結構式試題

1. (a) $\dfrac{\sin\angle AVB}{18}=\dfrac{\sin 110^\circ}{30}$ 1M

$\angle AVB\approx 34.3^\circ$ 或 146°（捨去）

$\angle VBA=180^\circ-110^\circ-\angle AVB\approx 35.7^\circ$ 1A

(b) 在 $\triangle BMP$ 中，

$MP^2=9^2+15^2-2(9)(15)\cos\angle VBA$ 1M

$MP\approx 9.31\text{ cm}$

在 $\triangle VBC$ 及 $\triangle VMN$ 中，M 及 N 分別為 VB 及 VC 的中點。

$MN=\dfrac{BC}{2}=5\text{ cm}$ 1M

設 $h\text{ cm}$ 為梯形 $PQNM$ 的高。

$h=\sqrt{MP^2-\left(\dfrac{10-5}{2}\right)^2}\approx 8.97$ 1M

梯形 $PQNM$ 的高 $=\dfrac{h(5+10)}{2}$ 1M

$\approx 67.3\text{ cm}^2$

$<70\text{ cm}^2$

因此，同意該宣稱。 1A

2. (a) $BE=120\sin 30^\circ=60\text{ cm}$ 1A

$CE=120\cos 30^\circ=60\sqrt{3}\text{ cm}$ 1A

(b) $\dfrac{AB}{\sin 40^\circ}=\dfrac{120}{\sin 60^\circ}$ 1M

$AB\approx 89.1\text{ cm}$ 1A

$\dfrac{AC}{\sin 80^\circ}=\dfrac{120}{\sin 60^\circ}$

$AC\approx 136\text{ cm}$ 1A

(c) $CD=\sqrt{AC^2-100^2}\approx 92.8\text{ cm}$ 1M

$DE=\sqrt{AB^2-(100-60)^2}\approx 79.6\text{ cm}$ 1M

在 $\triangle CDE$ 中，

$(60\sqrt{3})^2=DE^2+CD^2-2(DE)(CD)\cos\angle CDE$ 1M

$\angle CDE\approx 73.7^\circ$ 1A

所求距離 $=CD\sin\angle CDE$ 1M

$\approx 89.1\text{ cm}$ 1A

3. (a) 設 $s = \dfrac{9+5+6}{2} = 10$。

所求面積 $= \sqrt{10(10-9)(10-5)(10-6)}$ 1M

$= 10\sqrt{2}\ \text{cm}^2$ 1A

所求體積 $= (10\sqrt{2})(20) + \dfrac{1}{3}(10\sqrt{2})(23-20)$ 1M

$= 210\sqrt{2}\ \text{cm}^2$ 1A

(b) $DE = \sqrt{(23-20)^2 + 6^2} = \sqrt{45}\ \text{cm}$ 1M

$DF = \sqrt{(23-20)^2 + 5^2} = \sqrt{34}\ \text{cm}$

在 $\triangle DEF$ 中，

$45 = 34 + 9^2 - 2(\sqrt{34})(9)\cos\angle DFE$ 1M

$\angle DFE \approx 48.2^\circ$ 1A

從 D 至 EF 的最短距離 $= \sqrt{34}\sin\angle DFE$ 1M

$\approx 4.34\ \text{cm}$ 1A

(c) $\triangle DEF$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(9)(\sqrt{34}\sin\angle DFE)$ 1M

$\approx 19.6\ \text{cm}^2$

$< 20\ \text{cm}^2$

三角形 DEF 的面積小於該金屬薄片的面積。

因此，該金屬薄片不能完全在三角形 DEF 內。 1A

4. (a) 在 $\triangle ABD$，

$$\frac{10}{\sin\angle ADB}=\frac{15}{\sin 86^\circ} \qquad \text{1M}$$

$\angle ADB \approx 41.7^\circ$ 或 138°（捨去）

$\angle ABD = 180^\circ - 86^\circ - \angle ADB \approx 52.3^\circ$ 1A

在 $\triangle BCD$，

$$CD^2 = 8^2 + 15^2 - 2(8)(15)\cos\angle CBD \qquad \text{1M}$$

$CD \approx 10.7\text{ cm}$ 1A

(b) 由於 $AC^2 + BC^2 = AB^2$，可得 $\angle ACB = 90^\circ$。

在 $\triangle ABD$，

$$AD^2 = 10^2 + 15^2 - 2(10)(15)\cos\angle ABD$$

$AD \approx 11.9\text{ cm}$

在 $\triangle ACD$，

$$AD^2 = 6^2 + CD^2 - 2(6)(CD)\angle ACD$$

$\angle ACD \approx 86.5^\circ$

故此，$\angle ACB = 90^\circ$ 但 $\angle ACD$ 不是直角。 1M

由此，A 在 BCD 的投影不在直線 BC 上。

不同意該宣稱。 1A

5. (a) (i) $QR^2 = 25^2 + 30^2 - 2(25)(30)\cos 95^\circ$ 1M

$QR \approx 40.7\text{ cm}$ 1A

(ii) $25^2 = 30^2 + QR^2 - 2(30)(QR)\cos\angle PQR$ 1M

$\angle PQR \approx 37.7^\circ$ 1A

(b) 設 R' 及 M' 分別為 R 及 M 在水平地面上的垂足。

$RR' = RP\sin 70^\circ \approx 23.5\text{ cm}$

由於 $\triangle QMM' \sim \triangle QRR'$，$MM' = \dfrac{RR'}{2} \approx 11.7\text{ cm}$。 1M

$$PM^2 = 30^2 + \left(\frac{QR}{2}\right)^2 - 2(30)\left(\frac{QR}{2}\right)\cos\angle PQR$$

$PM \approx 18.7\text{ cm}$

PM 與水平地面的交角為 $\angle MPM'$。

$$\sin\angle MPM' = \frac{MM'}{PM} \qquad \text{1M}$$

$\angle MPM' \approx 39.0^\circ < 40^\circ$

該宣稱不正確。 1A

6. (a) (i) $CD^2 = 25^2 + 6^2 - 2(25)(6)\cos 57°$ 1M

$CD \approx 22.3\text{ cm}$ 1A

(ii) $\dfrac{\sin\angle BAC}{25} = \dfrac{\sin 57°}{28}$ 1M

$\angle BAC \approx 48.5°$ 或 $132°$（捨去） 1A

(iii) $\triangle ABC$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(28)(25)\sin(180° - 57° - \angle BAC)$ 1M

$\approx 337\text{ cm}^2$ 1A

(iv) $CE = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7\text{ cm}$ 1A

$AE = \sqrt{28^2 - 7^2} = \sqrt{735}\text{ cm}$

$AB^2 = 28^2 + 25^2 - 2(28)(25)\cos\angle ACB$

$AB \approx 32.2\text{ cm}$

設 $s = \dfrac{AB + AE + BE}{2}$。

$\triangle ABE$ 的面積 $= \sqrt{s(s - AB)(s - AE)(s - BE)}$

$\approx 318\text{ cm}^2$

設 h cm 為從 E 至水平地面的最短距離。

$\dfrac{h}{3}(\triangle ABC \text{ 的面積}) = \dfrac{1}{3}(\triangle ABE \text{ 的面積})(CE)$ 1M

$h \approx 6.60$ 1A

所求距離為 6.60 cm。

(b) $DE = \sqrt{CD^2 - 7^2} \approx 21.2\text{ cm}$

設 d cm 為 E 至 CD 的垂直距離。

$\dfrac{d(CD)}{2} = \dfrac{(CE)(DE)}{2}$ 1M

$d = \dfrac{(CE)(DE)}{CD}$

$\approx 6.65 \neq 6.60$

故此，由 E 至 CD 的垂直距離與由 E 至水平地面的最短距離不相等。

因此，不同意該宣稱。 1A

7. (a) $60^2 = 40^2 + 90^2 - 2(40)(90)\cos\angle BAD$ 1M

$\cos\angle BAD = \dfrac{61}{72}$

$AD = 40\cos\angle BAD = \dfrac{305}{9}$ cm 1A

(b) (i) (1) $CD = 90 - \dfrac{305}{9} = \dfrac{505}{9}$ cm

在 $\triangle ACD$ 中，

$$\left(\frac{505}{9}\right)^2 = \left(\frac{305}{9}\right)^2 + AC^2 - 2\left(\frac{305}{9}\right)(AC)\cos 62^\circ$$ 1M

$$0 = AC^2 - \left(\frac{610}{9}\cos 62^\circ\right)(AC) - 2000$$

$AC \approx 63.4$ cm 或 -31.6 cm（捨去） 1A

所求距離為 63.4 cm。

(2) $s = \dfrac{AB + BC + AC}{2} \approx 81.7$ cm

$\triangle ABC$ 的面積 $= \sqrt{s(s-40)(s-60)(s-AC)}$ 1M

$\approx 1160\ \text{cm}^2$ 1A

(3) $\triangle ADC$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(AD)(AC)\sin 62^\circ$ 1M

$\approx 948\ \text{cm}^2$

$BD = 40\sin\angle BAD \approx 21.2$ cm

設 H 為 D 在水平面上的投影。

則該四面體的高為 DH。

$$\frac{DH}{3}(\triangle ABC \text{ 的面積}) = \frac{BD}{3}(\triangle ADC \text{ 的面積})$$ 1M

$DH \approx 17.325\,193\,73$ cm 1A

所求距離為 17.3 cm。

(ii) 四面體 $ABCD$ 的體積 $= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}(AD)(CD)\sin\angle ADC\right)(BD)$

$= \dfrac{(AD)(CD)(BD)\sin\angle ADC}{6}$ 1M

由於四面體 $ABCD$ 的體積隨 $\sin\angle ADC$ 正變。

當 $\angle ADC$ 由 30° 增加至 90°，四面體 $ABCD$ 的體積增加。

當 $\angle ADC$ 由 90° 增加至 150°，四面體 $ABCD$ 的體積減小。 1A

多項選擇題

1. $\boxed{\text{A}}$ (34.6%)

$PQ = \sqrt{9^2 + CP^2} = \sqrt{81 + (6^2 + 8^2)} = \sqrt{181}$ cm
$PF = \sqrt{AF^2 + AP^2} = \sqrt{(15+9)^2 + (6^2 + 8^2)} = 26$ cm
$FQ = \sqrt{15^2 + FH^2} = \sqrt{225 + (12^2 + 16^2)} = 25$ cm

$$(\sqrt{181})^2 = 26^2 + 25^2 - 2(26)(25)\cos\angle PFQ$$
$$\angle PFQ = \cos^{-1}\frac{56}{65}$$
$$\sin\angle PFQ = \frac{33}{65}$$

2. $\boxed{\text{C}}$ (37.1%)

設 $PQ = 1$。則 $PR = \dfrac{1}{\sin 47^\circ}$ 及 $PS = \dfrac{1}{\sin 53^\circ}$。

$RQ = \dfrac{1}{\tan 47^\circ}$ 及 $QS = \dfrac{1}{\tan 53^\circ}$

$$RS^2 = QR^2 + QS^2 - 2(QR)(QS)\cos 120^\circ = PR^2 + PS^2 - 2(PR)(PS)\cos\angle RPS$$
$$\angle RPS \approx 68^\circ$$

3. $\boxed{\text{A}}$ (28.8%)

$BP = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm 及 $DP = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ cm
當 $13 + 2k = 15 \to k = 1$ 時，面積為零；且當 $13 + 15 = 2k \to k = 14$ 時，面積為零。
只有選項 A 的公式滿足上述條件。

4. $\boxed{\text{C}}$

設每邊的邊長為 2。
$AH = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 及 $VH = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$

$$\sin\angle VAH = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5. $\boxed{\text{D}}$

$AX = \sqrt{b^2 + c^2}$
$XE = \sqrt{AX^2 + (2a)^2} = \sqrt{(2a)^2 + b^2 + c^2}$

6. $\boxed{\text{A}}$

設 X 為對角線 BH 與 AG 的交點。

$$XA = XB = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 3$$

由於 $\triangle XAB$ 為等腰三角形，$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\left(\frac{4}{2}\right)}{XB} = \dfrac{2}{3}$。

7. $\boxed{\text{D}}$

由於 M 及 N 分別為 OB 及 OC 的中點，$MN = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{2}\text{ cm}$。
在 $\triangle AOB$ 中，藉對稱性質，可得 $\angle AOB = 45^\circ$ 及 $AM \perp OB$。
$AM = 2\sin 45^\circ = \sqrt{2}\text{ cm}$
$AN = AM = \sqrt{2}\text{ cm}$ 及 $\triangle AMN$ 為等邊三角形。
$\triangle AMN$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$

8. $\boxed{\text{C}}$

$BC = 6\sin 30^\circ = 3$
$\tan\theta = \dfrac{5}{3}$

9. $\boxed{\text{A}}$

設 $BF = 1$。則 $BC = \dfrac{1}{\tan 60^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 及 $AB = BC\tan 30^\circ = \dfrac{1}{3}$。
$\tan\theta = \dfrac{AB}{BF} = \dfrac{1}{3}$

10. $\boxed{\text{E}}$

考慮直角三角形橫切面。
斜邊 $= 1\cos\alpha = \cos\alpha\text{ m}$，兩邊的邊長為 $\cos\alpha\sin\beta\text{ m}$ 及 $\cos\alpha\cos\beta\text{ m}$。
體積 $= \dfrac{(\cos\alpha\cos\beta)(\cos\alpha\sin\beta)}{2} \times 1\sin\alpha$
$= \dfrac{1}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta\text{ m}^3$

11. $\boxed{\text{D}}$

$\angle ABC = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ 及 $CD = 4\sin\angle ABC = 2.4\text{ m}$
$\tan\theta = \dfrac{5}{2.4} = \dfrac{25}{12}$

12. $\boxed{\text{B}}$ (42%)

設 $BG = 1$。則 $FG = GH = 1 \times \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 及 $BF = BH = \dfrac{1}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$。
$FH = \sqrt{FG^2 + GH^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
$FH^2 = BF^2 + BH^2 - 2(BF)(BH)\cos\angle FBH$
$\angle FBH \approx 41^\circ$

13. $\boxed{\text{D}}$ (34%)

設每邊的長度為 2。
$MC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 及 $MN = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 及 $CN = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$。
$(\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{5})(2\sqrt{2})\cos\theta$
$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

14. $\boxed{\text{B}}$ (40%)

設 $BG = 1$。則 $FG = \dfrac{1}{\tan y}$ 及 $GH = \dfrac{FG}{\tan x} = \dfrac{1}{\tan x \tan y}$

$\tan z = \dfrac{GH}{1} = \dfrac{1}{\tan x \tan y}$

15. $\boxed{\text{A}}$ (33.9%)

$BD = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\,\text{m}$

$29^2 = 21^2 + 20^2 - 2(21)(20)\cos\angle BDC$

$\angle BDC = 90°$

由於 $BD \perp AD$ 及 $BD \perp CD$，$BD \perp \triangle ACD$。

因此，B 在平面 ACD 的投影為 D，所求之角為 $\angle BAD$。

$\angle BAD = \tan^{-1}\dfrac{20}{15} \approx 53°$

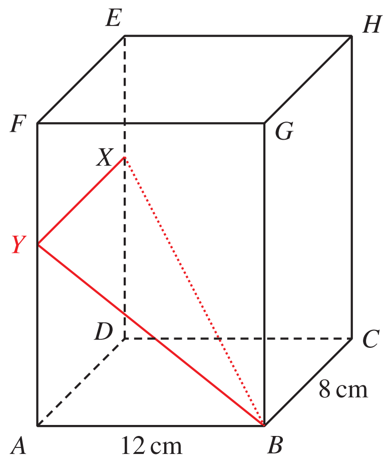
16. $\boxed{\text{D}}$ (34.5%)

設 Y 為 AF 上的一點使得 $XY \perp AF$。

則 $\theta = \angle XBY$。

$BY = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15\,\text{cm}$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{8}{15}$ 及 $\cos\theta = \dfrac{15}{17}$



17. $\boxed{\text{E}}$

設 X 至 $EFGH$ 的投影為 Y。則 Y 為 EG 的中點。

$\tan\theta = \dfrac{XY}{EY} = \dfrac{2a}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

18. $\boxed{\text{C}}$

$\theta = \angle HAC = \tan^{-1}\dfrac{3}{AC} = \dfrac{3}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \dfrac{3}{13}$

19. $\boxed{\text{B}}$

設該立方體的邊長為 1。

在 $\triangle AEG$ 中，$\angle AEG = 90°$ 及 $\angle AGE = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

I. ✗。在 $\triangle AFG$ 中，$\angle AFG = 90°$ 及 $\angle AGF = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{1} \neq \angle AGE$。

II. ✓。在 $\triangle BDF$ 中，$\angle FBD = 90°$ 及 $\angle BDF = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \angle AGE$。

III. ✗。在 $\triangle DEG$ 中，$DE = EG = DG = \sqrt{2}$ 及 $\angle DEG = 60° \neq \angle AGE$。

20. $\boxed{\text{A}}$

所求之角 $= \angle FBD = \tan^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3^2+4^2}} \approx 22°$

21. $\boxed{\text{C}}$

$CE = \dfrac{1}{\tan 45°} = 1$ and $CF = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

所求之角 $= \angle ACF = \tan^{-1}\dfrac{1}{CF} = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 35°$

22. $\boxed{\text{C}}$

所求之角 $= \angle EMD = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{12^2+9^2}}{36} \approx 65°$

23. $\boxed{\text{A}}$ (49%)

I. ✓。AF 垂直於平面 $ABCD$，因此 $\angle CAF = 90°$。

II. ✓。GH 垂直於平面 $CDEH$，因此 $\angle DHG = 90°$。

III. ✗。考慮當每邊邊長相等時（即立方體），則 $AG = GC = AC$ 及 $\angle AGC = 60°$。
因此，$\angle AGC$ 不一定是 $90°$。

24. $\boxed{\text{D}}$ (52%)

設 N 為 CD 的中點及 Y 為 AC 的中點。考慮直線與平面間的交角。

A. $\angle GAB = \tan^{-1}\dfrac{10}{AB}$

B. $\angle CAH = \tan^{-1}\dfrac{10}{AC}$

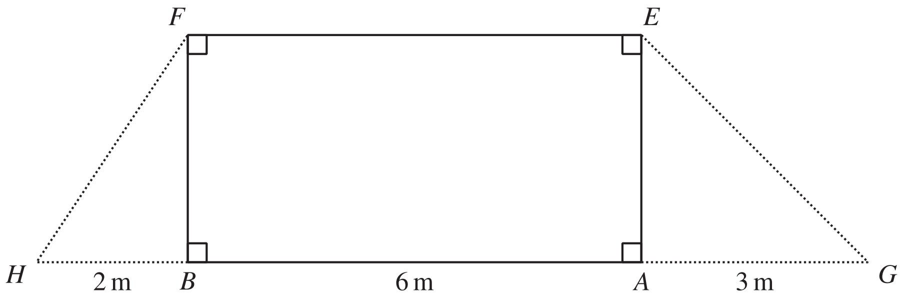
C. $\angle MAN = \tan^{-1}\dfrac{10}{AN}$

D. $\angle XAY = \tan^{-1}\dfrac{10}{AY}$

由於 AY 在 AB、AC、AN、AY 中最短，$\angle XAY$ 為最大的角。

25. $\boxed{\text{D}}$ (39%)

由於涉及三角形的高相等，只需比較點與點之間的水平距離即可。考慮該形狀的地面圖。



BF 及 AE 為眾多距離之中最短。故此，a 及 b 必定為最大的角。
距離 EG 最長。故此，d 必定為最小的角。
總結，$d < c < a = b$。

26. $\boxed{\text{B}}$ (30%)

設 Y 為 GH 的中點。則 $\theta = \angle XMY$。

$\tan\theta = \dfrac{6}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = \dfrac{6}{17}$