線為水平，且與 C 相切於 $(47,\ 12)$。 1M

留意 $XY \perp TG$。XY 的斜率為 $-\dfrac{4}{3}$。

XY 的方程為

$$y - 12 = -\frac{4}{3}(x-47)$$

$$4x + 3y - 224 = 0$$

解 $\begin{cases} 3x - 4y + 27 = 0 \\ 4x + 3y - 224 = 0 \end{cases}$， 1M

可得 $x = \dfrac{163}{5}$ 及 $y = \dfrac{156}{5}$。

K 的坐標為 $\left(\dfrac{163}{5},\ \dfrac{156}{5}\right)$。 1A

C 的半徑 $= \sqrt{47^2 + 42^2 - 3073} = 30$

$GT = \sqrt{(47-7)^2 + (42-12)^2} = 50$

$TX = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$

留意 $\triangle GTX \sim \triangle XTK$。

$$\frac{TK}{TX} = \frac{TX}{GT}$$

$$\frac{TK}{40} = \frac{40}{50}$$

$$TK = 32$$

可得 $TK : KG = 32 : 18 = 16 : 9$。

設 K 的坐標為 $(a,\ b)$。

$$\frac{a-7}{47-a} = \frac{16}{9} \quad \text{及} \quad \frac{b-12}{42-b} = \frac{16}{9}$$

$$a = \frac{163}{5} \qquad\qquad b = \frac{156}{5}$$

K 的坐標為 $\left(\dfrac{163}{5},\ \dfrac{156}{5}\right)$。

(c) (i) $XY = 2XK = 2\sqrt{40^2 - 32^2} = 48$

設 r 為 $\triangle TXY$ 的內切圓的半徑。

考慮 $\triangle TXY$ 的面積。留意 $TK \perp XY$。

$$\frac{(XY)(TK)}{2} = \frac{(XY)(r)}{2} + \frac{(TX)(r)}{2} + \frac{(TY)(r)}{2}$$ 1M

$$768 = 64r$$

$$r = 12$$

可得 $TI : IK = (32 - 12) : 12 = 5 : 3$。

設 (c, d) 為 I 的坐標。

$$\frac{c - 7}{\frac{163}{5} - c} = \frac{5}{3} \quad 及 \quad \frac{d - 12}{\frac{156}{5} - d} = \frac{5}{3}$$

$$c = 23 \qquad\qquad d = 24$$

I 的坐標為 $(23, 24)$。 1A

(ii) 可得 $\angle TXG + \angle TYG = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$。

點 T、X、G 與 Y 共圓。

J 同為 $TXGY$ 的外接圓的圓心。

則 J 為 TG 的中點。

J 的坐標為 $(27, 27)$。 1A

留意 J 在 I 與 G 之間。

$$\angle XJG = \angle XIG + \angle IXJ$$

$$> \angle XIG$$

不同意該宣稱。 1A