結構式試題

1. (a) (i) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$28^2 = 35^2 + 21^2 - 2(35)(21)\cos\angle BCM$$

$\angle BCM \approx 53.1^\circ$ 1A

(ii) $\dfrac{CM}{\sin(180^\circ - 75^\circ - \angle BCM)} = \dfrac{21}{\sin 75^\circ}$ 1M

$CM \approx 17.1\text{ cm}$ 1A

(b) (i) 在 $\triangle ACM$ 中，$AM = 35 - CM \approx 17.9\text{ cm}$，及

$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2(AM)(CM)\cos\angle AMC$ 1M

$AC \approx 28.1\text{ cm}$ 1A

(ii) 在 $\triangle CMN$ 中，$CN = CM\cos\angle BCM \approx 10.3\text{ cm}$。 1M

在 $\triangle ABC$ 中，

$$28^2 = 21^2 + AC^2 - 2(AC)(21)\cos\angle ACB$$

$\angle ACB \approx 67.7^\circ$

在 $\triangle ACN$ 中，

$$AN^2 = CN^2 + AC^2 - 2(CN)(AC)\cos\angle ACB$$

$AN \approx 26.0\text{ cm}$

$$AC^2 = CN^2 + AN^2 - 2(AN)(CN)\cos\angle ANC$$

$\angle ANC \approx 90.9^\circ \neq 90^\circ$

故此，$\angle ANC$ 不是直角。 1M

$\angle AMN$ 不是平面 BCM 與水平地面的交角。

不同意該宣稱。 1A

2. (a) (i) $\dfrac{\sin \angle BAD}{12} = \dfrac{\sin 72^\circ}{13}$ 1M

$\angle BAD \approx 61.4^\circ$ 1A

(ii) $\angle BDA = 180^\circ - \angle BAD - 72^\circ \approx 46.6^\circ$

$DP = 12 \cos \angle BDA \approx 8.24 \text{ cm}$ 1A

$\triangle ACD$ 為等邊三角形，且 $\angle PDC = 60^\circ$。

在 $\triangle CDP$ 中，

$CP^2 = 13^2 + DP^2 - 2(13)(DP)\cos 60^\circ$ 1M

$CP \approx 11.4 \text{ cm}$ 1A

(b) 在 $\triangle CDP$ 中，

$$13^2 = CP^2 + DP^2 - 2(CP)(DP)\cos \angle CPD$$

$\angle CPD \approx 81.2^\circ \neq 90^\circ$ 1M

故此，兩平面間的夾角不是 $\angle BPC$。

該宣稱不正確。 1A

3. (a) $CD \sin 70^\circ = 45 \sin 50^\circ$ 1M

$CD \approx 36.7 \text{ cm}$ 1A

(b) (i) $AE = 45 \cos 50^\circ \approx 28.9 \text{ cm}$

$DE = 40 + CD \cos 70^\circ \approx 52.5 \text{ cm}$

$AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} \approx 60.0 \text{ cm}$ 1M

$BE = 45 \sin 50^\circ \approx 34.5 \text{ cm}$

$AC = \sqrt{BE^2 + 40^2 + AE^2} = 60.2 \text{ cm}$

$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2(AD)(AC)\cos \angle CAD$ 1M

$\angle CAD \approx 35.5^\circ$ 1A

(ii) 設 F 為 CD 上的一點使得 $AF \perp CD$。

則 $EF \perp CD$ 及平面 ACD 與平面 $BCDE$ 間的夾角為 $\angle AFE$。 1M

$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2(AC)(CD)\cos \angle ACD$

$\angle ACD \approx 71.9^\circ$

$AF = AC \sin \angle ACD \approx 57.2 \text{ cm}$

$\sin \angle AFE = \dfrac{AE}{AF}$

$\angle AFE \approx 30.4^\circ > 30^\circ$

該角度超過 30°。 1A

4. (a) $\dfrac{AP}{\sin 60^\circ} = \dfrac{20}{\sin(180^\circ - 60^\circ - 72^\circ)}$ 1M

$AP \approx 23.3 \text{ cm}$ 1A

(b) (i) 設 S 為 P 至 AD 的垂足。

$PS = AP \sin 72^\circ \approx 22.2 \text{ cm}$ 1M

$AS = AP \cos 72^\circ \approx 7.20 \text{ cm}$

在 $\triangle APB$ 中，

$$\frac{PB}{\sin 72^\circ} = \frac{20}{\sin(180^\circ - 60^\circ - 72^\circ)}$$

$$PB \approx 25.595\,455\,52 \text{ cm}$$

設 T 為 P 至 BC 的垂足。

$PT = \sqrt{PB^2 - AS^2} \approx 24.6 \text{ cm}$

留意 $\alpha = \angle PTS$。 1M

在 $\triangle PTS$ 中，

$PS^2 = PT^2 + 20^2 - 2(PT)(20)\cos\alpha$ 1M

$\alpha \approx 58.6^\circ$ 1A

(ii) 設 X 為 P 至底 $ABCD$ 的投影。

可得 $\beta = \angle PBX$。 1M

由於 $TX < BX$，$\tan\alpha = \dfrac{PX}{TX} > \dfrac{PX}{BX} = \tan\beta$。

由於 α 及 β 均為銳角，α 大於 β。 1A

5. (a) (i) $AC^2 = 40^2 + 24^2 - 2(40)(24)\cos 80°$ 1M

$AC \approx 42.9\text{ cm}$ 1A

(ii) $\dfrac{\sin\angle ACB}{40} = \dfrac{\sin 80°}{AC}$ 1M

$\angle ACB \approx 66.6°$ 或 $113°$（捨去） 1A

(iii) 紙卡的面積 $= 2\left(\dfrac{1}{2}(40)(24)\sin 80°\right) + \dfrac{1}{2}AC^2\sin\angle CAD$ 1M

$= 960\sin 80° + \dfrac{1}{2}AC^2\sin\angle CAD$

紙卡的面積的一部分是常數，另一部分隨 $\sin\angle CAD$ 正變。 1M

紙卡的面積當 $\angle CAD = 90°$ 時為最大，

即 $\angle ACD = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$。

定義 $\alpha = 45° + \angle ACB \approx 112°$。

當 $\angle BCD$ 由 $105°$ 上升至 α，紙卡的面積上升。

當 $\angle BCD$ 由 α 上升至 $145°$，紙卡的面積減小。 1A

(b) 設 M 為 CD 的中點。

$\angle ACD = 132° - \angle ACB \approx 65.4°$

在 $\triangle ACD$ 中，

$\cos\angle ACD = \dfrac{\left(\frac{CD}{2}\right)}{AC}$ 1M

$CD \approx 35.7\text{ cm}$

$AM = AC\sin\angle ACD \approx 39.0\text{ cm}$

$BM = \sqrt{BC^2 - \left(\dfrac{CD}{2}\right)^2} \approx 16.0\text{ cm}$

$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2(AM)(BM)\cos\angle AMB$ 1M

$\angle AMB \approx 81.7°$

角錐的高 $= BM\sin\angle AMB \approx 15.9\text{ cm}$ 1M

$\triangle ACD$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(CD)(AM) \approx 697\text{ cm}^2$ 1M

角錐 $ABCD$ 的體積

$= \dfrac{1}{3}$($\triangle ACD$ 的面積)(角錐的高) 1M

$\approx 3690\text{ cm}^3$ 1A

6. (a) 在 $\triangle PQR$ 中，$\angle QPR = 180^\circ - 30^\circ - 55^\circ = 95^\circ$。

$$\frac{60}{\sin 55^\circ} = \frac{PR}{\sin 30^\circ} \qquad \text{1M}$$

$PR \approx 36.6\,\text{cm}$

在 $\triangle PRS$ 中，$\angle RPS = 120^\circ - 95^\circ = 25^\circ$。

$RS^2 = 40^2 + PR^2 - 2(40)(PR)\cos 25^\circ$ 1M

$RS \approx 16.9\,\text{cm}$ 1A

(b) 所求面積 $= \frac{1}{2}(60)(PR)\sin 95^\circ + \frac{1}{2}(40)(PR)\sin 25^\circ$ 1M

$\approx 1400\,\text{cm}^2$ 1A

(c) (i) 設 T 為 QR 上的一點使得 $PT \perp QR$。

$PT = 60\sin 30^\circ = 30\,\text{cm}$ 1A

所求距離 $= 30\sin 32^\circ$ 1M

$\approx 15.9\,\text{cm}$ 1A

(ii) 設 U 為地面上的一點使得 SU 為鉛垂。

設 W 為 QR 的延線上的一點使得 $SW \perp QR$。

在 $\triangle PQT$ 中，$\angle QPT = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$。故此，$\angle SPT = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$。

$SW = PT - PS\cos\angle TPS = 30 - 40\cos 60^\circ = 10\,\text{cm}$ 1M

$SU = SW\sin 32^\circ \approx 5.30\,\text{cm}$ 1M

RS 與水平地面間的夾角為 $\angle SRU$。

$\sin\angle SRU = \frac{SU}{RS}$

$\approx 18.3^\circ < 20^\circ$ 1A

該宣稱正確。 1A

7. (a) $\angle ABC = 180° - 30° - 42° = 108°$.

$$\frac{AC}{\sin 108°} = \frac{24}{\sin 30°}$$ 1M

$AC \approx 45.7\text{ cm}$ 1A

(b) (i) 留意 $\triangle CEF \sim \triangle ADF$。

$$\frac{CF}{AC + CF} = \frac{2}{10}$$ 1M

$$CF = \frac{1}{4}AC$$

$\approx 11.4\text{ cm}$ 1A

(ii) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$\frac{24}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin 42°}$$

$AB \approx 32.118\,269\,11\text{ cm}$

$\triangle ABF$ 的面積 $= \frac{1}{2}(AC + CF)(AB)\sin 30°$ 1M

$\approx 458\text{ cm}^2$ 1A

(iii) 設 G 為 A 至 BF 的垂足。

所求之角為 $\angle AGD$。 1A

在 $\triangle AFB$ 中，

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2(AB)(AF)\cos 30°$$ 1M

$BF \approx 33.4\text{ cm}$

$\frac{1}{2}(AG)(BF) = \triangle ABF$ 的面積 1M

$AG \approx 27.5\text{ cm}$

在 $\triangle AGD$ 中，

$$\sin\angle AGD = \frac{10}{AG}$$

$\angle AGD \approx 21.4°$ 1A

因此，所求之角為 $21.4°$。

(iv) 在 $\triangle AGD$，$DG = \sqrt{AG^2 - 10^2} \approx 25.6\text{ cm}$。

$\triangle BDF$ 的面積 $= \frac{1}{2}(BF)(DG)$ 1M

$\approx 427\text{ cm}^2$ 1A

$< 460\text{ cm}^2$

因此，不同意該宣稱。 1A

8. (a) 在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ADB = 180° - 20° - 120° = 40°$。

$$\frac{AD}{\sin 20°} = \frac{60}{\sin 40°} \qquad \text{1M}$$

$$AD \approx 31.9\text{ cm} \qquad \text{1A}$$

(b) (i) $BC = AD \approx 31.9\text{ cm}$。在 $\triangle ABC$ 中，

$$40^2 = BC^2 + 60^2 - 2(60)(BC)\cos\angle ABC \qquad \text{1M}$$

$$\angle ABC \approx 38.0° \qquad \text{1A}$$

(ii) 設 E 為 BD 上的一點使得 $BD \perp AE$ 及 F 為 CD 上的一點使得 $EF \perp BD$。

所求之角為 $\angle AEF$。 1M

$AE = 60\sin 20° \approx 20.5\text{ cm}$ 1M

$DE = \dfrac{AE}{\tan 40°} \approx 24.5\text{ cm}$

$EF = DE\tan 20° \approx 8.90\text{ cm}$

$DF = \dfrac{EF}{\sin 20°} \approx 26.0\text{ cm}$

在 $\triangle ACD$ 中，

$$40^2 = 60^2 + AD^2 - 2(60)(AD)\cos\angle ADC$$

$$\angle ADC \approx 38.0°$$

$$AF^2 = AD^2 + DF^2 - 2(AD)(DF)\cos\angle ADC$$

$$AF \approx 19.7\text{ cm}$$

在 $\triangle AEF$ 中，

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2(AE)(EF)\cos\angle AEF$$

$$\angle AEF \approx 71.9° \qquad \text{1A}$$

因此，所求之角為 $71.9°$。

9. (a) $\dfrac{\sin\angle XWY}{5} = \dfrac{\sin 70^\circ}{6}$ 1M

$\angle XWY \approx 51.5^\circ$ 或 128°（捨去） 1A

(b) 設 Z 在 $\triangle WXY$ 的投影為 T。

設 M 為 XY 的中點。

所求之角為 $\angle ZMT$。 1M

留意 $WT = XT = YT$ 及 T 為圓 WXY 的圓心。

$\angle XTY = 2\angle XWY \approx 103^\circ$

$$\sin\angle XTM = \frac{\left(\frac{XY}{2}\right)}{TX}$$

$$\sin\frac{\angle XTY}{2} = \frac{2.5}{TX}$$

$$TX \approx 3.19\text{ cm}$$

$ZT = WT\tan 30^\circ \approx 1.84\text{ cm}$ 1M

$MT = TX\cos\angle XTM \approx 1.99\text{ cm}$ 1M

$$\tan\angle ZMT = \frac{ZT}{MT}$$

$\angle ZMT \approx 42.9^\circ < 45^\circ$ 1A

該交角不超過 45°。

10. (a) 設 M 及 N 分別為 AB 及 CD 上的點使得 $PM \perp AB$ 及 $MN \perp AB$。

所求之角為 $\angle PMN$。

在 $\triangle PAB$ 中，$PM = 2\tan 60^\circ = 2\sqrt{3}\text{ cm}$。 1A

在 $\triangle PMN$ 中，$PN = PM$ 及

$4^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2(2\sqrt{3})^2\cos\angle MPN$ 1M

$\angle PMN \approx 54.7^\circ$ 1A

所求之角為 54.7°。

(b) 設 X 為 PA 上的一點使得 $BX \perp PA$ 及 $DX \perp PA$。所求之角為 $\angle BXD$。

在 $\triangle BXA$ 中，$BX = 4\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}\text{ cm}$。

在 $\triangle ABD$ 中，$BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}\text{ cm}$。 1A

在 $\triangle BXD$ 中，$BX = DX$ 及

$(4\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2(2\sqrt{3})^2\cos\angle BXD$ 1M

$\angle BXD \approx 109.5^\circ$ 1A

所求之角為 109.5°。

11. (a) 在 $\triangle ABD$ 中，$BD = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}\,\text{cm}$。 1A

在 $\triangle VBD$ 中，

$$9^2 = 9^2 + (\sqrt{72})^2 - 2(9)(\sqrt{72})\cos\angle VBD \quad \text{1M}$$

$$\angle VBD \approx 61.9° \quad \text{1A}$$

所求之角為 61.9°.

(b) 設 N 為 VA 上的一點使得 $DN \perp VA$ 及 $BN \perp VA$。兩平面的夾角為 $\angle BND$。 1A

在 $\triangle VAB$ 中，

$$9^2 = 9^2 + 6^2 - 2(9)(6)\cos\angle VAB$$

$$\angle VAB \approx 70.528\,779\,37°$$

在 $\triangle ABN$ 中，$BN = 6\sin\angle VAB \approx 5.66\,\text{cm}$。 1M+1A

在 $\triangle BND$ 中，$BN = DN$ 及

$$(\sqrt{72})^2 = BN^2 + DN^2 - 2(DN)(BN)\cos\angle BND \quad \text{1M}$$

$$\angle BND \approx 97.2° \quad \text{1A}$$

所求之角為 97.2°。

12. (a) $\triangle VAB$ 中，$VB = VA = 24\,\text{cm}$，及

$$24^2 = 12^2 + 24^2 - 2(12)(24)\cos\angle VBA \quad \text{1M}$$

$$\angle VBA \approx 75.5° \quad \text{1A}$$

$\triangle ABD$ 中，$AD = 12\sin\angle VBA \approx 11.6\,\text{cm}$。 1A

(b) 兩平面間的交角為 $\angle ADC$。 1A

$\triangle ACD$ 中，$CD = AD$，及 1A

$$12^2 = AD^2 + CD^2 - 2(AD)(CD)\cos\angle ADC \quad \text{1M}$$

$$\angle ADC \approx 62.2° \quad \text{1A}$$

所求之角為 62.2°。

13. (a) 在 $\triangle VPQ$ 中，$\angle VQP = \dfrac{180^\circ - 42^\circ}{2} = 69^\circ$。 1A

在 $\triangle PQU$ 中，$PU = 10\sin 69^\circ \approx 9.34\text{ cm}$。 1A

在 $\triangle PQR$ 中，$\angle PQR = 108^\circ$。 1A

$$PQ^2 = 10^2 + 10^2 - 2(10)(10)\cos 108^\circ$$

$PR \approx 16.2\text{ cm}$ 1A

(b) 平面夾角為 $\angle PUR$。 1A

在 $\triangle PUR$ 中，$PU = UR$ 及

$$PR^2 = PU^2 + UR^2 - 2(PU)(UR)\cos\angle PUR$$ 1M

$\angle PUR \approx 120^\circ$ 1A

14. 設 M 為 BC 的中點。則 $AM \perp BC$ 及 $DM \perp BC$。

所求之角為 $\angle AMD$。 1M

$AM = DM = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ 1A

在 $\triangle AMD$ 中，

$$2^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})(\sqrt{3})\cos\angle AMD$$ 1M+1A

$\angle AMD \approx 71^\circ$ 1A

15. (a) $BD = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}\text{ cm}$ 1A

$ED = \sqrt{(\sqrt{18})^2 - 2^2} = \sqrt{14}\text{ cm}$ 1A

$AE = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}\text{ cm}$ 1A

(b) $(\sqrt{5})^2 = 3^2 + (\sqrt{14})^2 - 2(3)(\sqrt{14})\cos\angle ADE$ 1M+1A

$\angle ADE \approx 36.7^\circ$ 1A

(c) $\sin\angle BDE = \dfrac{2}{\sqrt{18}}$ 1M

$\angle BDE \approx 28.1^\circ$ 1A

所求之角為 28.1°。

(d) 設 M 為 BD 的中點使得 $AM \perp BD$ 及 $CM \perp BD$。

所求之角為 $\angle AMC$。 1M

$AM = CM = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{\sqrt{18}}{2}\text{ cm}$

在 $\triangle ACD$ 中，$AC = 2(3)(\sin\angle ADE) \approx 3.59\text{ cm}$。 1A

在 $\triangle AMC$ 中，

$$AC^2 = 2(AM)^2 - 2(AM)^2\cos\angle AMC$$ 1M

$\angle AMC \approx 115^\circ$ 1A

16. (a) 在 $\triangle OBC$ 中，$OC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$。 1M

在 $\triangle OAC$ 中，

$$AC^2 = 3^2 + 13^2 - 2(3)(13)\cos 120°$$ 1M

$$AC = \sqrt{217}$$ 1A

(b) 在 $\triangle OAB$ 中，$AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$。

在 $\triangle ABC$ 中，

$$AC^2 = 4^2 + 12^2 - 2(4)(12)\cos \angle ABC$$ 1M

$$\angle ABC \approx 126° \neq 90°$$ 1M

因此，$\angle OBA$ 不代表兩平面的夾角。該說法不正確。 1A

17. (a) $\angle VAB = 60° \neq 90°$

故此，平面 VAB 與 ABC 的夾角不能以 $\angle VAC$ 代表。 1

(b) (i) 由於 $\triangle VAB$ 為等邊且 D 為 AB 的中點，$\angle VDB = 90°$。 1A

由於 D 及 E 分別為 AB 及 BC 的中點，

$DE // AC$ （中點定理）及 $DE \perp AB$。 1M

由此，平面 VAB 與 ABC 的夾角能以 $\angle VDE$ 代表。 1

(ii) $\triangle VAB$ 及 $\triangle VAC$ 為等邊，其邊長為 2 cm。

由於 D 及 E 分別為 AB 及 BC 的中點，$DE = \frac{1}{2}AC = 1$ cm。 1A

$BE = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ cm

由於 $VB = VA = VC$，$\triangle VBC$ 為等腰。

由於 E 為 BC 的中點，$\angle VEB = 90°$ 及 $VE = \sqrt{2^2 - 2} = \sqrt{2}$ cm。 1A

在 $\triangle VAB$ 中，$VD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ cm。 1A

故此，$VE^2 + DE^2 = 2 + 1^2 = 3 = VD^2$。

因此，$\angle VED = 90°$。 1

(c) 由於 $\angle VED = \angle VEB = 90°$，$VE$ 垂直於平面 ABC。 1M

$\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2}(2)(2) = 2\text{ cm}^2$

四面體的體積 $= \frac{1}{3}(2)(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\text{ cm}^3$ 1A

$\triangle VAB$ 的面積 $= \frac{1}{2}(2)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}\text{ cm}^2$

設 h cm 為所求距離。

$$\frac{1}{3}(\sqrt{3})(h) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$ 1M

$$h = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

所求距離為 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm。 1A

18. (a) $\triangle ACD$ 為等腰三角形。設 E 為 CD 的中點使得 $AE \perp CD$。

$AE = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ 1M

藉考慮 $\triangle ACD$ 的面積。

$$\frac{1}{2}(30)(20) = \frac{1}{2}(25)(CF)$$ 1M

$$CF = 24$$ 1A

在 $\triangle ACF$ 中，$AF = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$。 1M

在 $\triangle ABD$ 中，

$$4062 = 25^2 + 28^2 - 2(25)(28)\cos\angle BAD$$ 1M

$$\angle BAD \approx 97.8^\circ$$

在 $\triangle ABF$ 中，

$$BF^2 = 28^2 + 7^2 - 2(28)(7)\cos\angle BAD$$ 1M

$$BF \approx 29.8$$

在 $\triangle BCF$ 中，

$$40^2 = 24^2 + BF^2 - 2(24)(BF)\cos\angle BFC$$ 1M

$$\angle BFC \approx 96^\circ$$ 1A

(b) 在 $\triangle ABF$ 中，$\angle BAD \approx 97.8^\circ > 90^\circ$。 1M

故此，$\angle AFB = 180^\circ - \angle BAD - \angle ABF < 90^\circ \neq 90^\circ$。 1M

因此，$\angle BFC$ 不代表兩平面的夾角。該說法不正確。 1A

19. (a) $\frac{1}{2}(x+6)^2\sin 60^\circ - 2\left(\frac{1}{2}x^2\sin 60^\circ\right) - \frac{1}{2}(6)^2\sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$ 1A+1A

$$x^2 + 12x + 36 - 2x^2 - 36 = 20$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$ 1

解 $x^2 - 12x + 20 = 0$，可得 $x = 2$ 或 10（捨去） 1A

(b) (i) $A'D^2 = 6^2 + 2^2 - 2(6)(2)\cos 40^\circ$ 1M

$A'D \approx 4.65\text{ cm}$ 1A

(ii) 設 M 及 N 分別為 EB 及 DC 的中點。

平面 $BCDE$ 與 $A'BE$ 的夾角為 $\angle A'MN$。 1A

$A'M = 6\sin 60^\circ = 3\sqrt{3}\text{ cm}$

$MN = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}\text{ cm}$

$A'N = \sqrt{A'D^2 - 2^2} \approx 4.20\text{ cm}$ 1A

$$A'N^2 = (\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})(3\sqrt{3})\cos\angle A'MN$$

$$\angle A'MN \approx 46.5^\circ$$ 1A

(iii) 所求體積 $= \frac{1}{3}(5\sqrt{3})(3\sqrt{3}\sin\angle A'MN)$ 1M

$\approx 10.9\text{ cm}^3$ 1A

20. (a) (i) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos\angle BAC \qquad \text{1M}$$

$$BC \approx 25.1\text{ cm} \qquad \text{1A}$$

(ii) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$\frac{\sin\angle ACB}{20} = \frac{\sin 56^\circ}{BC} \qquad \text{1M}$$

$$\angle ACB \approx 41.4^\circ \qquad \text{1A}$$

(iii) 設 h cm 為 A 至 BC 的垂直距離。

$h = AC\sin\angle ACB \approx 19.8$

所求距離 $= h - 4 \approx 15.8$ cm 1A

(iv) 由於 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$，

$$\frac{DE}{BC} = \frac{h-4}{h} \qquad \text{1M}$$

$$DE \approx 20.0\text{ cm} \qquad \text{1A}$$

(b) 設 θ 為金屬薄中與水平地面的夾角。

(i) $\cos\theta = \dfrac{P\text{ 至 }DE\text{ 的垂直距離}}{h-4}$ 1M

$\cos\theta = \dfrac{\left(\frac{2(120)}{DE}\right)}{h-4}$

$\theta \approx 40.795\,151\,95^\circ$

金屬薄片 ADE 與水平地面的夾角為 40.8°。 1A

(ii) $\sin\theta = \dfrac{AP}{h-4}$

$AP \approx 10.345\,268\,53$ cm

A 至水平地面的最短距離為 10.3 cm。 1A

21. (a) (i) 設 $s = \dfrac{6+7+5}{2} = 9$。

$\triangle ABC$ 的面積 $= \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$ 1M

$= 6\sqrt{6}$ 1A

(ii) $\dfrac{1}{2}(6)(r) + \dfrac{1}{2}(7)(r) + \dfrac{1}{2}(5)(r) = 6\sqrt{6}$ 1M

$r = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 1

(b) (i) 設 X 為 AB 與 $\triangle ABC$ 的內切圓的切點。

則 $\angle VXO = 60°$。 1A

在 $\triangle VXO$ 中，$VO = r\tan 60° = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{2}$

$VABC$ 的體積 $= \dfrac{1}{3}(6\sqrt{6})(2\sqrt{2})$ 1M

$= 8\sqrt{3}$ 1A

(ii) 設 Y 為 BC 與內切圓的切點。

由於 $\triangle VOX \cong \triangle VOY$ （SAS）

$\angle VYO = \angle VXO = 60°$ 及 $VY = \dfrac{r}{\cos 60°} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$。

$\triangle VBC$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(7)\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$ 1M

$= \dfrac{14\sqrt{6}}{3}$ 1A

(iii) 設 F 為 A 至平面 VBC 的垂足。

所求角為 $\angle ABF$。 1A

藉考慮四面體 $VABC$ 的體積，

$8\sqrt{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{14\sqrt{6}}{3}\right)(AF)$ 1M

$AF = \dfrac{18\sqrt{2}}{7}$

在 $\triangle ABF$ 中，

$\sin\angle ABF = \dfrac{18\sqrt{2}}{7} \div 6$

$\angle ABF \approx 37°$ 1A

22. (a) $\dfrac{AB}{\sin(180^\circ - 73^\circ - 59^\circ)} = \dfrac{24}{\sin 73^\circ}$ 1M

$AB \approx 18.7\text{ cm}$ 1A

(b) (i) $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD)\cos 92^\circ$ 1M

$BD \approx 26.8\text{ cm}$ 1A

(ii) 設 Q 為 B 至 AC 的垂足。

$BQ = AB\sin 73^\circ \approx 17.8\text{ cm}$

平面 ABC 與平面 ACD 之間的夾角為 $\angle BQD$。 1M

$\sin\dfrac{\angle BQD}{2} = \dfrac{\left(\frac{BD}{2}\right)}{BQ}$ 1M

$\angle BQD \approx 97.6^\circ$ 1A

所求之角為 97.6°。

(iii) 留意 $\sin\dfrac{\angle BPD}{2} = \dfrac{BD}{2BP}$。 1M

當 P 在 Q 時，BP 的長度最短。故此，當 P 在 Q 時，$\angle BPD$ 最大。 1M

因此，$\angle BPD$ 由 $\angle BAD$ 增加至 $\angle BQD$，然後減小至 $\angle BCD$。 1A

23. (a) 由於 $XB \perp BC$，可得 $XB^2 + BC^2 = XC^2$。 1M

由於 $AB \perp BC$，可得 $AB^2 + BC^2 = AC^2$。

若 $AX \perp XB$，則 $AX^2 + XB^2 = AB^2$。 1M

$$\begin{aligned} AX^2 + XC^2 &= AX^2 + (XB^2 + BC^2) \\ &= AB^2 + BC^2 \\ &= AC^2 \end{aligned}$$

由此，$AX \perp XC$。 1

(b) (i) 在 $\triangle ABF$ 中，

$BF^2 = 1^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2(1)(3\sqrt{2})\cos 135^\circ$ 1M

$BF = 5\text{ m}$

故此，

$1^2 = 5^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2(5)(3\sqrt{2})\cos\angle ABF$ 1M

$\cos\angle ABF = \sqrt{\dfrac{49}{50}}$ 1A

在 $\triangle ABX$ 中，$XB = AB\cos\angle ABF = 3\sqrt{2} \times \sqrt{\dfrac{49}{50}} = \dfrac{21}{5}\text{ m}$。 1

備註：

利用 $\angle ABF \approx 8.13^\circ$ 的方法只能給出 XB 的 <u>估值</u>。這方法不能證明 $XB = \dfrac{21}{5}\text{ m}$。

(ii) 利用 (a)，$AX \perp XB \Rightarrow AX \perp XC$ 及 $AX \perp XF \Rightarrow AX \perp XE$。

故此，所求之角 θ 為 $\angle CXE$。 1A

$CX = \sqrt{\left(\dfrac{7}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{21}{5}\right)^2} = \dfrac{7\sqrt{10}}{5}\text{ m}$ 1A

$FX = 5 - \dfrac{21}{5} = \dfrac{4}{5}$

$EX = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{5}$

在 $\triangle CEX$ 中，

$$5^2 = \left(\frac{7\sqrt{10}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{65}}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{7\sqrt{10}}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{65}}{5}\right)\cos\theta$$ 1M

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{26}}$$ 1A

故此，$\tan\theta = \frac{\sqrt{26 - 1^2}}{-1} = -5$。 1M+1A

24. (a) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \sqrt{2} \qquad \text{1A}$$

$$BD = \sqrt{2}\cos 45^\circ = 1 \qquad \text{1A}$$

$$DC = 2\cos 30^\circ = \sqrt{3} \qquad \text{1A}$$

(b) (i) $\theta = \angle DCE$ 1A

$$DE = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{1A}$$

在 $\triangle CDE$ 中，

$$\sin\theta = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{3}} \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \text{1}$$

(ii) $$CE = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2} \qquad \text{1A}$$

$$AE = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{1A}$$

在 $\triangle ACE$ 中，

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2)\cos\angle EAC \qquad \text{1M}$$

$$\angle EAC = 45^\circ \qquad \text{1}$$

(iii) 所求之角為 $\angle BDC$。 1A

在 $\triangle ABC$ 中，

$$BC^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(\sqrt{2})(2)\cos 45^\circ$$

$$BC = \sqrt{2}$$

在 $\triangle BDC$ 中，

$$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(1)(\sqrt{3})\cos\angle BDC \qquad \text{1M}$$

$$\angle BDC \approx 55^\circ \qquad \text{1A}$$

25. (a) $\dfrac{BH}{\sin(180° - 50°)} = \dfrac{50}{\sin(50° - 35°)}$ 1M

$BH \approx 148\text{ m}$ 1A

(b) (i) $130^2 = 210^2 + BH^2 - 2(210)(BH)\cos\angle CBH$ 1M

$\angle CBH \approx 37.8°$ 1A

(ii) 設 E 為 BC 上的一點使得 $HE \perp BC$ 及 $AE \perp BC$。

所求之角為 $\angle AEH$。 1A

$EH = BH\sin\angle CBH \approx 90.7\text{ m}$ 1M

$AH = BH\sin 35° \approx 84.9\text{ m}$ 1M

在 $\triangle AEH$ 中，

$\sin\angle AEH = \dfrac{AH}{EH}$ 1M

$\angle AEH \approx 69.3°$ 1A

因此，所求之角為 69.3°。

(iii) 由於 HE 為平面 BCH 的最大斜率的直線，從 BC 上的點測得 H 的最大仰角為 $\angle AEH$，且 $\angle AEH < 75°$。 1M

因此，潔不可能在 BC 上找到一點 K 使得由 K 測 H 的仰角為 75°。 1M

26. (a) $\sin 72° = \dfrac{AF}{AC}$ 1M

$AF \approx 3.80\text{ m}$ 1A

$\tan 35° = \dfrac{AF}{FD}$ 1M

$FD \approx 5.43\text{ m}$ 1A

(b) 設 G 為 D 至 BC 的延線的垂足。

$GD = FD\sin 40° \approx 3.49\text{ m}$ 1A

所求面積 $= \dfrac{1}{2}(6)(GD)$ 1M

$\approx 10.5\text{ m}^2$ 1A

(c) 影子的面積 $= \dfrac{1}{2}(BC)(FD)(\sin\angle CFD)$

$= \dfrac{1}{2}(BC)\left(\dfrac{AF}{\tan 35°}\right)\sin(90° - x°)$

$= \dfrac{(BC)(AF)}{2\tan 35°}\cos x°$ 1M

對 $50 < x < 90$，$\cos x° < \cos 50°$，

影子的面積會較 (b) 所求得的面積小。 1A

27. (a) 設 S 為 PQ 上的一點使得 $RS \perp PQ$ 及 $OS \perp PQ$。

則 $\angle RSO = \theta$。 1M

$$\frac{\triangle OPQ \text{ 的面積}}{\triangle RPQ \text{ 的面積}} = \frac{\frac{1}{2}(PQ)(OS)}{\frac{1}{2}(PQ)(RS)}$$ 1A+1A

$$= \frac{OS}{RS}$$

$$= \cos\theta$$ 1

(b) (i) 設 M 為 AB 上的一點使得 $CM \perp AB$ 及 $EM \perp AB$。則兩平面的夾角為 $\angle CME$。

考慮 $\triangle ABC$ 的面積。

$$\frac{1}{2}(6)(CM) = 12$$ 1M

$$CM = 4\text{ m}$$

在 $\triangle CEM$ 中，

$$\sin\angle CME = \frac{2}{4}$$ 1M

$$\angle CME = 30^\circ$$

利用 (a)，

$$\text{影子的面積} = (12)\cos 30^\circ$$ 1M

$$= 6\sqrt{3}\text{ m}^2$$ 1A

(ii) 設 α 為該木板與地面的夾角，而 h m 為通過桿頂的該木板的高線。

$$h = \frac{12(2)}{y} = \frac{24}{y}$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\left(\frac{24}{y}\right)} = \frac{y}{12}$$ 1M

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{12}\right)^2}$$

故此，影子的面積 $= 12\sqrt{1 - \left(\frac{y}{12}\right)^2} = \sqrt{144 - y^2}$。 1A

由於 $6 > x > y$，$\sqrt{144 - 6^2} < \sqrt{144 - x^2} < \sqrt{144 - y^2}$，及 1M

最大的影子面積 $= \sqrt{144 - y^2}$。

將 B 繫於桿頂所得的影子最大。 1A

28. (a) $\angle POQ = 70^\circ$。在 $\triangle OPQ$ 中，

$\dfrac{500}{\sin 70^\circ} = \dfrac{OQ}{\sin 50^\circ}$ 1A

$OQ \approx 408\text{ m}$ 1A

$\dfrac{500}{\sin 70^\circ} = \dfrac{OP}{\sin 60^\circ}$

$OP \approx 461\text{ m}$ 1A

(b) $h = OP \tan 30^\circ \approx 266$ 1M+1A

(c) $\tan \angle TQO = \dfrac{h}{OQ}$ 1M

$\angle TQO \approx 33^\circ$

所求之角為 33°。

(d) (i) $OR = \dfrac{h}{\tan 20^\circ}$

$OR^2 = 400^2 + OQ^2 - 2(400)(OQ)\cos \angle OQR$ 1M

$\angle OQR \approx 130^\circ$ 1A

$\theta = \angle OQR - 70^\circ \approx 60^\circ$ 1A

(ii) 藉對稱可得 $\triangle OQR \cong \triangle OQS$。

因此，$\angle OQR = \angle OQS$。 1M

$\angle OQS - 50^\circ - 60^\circ \approx 20^\circ$

由 Q 測得 S 的方位角為 S20°E。 1A

29. (a) $BC = 1000\cos 60^\circ = 500\text{ m}$ 1A

$CC' = 500\sin 30^\circ = 250\text{ m}$ 1A

(b) 設所求傾角為 α。

$\sin\alpha = \dfrac{250}{1000}$ 1M

$\alpha \approx 14.5^\circ$ 1A

(c) $AO^2 = 1000^2 + 2000^2 - 2(1000)(2000)\cos 30^\circ$ 2A

$AO \approx 1240\text{ m}$

$AO' = \sqrt{AO^2 - 250^2} \approx 1210\text{ m}$ 1M

$AT = \sqrt{(AO')^2 - 250^2 + 300^2} \approx 1250\text{ m}$ 1M+1A

(d) 路線 I 需時 $\dfrac{1000}{0.3} + 60 \approx 3393\text{ s}$ 1M

路線 II 需時 $\dfrac{2000}{0.8} = \dfrac{AT}{3.2} \approx 2891\text{ s}$ 1A

因此，路線 II 需時較短。 1

多項選擇題

1. $\boxed{\text{D}}$ (32.6%)

設 E 為 CD 上的一點使得 $BE \perp CD$。則 $AE \perp CD$ 及 $\theta = \angle AEB$。

$\angle BCD = \tan^{-1}\dfrac{15}{8}$，及 $BE = BC\sin\angle BCD = \dfrac{120}{17}$ m

$\tan\theta = \dfrac{8}{BE} = \dfrac{17}{15}$

2. $\boxed{\text{D}}$ (30.1%)

設 E 為 BC 的中點。所求之角為 $\angle AED$。

設每邊的長度為 2。

則 $AE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ 及 $DE = AE = \sqrt{3}$。

在 $\triangle AED$，

$$2^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})^2\cos\angle AED$$

$$\angle AED \approx 71^\circ$$

3. $\boxed{\text{B}}$ (20.7%)

參考下圖。設 E 為 BC 的中點，且每邊的長度為 x cm。

在 $\triangle AED$，$AE = DE = x\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$ cm。

$$x^2 = AE^2 + DE^2 - 2(AE)(DE)\cos\angle AED$$

$\angle AED = \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$

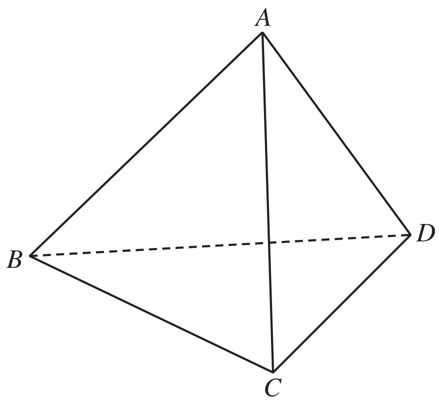
設 X 為 A 至平面 BCD 的投影。則 X 為 $\triangle BCD$ 的形心且它在 DE 上。

在 $\triangle AEX$，$\angle AXE = 90^\circ$ 及

$$AE\sin\angle AED = 2$$

$$x = \sqrt{6}$$

體積 $= \dfrac{1}{2}(\sqrt{6})^2\sin 60^\circ(2) \times \dfrac{1}{3} = \sqrt{3}\,\text{cm}^3$



4. $\boxed{\text{A}}$ (28.5%)

留意 $\alpha = \angle GFH = 45^\circ$，$\beta = 90^\circ$。

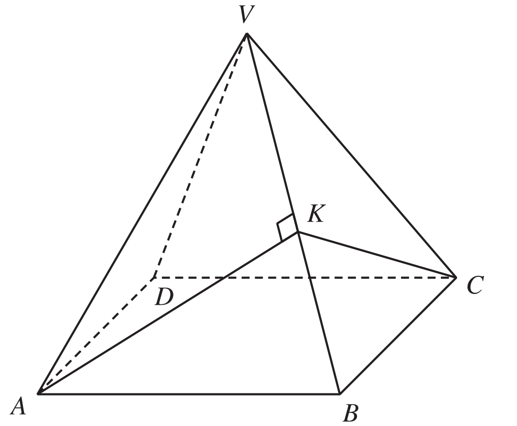
因此，$\alpha < 60^\circ < \beta$。

5. $\boxed{\text{A}}$ (28.3%)

設 $AB = 5\,\text{cm}$。則 $AV = 4\,\text{cm}$。
設 K 為 VB 上的一點使得 $AK \perp VB$。
可得 $\theta = \angle AKC$。

$$4^2 = 4^2 + 5^2 - 2(4)(5)\cos\angle VBA$$

$\angle VBA \approx 51.3°$
$CK = AK = 5\sin\angle VBA \approx 3.90\,\text{cm}$
$AC = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}\,\text{cm}$
$AC^2 = AK^2 + CK^2 - 2(AK)(CK)\cos\theta$
$\cos\theta = -\dfrac{25}{39}$



利用二面角公式。

$$\cos\theta = \frac{\cos 90° - \cos\angle VBA\cos\angle VBC}{\sin\angle VBA\sin\angle VBC} = -\frac{25}{39}$$

6. $\boxed{\text{C}}$

設 M 及 N 分別為 AB 及 CD 的中點。則 $\theta = \angle MVN$。
$VN = \sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}\,\text{cm}$
由於 $\triangle VMN$ 為等腰三角形，$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\left(\frac{2}{2}\right)}{VN} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

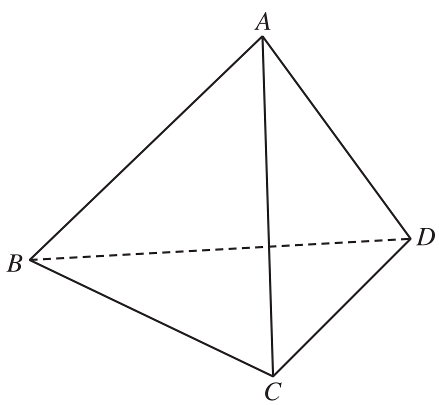
7. $\boxed{\text{C}}$ (22%)

參照下圖。設 E 為 BC 的中點。

在 $\triangle AED$ 中，$AE = DE = 3\sin 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}$。

$$3^2 = AE^2 + DE^2 - 2(AE)(DE)\cos\angle AED$$

$\angle AED = \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$
設 X 為 A 在平面 BCD 上的投影。則 X 為 $\triangle BCD$ 的形心，且在 DE 上。
在 $\triangle AEX$ 中，$\angle AXE = 90°$ 及
高 $= AE\sin\angle AED$
$= \sqrt{6}\,\text{cm}$



8. $\boxed{\text{B}}$

設高為 h m。

沿東西方向的三角形的長度 $= \dfrac{h}{\tan 45^\circ} = h$ m

沿南北方向的三角形的長度 $= \dfrac{h}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}h$ m

$30^2 = h^2 + (\sqrt{3}h)^2$

$h = 15$

9. $\boxed{\text{B}}$ (55%)

設 $AB = 1$。則 $BD = \dfrac{1}{\tan 45^\circ} = 1$ 及 $BC = \dfrac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$。

$\angle BCD = \tan^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$