

1. (a) $f(x) = (8x^2 + ax + 8)(3x^2 + 7x + r) + bx + c$ 1M
 $= 24x^4 + (56 + 3a)x^3 + \dots$
 $56 + 3a = 47$ 1M
 $a = -3$ 1A
- (b) (i) 設 $g(x) = A(8x^2 + ax + 8) + bx + c$ ，其中 A 為一常數。 1M
 $f(x) - g(x) = [(8x^2 + ax + 8)(3x^2 + 7x + r) + bx + c] - [A(8x^2 + ax + 8) + bx + c]$
 $= (8x^2 + ax + 8)(3x^2 + 7x + r - A)$
 因此， $f(x) - g(x)$ 可被 $8x^2 + ax + 8$ 整除。 1
- (ii) $f(x) - g(x) = 0$
 $(8x^2 - 3x + 8)(3x^2 + 7x + r - A) = 0$
 $8x^2 - 3x + 8 = 0$ 或 $3x^2 + 7x + r - A = 0$ 1M
 對 $8x^2 - 3x + 8 = 0$ ，
 $\Delta = (-3)^2 - 4(8)(8) = -247 < 0$ 。該方程沒有實根。 1M
 對 $3x^2 + 7x + r - A = 0$ ，方程有最多 2 個實根。
 因此， $f(x) - g(x) = 0$ 有最多 2 個實根。
 不同意該宣稱。 1A
2. (a) 設 $f(x) = (x^2 + x - 1)(Ax + B)$ ，其中 A 及 B 均為常數。 1M

$$\begin{cases} f(-7) = -123 = (49 - 7 - 1)(-7A + B) \\ f(3) = 297 = (9 + 3 - 1)(3A + B) \end{cases}$$
 1M
 求解後，可得 $A = 3$ 及 $B = 18$ 。
 所求商式為 $3x + 18$ 。 1A
- (b) $f(x) = 0$
 $(x^2 + x - 1)(3x + 18) = 0$
 $3(x^2 + x - 1)(x + 6) = 0$
 $x = -6$ 或 $x^2 + x - 1 = 0$ 1M
 對 $x^2 + x - 1 = 0$ ， $x \approx 0.618$ 或 $x \approx -1.62$ 。 1M
 方程 $f(x) = 0$ 只有一個正數根。
 該宣稱不正確。 1A
3. (a) $f(x) = (x - 2)(x^2 - 3x + 4) + r$ 1A
 $f(1) = 0$ 1M
 $(1 - 2)(1 - 3 + 4) + r = 0$
 $r = 2$ 1A
- (b) $f(x) = (x - 2)(x^2 - 3x + 4) + 2$
 $= x^3 - 5x^2 + 10x - 6$
 $= (x - 1)(x^2 - 4x + 6)$ 1M

可得 $g(x) = x^2 - 4x + 6$ 。 1A

考慮方程 $x^2 - 4x + 6 = 0$ 。

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(6) \quad 1M$$

$$= -8$$

$$< 0$$

該方程沒有實根。

同意該宣稱。

1A

4. (a) $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$

$$= ax^3 + (2a+b)x^2 + (2b+c)x + 2c$$

可得 $a = -2$ 、 $2a + b = 0$ 及 $2c = -6$ 。 1M

求解後，可得 $a = -2$ 、 $b = 4$ 及 $c = -3$ 。 3A

(b) $0 = (x+2)(-2x^2 + 4x - 3)$

$$x = -2 \quad \text{或} \quad -2x^2 + 4x - 3 = 0 \quad 1M$$

對 $-2x^2 + 4x - 3 = 0$ ，可得

$$\Delta = 4^2 - 4(-2)(-3) \quad 1M$$

$$= -8$$

$$< 0$$

方程 $-2x^2 + 4x - 3 = 0$ 沒有實根，即沒有無理根。

留意 -2 不是無理數。

不同意該宣稱。

1A

5. (a) 設 $q(x) = Ax + B$ ，其中 A 及 B 均為常數。

$$g(x) = f(x)(Ax + B) + (2Ax + 2B) \quad 1M$$

$$= (21x^3 - 2x^2 - 8x - 2)(Ax + B) + 2Ax + 2B$$

比較 x^3 及 x 的係數。

$$\begin{cases} -33 = 21B - 2A \\ 8 = -8B - 2A + 2A \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $A = 6$ 及 $B = -1$ 。

可得商式 $= 6x - 1$ 及餘式 $= 12x - 2$ 。 1A

(b) $g(x) = 0$

$$(6x - 1)(21x^3 - 2x^2 - 8x - 2) + 2(6x - 1) = 0$$

$$(6x - 1)(21x^3 - 2x^2 - 8x) = 0 \quad 1M$$

$$x(6x - 1)(3x - 2)(7x + 4) = 0 \quad 1M$$

$$x = 0 \quad \text{或} \quad \frac{1}{6} \quad \text{或} \quad \frac{2}{3} \quad \text{或} \quad -\frac{4}{7} \quad 1M$$

所有根均為有理數。

該方程沒有無理根。

該宣稱不正確。

1A

6. (a) 設 $g(x) = (2x^2 - 9x + 14)(Ax + B) + 3x - 1$ ，其中 A 及 B 均為常數。

1M

$$\begin{cases} 33 = [2(2)^2 - 9(2) + 14](2A + B) + 3(2) - 1 \\ 21 = [2(-1)^2 - 9(-1) + 14](-A + B) + 3(-1) - 1 \end{cases}$$

1M

求解後，可得 $A = 2$ 及 $B = 3$ 。

所求商式為 $2x + 3$ 。

1A

(b) $(2x^2 - 9x + 14)(2x + 3) + 3x - 1 = 2(x + 2)(3x - 1)$

$$(2x^2 - 9x + 14)(2x + 3) + (3x - 1)[1 - 2(x + 2)] = 0$$

1M

$$(2x + 3)[(2x^2 - 9x + 14) - (3x - 1)] = 0$$

1M

$$(2x + 3)(2x^2 - 12x + 15) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \quad \text{或} \quad 2x^2 - 12x + 15 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4(2)(15)}}{2(2)}$$

1M

$$= \frac{6 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$\frac{6 \pm \sqrt{6}}{2}$ 不是有理數。

不同意該宣稱。

1A

7. (a) $f(x) = 2(x - 2)(x^2 - 4x + 1) + ax + b$

1M

$$= 2x^3 - 12x^2 + (18 + a)x + (b - 4)$$

可得 $2b = -12$ 、 $18 + a = 7a$ 及 $c = b - 4$ 。

1M

求解後，可得 $a = 3$ 、 $b = -6$ 及 $c = -10$ 。

1A

(b) $0 = 2(x - 2)(x^2 - 4x + 1) + 3x - 6$

$$= (x - 2)[2(x^2 - 4x + 1) + 3]$$

1M

$$= (x - 2)(2x^2 - 8x + 5)$$

$$x = 2 \quad \text{或} \quad \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(2)(5)}}{2(2)}$$

$$= 2 \quad \text{或} \quad \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$$

1A

共有 1 個有理根。

1A

8. (a) $f(-1) = 0 = -4(-1)^3 + (a + 2)(-1)^2 + 2(-1) - 3b$

1M

$$a - 3b = -4$$

$$f(2) = 9 = -4(2)^3 + (a + 2)(2)^2 + 2(2) - 3b$$

1M

$$4a - 3b = 29$$

求解後，可得 $a = 11$ 及 $b = 5$ 。

1A

(b) $f(x) = -4x^3 + 13x^2 + 2x - 15$
 $= (-x^2 + 2x + 3)(4x - 5)$ 1M
 故此， $g(x) = 4x - 5$ 。

$$kx(4x - 5) = (-x^2 + 2x + 3)(4x - 5)$$
 1M

$$(4x - 5)(x^2 + (k - 2)x - 3) = 0$$
 1M

$$x = \frac{5}{4} \quad \text{或} \quad x^2 + (k - 2)x - 3 = 0$$

$$\Delta = (k - 2)^2 - 4(1)(-3) = (k - 2)^2 + 12 > 0, \text{ 對所有實數值 } k。$$

$$x^2 + (k - 2)x - 3 = 0 \text{ 有兩個相異實根。}$$

同意該宣稱。 1A

9. (a) $f(x) = (x^2 - 1)(x + h) + 4x + k$ 1A

$$f(-1) = (1 - 1)(-1 + h) - 4 + k = 0$$
 1M

$$k = 4$$
 1A

(b) $(x^2 - 1)(x + h) + 4x + 4 = 0$

$$(x + 1)(x - 1)(x + h) + 4(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)[(x - 1)(x + h) + 4] = 0$$

$$(x + 1)[x^2 + (h - 1)x + (4 - h)] = 0$$

$$x = -1 \quad \text{或} \quad x^2 + (h - 1)x + (4 - h) = 0$$
 1M

假定方程 $x^2 + (h - 1)x + (4 - h) = 0$ 有重根。

$$\Delta = (h - 1)^2 - 4(4 - h) = 0$$
 1M

$$h^2 + 2h - 15 = 0$$

$$h = -5 \quad \text{或} \quad 3$$

假定 $x = -1$ 為 $x^2 + (h - 1)x + (4 - h) = 0$ 的根。

$$(-1)^2 + (h - 1)(-1) + (4 - h) = 0$$
 1M

$$h = 3$$

當 $h = -5$ 時，方程 $f(x) = 0$ 有兩個相異根。

當 $h = 3$ 時，方程 $f(x) = 0$ 只有重根 $x = -1$ 。

因此， h 的可取值為 -5 。 1A

10. (a) $p(x) = (x^2 - 2x + 2)(10x^2 + ax - 19) + (bx + 41)$ 1M

由於 $p(x)$ 可被 $(x + 1)(x - 1)$ 整除，可得 $p(1) = p(-1) = 0$ 。

$$\begin{cases} 0 = (1 - 2 + 2)(10 + a - 19) + b + 41 \\ 0 = (1 + 2 + 2)(10 - a - 19) - b + 41 \end{cases}$$
 1M

求解後，可得 $a = 7$ 及 $b = -39$ 。 1A+1A

(b) $0 = p(x)$

$$0 = (x^2 - 2x + 2)(10x^2 + 7x - 19) - 39x + 41$$

$$= 10x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 13x + 3$$

$$= (x^2 - 1)(10x^2 - 13x - 3)$$

1M

$$= (x + 1)(x - 1)(2x - 3)(5x + 1)$$

$$x = \pm 1 \quad \text{或} \quad \frac{3}{2} \quad \text{或} \quad -\frac{1}{5}$$

1M

方程 $p(x) = 0$ 有 4 個有理根。

1A

11. (a) $f(x) = (x - 1)[x^2 + (h - 1)x - h] + k$ 可得 $f(-h) = 5$ 。

1M

$$(-h - 1)(h^2 - (h - 1)h - h) + k = 5$$

1M

$$k = 5$$

1A

可得 $f(2) = 0$ 。

$$(2 - 1)(2^2 + (h - 1)2 - h) + 5 = 0$$

$$h = -7$$

1A

因此， $h = -7$ 及 $k = 5$ 。

(b) $f(x) = 0$

$$(x - 1)(x^2 - 8x + 7) + 5 = 0$$

$$x^3 - 9x^2 + 15x - 2 = 0$$

1A

$$(x - 2)(x^2 - 7x + 1) = 0$$

1M

$$x = 2 \quad \text{或} \quad x^2 - 7x + 1 = 0$$

考慮方程 $x^2 - 7x + 1 = 0$ 。

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(1)}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

根為無理數。

不同意該宣稱。

1A

12. (a) $f(x) = (x^2 + cx + c)(4x - 8) + 17x + 29$

1M

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{9}{4} - \frac{3c}{2} + c\right)(-6 - 8) - \frac{51}{2} + 29 = 0$$

1M

$$c = 4$$

1A

(b) $f(x) = 0$

$$(x^2 + 4x + 4)(4x - 8) + 17x + 29 = 0$$

$$4x^3 + 8x^2 + x - 3 = 0$$

$$(2x + 3)(2x^2 + x - 1) = 0 \quad 1M$$

$$(2x + 3)(x + 1)(2x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{或} \quad -1 \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} \quad 1M$$

$-\frac{3}{2}$ 、 -1 及 $\frac{1}{2}$ 均為有理數。
共有 3 個有理根。 1A

13. (a) $p(x) = (x + r)(x^2 - rx + 2r^2) - 4r^3$ 1A
 $p(r) = (r + r)(r^2 - r^2 + 2r^2) - 4r^3$ 1M
 $= 4r^3 - 4r^3$
 $= 0$
 $p(x)$ 可被 $x - r$ 整除。 1

(b) $0 = (x + r)(x^2 - rx + 2r^2) - 4r^3$
 $= x^3 + r^2x - 2r^3$
 $= (x - r)(x^2 + rx + 2r^2)$ 1M
 $x = r$ 或 $x^2 + rx + 2r^2 = 0$ 1A
 當 $x^2 + rx + 2r^2 = 0$ 時， $\Delta = r^2 - 4(1)(2r^2) = -7r^2 < 0$ 。 1M
 方程 $x^2 + rx + 2r^2 = 0$ 的根不是實數。
 不同意該宣稱。 1A

14. (a) 設 $h(x) = g(x)(Ax + B) + Cx^2 + Dx + E$ ，其中 A 、 B 、 C 、 D 及 E 均為常數。 1M
 比較 x^4 的係數。
 $12 = 6A$ 1M
 $A = 2$
 比較 x^3 的係數。
 $8 = 6B + A$
 $B = 1$
 所求商式為 $2x + 1$ 。 1A

(b) $h(x) = g(x)(2x + 1) + R(x)$
 $g(x) = 6x^3 + x^2 - 18x + 8$
 $= (2x - 1)(3x^2 + 2x - 8)$
 $= (2x - 1)(3x - 4)(x + 2)$ 1M
 留意 $R(-2) = 0$ 及 $R\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 。

可得 $R(x) = r(x+2)(2x-1)$ ，其中 r 為常數。 1M

$$h(x) = 0$$

$$(2x-1)(3x-4)(x+2)(2x+1) + r(x+2)(2x-1) = 0$$

$$(2x-1)(x+2)[(3x-4)(2x+1) + r] = 0 \quad 1M$$

可得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = -2$ 或 $(3x-4)(2x+1) + r = 0$ 。

-2 為 $h(x) = 0$ 的負數根。

不同意該宣稱。 1A

15. (a) $f(-1) = h = -h - 1 + 9 + k$ 1M

$$2h - k = 8$$

$$0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{h}{8} - \frac{1}{4} - \frac{9}{2} + k \quad 1M$$

$$h + 8k = 38$$

求解後，可得 $h = 6$ 及 $k = 4$ 。 1A+1A

(b) $f(x) = 6$

$$6x^3 - x^2 - 9x - 2 = 0$$

$$(x+1)(6x^2 - 7x - 2) = 0 \quad 1M$$

$$x = -1 \quad \text{或} \quad \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(6)(-2)}}{2(6)} \quad 1M$$

$$= -1 \quad \text{或} \quad \frac{7 \pm \sqrt{97}}{12}$$

$f(x) = 6$ 有無理根。

不同意該宣稱。 1A

16. (a) $f(12) = 12^3 - 96(12) - 576 = 0$ 1M

$$f(x) = (x-12)(x^2 + 12x + 48) \quad 1A$$

(b) (i) A 的體積 $= \frac{1}{3}\pi(9)^2(18)$

$$= 486\pi \text{ cm}^3$$

設 h_A cm 為 44 秒後容器 A 內的水深。

$$\left(\frac{h_A}{18}\right)^3 = \frac{35 \times 2\pi}{486\pi}$$

$$h_A^3 = 840$$

$$h_A \approx 9.44 \quad 1A$$

設 h_B cm 為 44 秒後容器 B 內的水深。

$$\pi 4^2 h_B = 44 \times \pi$$

$$h_B = 2.75 \quad 1A$$

$$< h_A$$

容器 A 內的水深較高。

1A

(ii) 設 h cm 為兩容器相等的水深。

考慮兩容器達至相同水深所需的時間。

$$\frac{486\pi \left(\frac{h}{18}\right)^3 - 35 \times 2\pi}{\pi} = \frac{\pi 4^2(h) - 44\pi}{2\pi}$$

1M

$$\frac{h^3}{12} - 70 = 8h - 22$$

$$h^3 - 96h - 576 = 0$$

$$(h - 12)(h^2 + 12h + 48) = 0$$

1M

$$h = 12 \quad \text{或} \quad h^2 + 12h + 48 = 0$$

考慮方程 $h^2 + 12h + 48 = 0$ 。

$$\Delta = 12^2 - 4(1)(48)$$

$$= -48$$

$$< 0$$

該方程沒有實根。

所求水深為 12 cm。

1A

17. (a) 設 $f(x) = (x^2 - 4)(Ax + B) + kx + 24$ ，其中 A 及 B 均為常數。

1M

$$f(2) = 0$$

$$(4 - 4)(2A + B) + 2k + 24 = 0$$

1M

$$k = -12$$

1A

(b) $f(0) = 8$

$$(0 - 4)(0 + B) + 0 + 24 = 8$$

1M

$$B = 4$$

1A

$$f(-1) = 0$$

$$(1 - 4)(-A + 4) + 12 + 24 = 0$$

$$A = -8$$

1A

$$f(x) = 0$$

$$(x^2 - 4)(-8x + 4) - 12x + 24 = 0$$

$$(x + 2)(x - 2)(-8x + 4) - 12(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)[(x + 2)(-8x + 4) - 12] = 0$$

$$(x - 2)(-8x^2 - 12x - 4) = 0$$

$$-4(x - 2)(x + 1)(2x + 1) = 0$$

1M

$$x = 2 \quad \text{或} \quad -1 \quad \text{或} \quad -\frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2}$ 不是整數。

該宣稱不正確。

1A

18. (a) 考慮 $f(x)$ 的常數項。

$$0 - (1)(-1) + b = 15$$

$$b = 14$$

1A

可得 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ 。

$$\frac{27}{2} - \left(\frac{3a}{2} + 1\right)(6 - 1) + 14 = 0$$

1M

$$a = 3$$

1A

(b) $f(x) = 4x^3 - (3x + 1)(4x - 1) + 14$

$$= 4x^3 - 12x^2 - x + 15$$

1M

$$= (2x - 3)(2x^2 - 3x - 5)$$

1M

$$f(x) + g(x) = 0$$

$$(2x - 3)(2x^2 - 3x - 5) + (2x^2 - 3x - 5)(x + 2) + 3x - 1 = 0$$

1M

$$(2x^2 - 3x - 5)(3x - 1) + 3x - 1 = 0$$

$$(3x - 1)(2x^2 - 3x - 4) = 0$$

1M

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{或} \quad 2x^2 - 3x - 4 = 0$$

考慮方程 $2x^2 - 3x - 4 = 0$ 。

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

根不是有理數。

方程 $f(x) + g(x) = 0$ 有 1 個有理根。

1A

19. (a) $f(-1) = g(-1)$

$$a(-1)^3 - b(-1)^2 - (-1) + 2 = (-1)^3 + a(-1)^2 - b$$

1M

$$-a - b + 3 = -1 + a - b$$

$$a = 2$$

1A

$$f(1) = 0$$

$$2(1)^3 - b(1)^2 - 1 + 2 = 0$$

1M

$$b = 3$$

1A

(b) $f(x) - 2g(x) = -1$

$$7x^2 + x - 9 = 0$$

1M

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(7)(-9)}}{2(7)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{253}}{14}$$

根為無理數。

同意該宣稱。

1A

20. (a) 設 $f(x) = (x^2 - 4)(Ax + B) + kx - 12$ ，其中 A 及 B 均為常數。

1M

$$f(2) = 0$$

$$(4 - 4)(2A + B) + 2k - 12 = 0$$

1M

$$k = 6$$

1A

(b) $f(0) = 20$

$$(0 - 4)(0 + B) + 0 - 12 = 20$$

1M

$$B = -8$$

1A

$$f(-3) = -40$$

$$(9 - 4)(-3A - 8) + 6(-3) - 12 = -40$$

$$A = -2$$

1A

$$f(x) = 0$$

$$(x^2 - 4)(-2x - 8) + 6x - 12 = 0$$

$$(x + 2)(x - 2)(-2x - 8) + 6(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)[(x + 2)(-2x - 8) + 6] = 0$$

$$2(x - 2)(-x^2 - 6x - 5) = 0$$

$$-2(x - 2)(x + 1)(x + 5) = 0$$

1M

$$x = 2 \quad \text{或} \quad -1 \quad \text{或} \quad -5$$

所有根均為整數。

該宣稱正確。

1A

21. (a) 設 $f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + kx + 64$ ，其中 $Q(x)$ 為多項式。

1M

$$f(2) = 0$$

$$(4 - 4)Q(2) + 2k + 64 = 0$$

$$k = -32$$

1A

可得 $f(-2) = 0 + 64 + 64 = 128$ 。

$$(-2)(-6 + 5)^2 - 2p + q = 128$$

1M

$$-2p + q = 130$$

可得 $f(2) = 0$ 。

$$2(6 + 5)^2 + 2p + q = 0$$

$$2p + q = -242$$

求解後，可得 $p = -93$ 及 $q = -56$ 。

1A

(b) $f(x) = 0$

$$x(3x+5)^2 - 93x - 56 = 0$$

$$9x^3 + 30x^2 - 93x - 56 = 0$$

$$(x-2)(9x^2 + 48x + 28) = 0$$

$$(x-2)(3x+2)(3x+14) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{或} \quad -\frac{2}{3} \quad \text{或} \quad -\frac{14}{3}$$

方程 $f(x) = 0$ 有 3 個有理根。

22. (a) 設 $p(x) = (x^3 - 6x^2 - 3x + 16)(Ax + B) + 11x - 28$ ，其中 A 及 B 均為非零常數。

$$\begin{cases} 15 = (1 - 6 - 3 + 16)(A + B) + 11 - 28 \\ 0 = (216 - 216 - 18 + 16)(6A + B) + 66 - 28 \end{cases}$$

求解後，可得 $A = 3$ 及 $B = 1$ 。

因此， $p(x) = (x^3 - 6x^2 - 3x + 16)(3x + 1) + 11x - 28$ 。

(b) $p(-2) = (-8 - 24 + 6 + 17)(-6 + 1) - 22 - 28$
 $= 0$

因此， $x + 2$ 為 $p(x)$ 的因式。

(c) $0 = (x^3 - 6x^2 - 3x + 16)(3x + 1) + 11x - 28$
 $0 = 3x^4 - 17x^3 - 15x^2 + 56x - 12$
 $0 = (x + 2)(x - 6)(3x^2 - 5x + 1)$
 $x = -2 \quad \text{或} \quad 6 \quad \text{或} \quad 3x^2 - 5x + 1 = 0$
 對 $3x^2 - 5x + 1 = 0$ ，

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{5 \pm 13}{6}$$

留意 $\frac{5 + \sqrt{13}}{6}$ 為無理數。

不同意該宣稱。

(d) $6, -2, 0, \frac{5}{3}$

23. (a) 設 $f(x) = (x^2 + 6x - 7)(Ax + B)$ ，其中 A 及 B 均為常數。

$$\begin{cases} f(-1) = 96 = (1 - 6 - 7)(-A + B) \\ f(2) = 9 = (4 + 12 - 7)(2A + B) \end{cases}$$

求解後，可得 $A = 3$ 及 $B = -5$ 。

商式為 $3x - 5$ 。

$$(b) \quad (x^2 + 6x - 7)(3x - 5) = 2x + 14$$

$$(x + 7)(x - 1)(3x - 5) - 2(x + 7) = 0 \quad 1M$$

$$(x + 7)[(x - 1)(3x - 5) - 2] = 0$$

$$(x + 7)(3x^2 - 8x + 3) = 0 \quad 1A$$

$$x = -7 \quad \text{或} \quad \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(3)(3)}}{2(3)}$$

$$= -7 \quad \text{或} \quad \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

由於 $\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$ 為無理數，同意該宣稱。 1A

24. (a) 設 $f(x) = (3 - 4x - x^2)(Ax + B) + (35x - 28)$ ，其中 A 及 B 均為常數。 1M

$$f(x) = (3 - 4x - x^2)(Ax + B) + (35x - 28)$$

$$= -Ax^3 + (-4A - B)x^2 + (3A - 4B + 35)x + (3B - 28)$$

可得 $3A - 4B + 35 = -1$ 及 $3B - 28 = -10$ 。 1M

求解後，可得 $A = -4$ 及 $B = 6$ 。

可得 $m = -A = 4$ 及 $n = -4A - B = 10$ 。 1A

$$(b) \quad f(-2) = 4(-2)^3 + 10(-2)^2 - (-2) - 10$$

$$= 0$$

因此， $x + 2$ 為 $f(x)$ 的因式。 1

$$(c) \quad f(x) = 0$$

$$(x + 2)(4x^2 + 2x - 5) = 0 \quad 1M$$

$$x = -2 \quad \text{或} \quad 4x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{或} \quad 0.896 \quad \text{或} \quad -1.40 \quad 1M$$

方程 $f(x) = 0$ 的所有根均為實數。

同意該宣稱。 1A

25. D

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^2 - b\left(\frac{b}{a}\right) + c = 0$$

$$\frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a} + c = 0$$

$$c = 0$$

$$\text{餘數} = a\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - b\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$= \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a}$$

$$= \frac{2b^2}{a}$$

26. D

$$(-3)^3 + 27(-3)^2 + k(-3) - 3 = 0$$

$$-3k + 213 = 0$$

$$k = 71$$

27. D

$$\text{設 } f(x) = x^4 - 9x^2 - 24x - 16 \circ$$

$$\text{留意 } f(-1) = f(4) = 0 \circ$$

$(x+1)$ 及 $(x-4)$ 為 $f(x)$ 的因式。

$$\text{因此, } x^4 - 9x^2 - 24x - 16 = (x^2 + 3x + 4)(x+1)(x-4) \circ$$

28. A

$$f(2) = 0$$

$$8 - 8 + 2 + k = 0$$

$$k = -2$$

$$\text{餘數} = f(-1)$$

$$= -1 - 2 - 1 - 2$$

$$= -6$$

29. D

$$f(5) = 0 = 2(5)^2 - 13(5) + k$$

$$k = 15$$

$$\text{所求餘數} = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 13\left(-\frac{1}{2}\right) + 15$$

$$= 22$$

30. A

$$p(-k) = -k^3 + k^3 - 4k - 16 = 0$$

$$k = -4$$

$$\text{餘數} = (-2)^3 - 4(-2)^2 + 4(-2) - 16$$

$$= -48$$

31. C

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = 0$$

$$\frac{48}{p^4} - 3 = 0$$

$$p^4 = 16$$

$$\text{餘數} = f(-p)$$

$$= 48(-p)^4 - 3$$

$$= 48(16) - 3$$

$$= 765$$

32. C

$$a\left(-\frac{1}{3}\right)^8 + 81\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + b\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{3}\right) + c = 0$$

$$\frac{a}{6561} + \frac{b}{9} + c - 2 = 0$$

$$\frac{a}{6561} + \frac{b}{9} + c = 2$$

$$\text{餘數} = g\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= a\left(\frac{1}{3}\right)^8 + 81\left(\frac{1}{3}\right)^3 + b\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{3}\right) + c$$

$$= \frac{a}{6561} + \frac{b}{9} + c - 2$$

$$= (2) - 2$$

$$= 0$$

33. C

$$\text{可得 } g(x) = (x^2 - 5x + 2)(2x + 3) + ax + 3 \circ$$

$$g(1) = 0$$

$$(1 - 5 + 2)(2 + 3) + a + 3 = 0$$

$$a = 7$$

$$\text{餘數} = g\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2} + 2\right)(-1 + 3) - \frac{7}{2} + 3$$

$$= 9$$

34. D

$$(-2)^3 - 6(-2)^2 - 3(-2) + k = 5$$

$$k = 31$$

35. A

$$(1)^8 + a(1)^7 + b = 2a$$

$$1 + a + b = 2a$$

$$b = a - 1$$

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= (-1)^8 + a(-1)^7 + (a - 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

36. D

設 $f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + Ax + B$ ，其中 $Q(x)$ 為多項式， A 及 B 均為常數。

$$\begin{cases} f(-2) = 0 = -2A + B \\ f(2) = 4 = 2A + B \end{cases}$$

求解後，可得 $A = 1$ 及 $B = 2$ 。

所求餘式為 $x + 2$ 。

37. C

留意 $f(3) = (3 - 1)^3 - 6(3 - 1) + 4 = 0$ 。

因此， $x - 3$ 為 $f(x)$ 的因式。

38. A

$$a(3)^3 - 2a(3)^2 - 27 = 0$$

$$9a - 27 = 0$$

$$a = 3$$

39. A

$$3^3 + a(3)^2 - 3b = 6$$

$$3a - b = -7$$

$$3a - b + 7 = (-7) + 7 = 0$$

40. A

$$2(2)^2 + 2 + m = 0$$

$$m = -10$$

$$2x^2 + x - 10 = (x - 2)(2x + 5)$$

因此， $2x^2 + x + m$ 同樣可被 $2x + 5$ 整除。

41. B

$$\begin{aligned}
 a\left(-\frac{4}{3}\right)^4 - 27\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + b &= 0 \\
 \frac{256a}{81} + b - 48 &= 0 \\
 b &= -\frac{256a}{81} + 48 \\
 \text{餘數} &= a\left(\frac{4}{3}\right)^4 - 27\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{256a}{81} + 48\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

42. D

設 R 為所求餘數。

$$\begin{cases} 5 = a(-2)^2 + 3(-2) + b \\ R = a(2)^2 + 3(2) + b \end{cases}$$

兩式相減。

$$R - 5 = 6 - (-6)$$

$$R = 17$$

43. B

$$\begin{aligned}
 \text{餘數} &= (-1)^{2023} + (-1)^{2022} + (-1)^{2021} + \dots + (-1) \\
 &= [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \dots + (-1) \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

44. D

$$(-1)^{2n} + k(-1) - 2k = 0$$

$$1 - 3k = 0$$

$$k = \frac{1}{3}$$

45. A

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + k = 0$$

$$k = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{餘數} &= 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

46. C

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{1}{2}\right) &= 5 \\
\frac{1}{16} + \frac{a}{2} + b &= 5 \\
b &= \frac{79}{16} - \frac{a}{2} \\
\text{餘數} &= g\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{16} - \frac{a}{2} + \left(\frac{79}{16} - \frac{a}{2}\right) \\
&= 5 - a
\end{aligned}$$

47. D

$$\begin{aligned}
9\left(\frac{c}{3}\right)^4 - c^2\left(\frac{c}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{3}\right) - 6 &= 0 \\
\frac{2c}{3} - 6 &= 0 \\
c &= 9
\end{aligned}$$

48. B

$$\begin{aligned}
f(-1) &= (-1)^{2014} + a(-1) + b = 3 \\
1 - a + b &= 3 \\
a - b &= -2 \\
\text{因此, } 2a - 2b + 1 &= 2(a - b) + 1 = 2(-2) + 1 = -3.
\end{aligned}$$

49. A

$$\begin{aligned}
0 &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + m\left(\frac{1}{2}\right) + n \\
n &= -1 - \frac{m}{2} \\
\text{所求餘數} &= 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + m\left(-\frac{1}{2}\right) + n \\
&= 1 - \frac{m}{2} + \left(-1 - \frac{m}{2}\right) \\
&= -m
\end{aligned}$$

50. B

$$\begin{aligned}
P(-1) &= (-1)^{2025} - 3(-1) + k = 4 \\
-1 + 3 + k &= 4 \\
k &= 2 \\
\text{餘數} &= P(1) \\
&= (1)^{2025} - 3(1) + 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

51. C

$$0 = k(3)^3 + 2k(3)^2 + 90$$

$$k = -2$$

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= -2(-1)^3 - 4(-1)^2 + 90 \\ &= 88\end{aligned}$$

52. C

$$f(-k) = 0$$

$$-k^3 + k^3 + 4k - 8 = 0$$

$$k = 2$$

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f(1) \\ &= 1 + 2 - 4 - 8 \\ &= -9\end{aligned}$$

53. B

$$(k^2 + k)(k + 1) = 0$$

$$k(k + 1)^2 = 0$$

$$k = -1 \quad \text{或} \quad 0 \quad (\text{捨去})$$

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f(-2) \\ &= [(-2)^2 - 1](-2 + 1) \\ &= -3\end{aligned}$$

54. C

設 $g(x) = (2x + 3)q(x)$ ，其中 $q(x)$ 為多項式。

$$\begin{aligned}g(4x - 3) &= [2(4x - 3) + 3]q(4x - 3) \\ &= (8x - 3)q(4x - 3)\end{aligned}$$

因此， $8x - 3$ 為 $g(4x - 3)$ 的因式。