REG-CP1B-2425-ASM-SET 1-MATH
建議題解

結構式試題

1. 方程 $kx^2-(3k+8)x+3k+1=0$ 有至多一個實根。

$$\Delta=(3k+8)^2-4(k)(3k+1)\le 0 \qquad \text{1M}$$
$$-3k^2+44k+64\le 0$$
$$k\le -\frac{4}{3} \quad 或 \quad k\ge 16 \qquad \text{1A}$$

留意 $y=f(x)$ 的圖像不低於 x 軸。
x^2 的係數為正數，可得 $k>0$。 1A
因此，可得 $k\ge 16$。 1M

2. (a) 考慮 $(3-k)x^2+(k-3)x+(1-k)=0$。

$$\Delta=(k-3)^2-4(3-k)(1-k)\ge 0 \qquad \text{1M}$$
$$-3k^2+10k-3\ge 0$$
$$\frac{1}{3}\le k\le 3 \qquad \text{1M}$$

留意 $3-k\ne 0$。可得 $\frac{1}{3}\le k<3$。 1A

(b) 若 $k>4$，則該圖像與 x 軸不相交。
由於 $3-k<-1<0$，$y=f(x)$ 的圖像開口向下。 1M
可得對所有實數 x，$f(x)<0$。
同意該宣稱。 1A

3. $\log_4 y=\frac{6}{2}x+6$ 1M+1A

$y=4^{3x+6}$ 1A

4. 可得 $\alpha+\beta=p$ 及 $\alpha\beta=p-2$。

$$\log_4(\alpha+\beta)=\log_2\alpha+\log_2\beta$$
$$\frac{\log(\alpha+\beta)}{2\log 2}=\frac{\log\alpha\beta}{\log 2} \qquad \text{1M}$$
$$\log p=2\log(p-2)$$
$$p=(p-2)^2 \qquad \text{1M}$$
$$0=p^2-5p+4$$
$$p=4 \quad 或 \quad 1（捨去） \qquad \text{1A}$$

5. (a) 該圖像的斜率 $= \dfrac{12-6}{3-0} = 2$

$\log_2 y - 6 = 2(x-0)$ 1M

$\log_2 y = 2x + 6$

$y = 2^{2x+6}$ 1M

$y = 2^6 \cdot 2^{2x}$

$= 64 \cdot 4^x$

因此，$a = 64$ 及 $b = 4$。 1A+1A

(b) $64(4^t) - 64(4^{t-1}) = 786\,432$ 1M

$4^t(1-4^{-1}) = 12\,288$

$4^t = 16\,384$

$t \log 4 = \log 16\,384$ 1M

$t = 7$ 1A

6. $\dfrac{A_{k+1} \text{ 的面積}}{A_k \text{ 的面積}} = (\sqrt{3})^2 = 3$。 1A

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \sin 60^\circ \left(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}\right) > 10^6$ 1M

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{3^n - 1}{3-1} > 10^6$

$3^n > 2 \times 10^6 \times \sqrt{3} + 1$

$n \log 3 > \log\left(2 \times 10^6 \times \sqrt{3} + 1\right)$ 1M

$n > 13.7$

n 的最小值為 14。 1A

7. (a) 設 a 及 r 分別為該數列的首項及公比。

$\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{3072}{48}$ 1M

$r^3 = 64$

$r = 4$

$a = 3$

可得 $A(n) = 3(4^{n-1})$。 1A

(b) $B(n) = \log[3(4^{n-1})]$

$= \log 3 + (n-1)\log 4$ 1M

$$B(1)+B(2)+B(3)+\ldots+B(k)>2023$$

$$k\log 3+[1+2+3+\ldots+(k-1)]\log 4>2023$$

$$k\log 3+\frac{k(k-1)}{2}\cdot\log 4>2023 \qquad \text{1M}$$

$$k^2\log 2+(\log 3-\log 2)k-2023>0$$

$k>81.7$　或　$k<-82.3$（捨去）　1M

k 的最小值為 82。　1A

8. (a) $$\frac{7}{\alpha}=\frac{\beta}{7} \qquad \text{1M}$$

$$\alpha=\frac{49}{\beta}$$

$$\log_7\alpha=\log_7 49-\log_7\beta \qquad \text{1M}$$

$$=2-\log_7\beta \qquad \text{1A}$$

(b) $$\log_7\beta-\log_\beta\alpha=\log_\alpha\beta-\log_7\beta \qquad \text{1M}$$

$$2\log_7\beta-\frac{\log_7\alpha}{\log_7\beta}=\frac{\log_7\beta}{\log_7\alpha} \qquad \text{1M}$$

設 $u=\log_7\beta$。

$$2u-\frac{2-u}{u}=\frac{u}{2-u} \qquad \text{1M}$$

$$2u^2(2-u)-(2-u)^2=u^2$$

$$-2u^3+2u^2+4u-4=0$$

$$-2(u-1)(u^2-2)=0$$

$u=1$（捨去）　或　$-\sqrt{2}$（捨去）　或　$\sqrt{2}$

所求公差

$$=\log_7\beta-\log_\beta\alpha$$

$$=\log_7\beta-\frac{\log_7\alpha}{\log_7\beta}$$

$$=\sqrt{2}-\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \qquad \text{1M}$$

$$=1 \qquad \text{1A}$$

9. (a) 可得 $\alpha+\beta=\dfrac{c+3}{6}$ 及 $\alpha\beta=\dfrac{4c-2}{6}=\dfrac{2c-1}{3}$。

$$\frac{7}{\alpha+6}=\frac{\beta+8}{7} \qquad \text{1M}$$

$$49=\alpha\beta+8\alpha+6\beta+48$$

$$49=\frac{2c-1}{3}+6\left(\frac{c+3}{6}\right)+2\alpha+48 \qquad \text{1M}$$

$$\alpha=-\frac{5c+5}{6} \qquad \text{1}$$

(b) $6\left(-\dfrac{5c+5}{6}\right)^2-(c+3)\left(-\dfrac{5c+5}{6}\right)+4c-2=0$ 1M

$$5c^2+\frac{47c}{3}+\frac{14}{3}=0$$

$$c=-\frac{14}{5} \quad 或 \quad -\frac{1}{3}$$

留意當 $c=-\dfrac{1}{3}$ 時，該等比數列的無限項之和不存在。

因此，$c=-\dfrac{14}{5}$。 1A

$$\frac{\frac{15}{2}\left(\frac{14}{15}\right)^{n-1}\left[1-\left(\frac{14}{15}\right)^{n+3}\right]}{1-\frac{14}{15}}>37$$ 1M

$$-\left(\frac{14}{15}\right)^{2n+2}+\left(\frac{14}{15}\right)^{n-1}-\frac{74}{225}>0$$

$$-\frac{196}{225}\left(\frac{14}{15}\right)^{2n}+\frac{15}{14}\left(\frac{14}{15}\right)^{n}-\frac{74}{225}>0$$

$$0.590<\left(\frac{14}{15}\right)^{n}<0.640$$

$$\log 0.590<n\log\frac{14}{15}<\log 0.640$$ 1M

$$6.46<n<7.66$$

因此，$n=7$。 1A

10. (a) $(10,\ 9)$ 1A

(b) $P_2P_3=8.1$

$P_3P_4=7.29$ 1A

所求坐標為 $(1.9,\ 1.71)$。 1A

(c) 總距離 $=10+10\times 0.9+10\times 0.9^2+\ldots+10\times 0.9^9$

$=\dfrac{10(1-0.9^{10})}{1-0.9}$ 1M

≈ 65.1 1A

(d) 設 Q 的坐標為 $(a,\ b)$。

$a=10-10\times 0.9^2+10\times 0.9^4-\ldots$ 1M

$=\dfrac{10}{1-(-0.9^2)}$ 1M

$=\dfrac{1000}{181}$

$b=10\times 0.9-10\times 0.9^3+10\times 0.9^5-\ldots$ 1M

$=\dfrac{9}{1-(-0.9^2)}$

$=\dfrac{900}{181}$

Q 的坐標為 $\left(\frac{1000}{181}, \frac{900}{181}\right)$。 1A

11. (a) $T_1 = \frac{1}{2}(3)(3)\sin 60°$ 1M

$= \frac{9\sqrt{3}}{4}$ 1A

(b) (i) $A_2B_2^2 = \left(3 \times \frac{2}{3}\right)^2 + \left(3 \times \frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(3 \times \frac{2}{3}\right)\left(3 \times \frac{1}{3}\right)\cos 60°$ 1M

$A_2B_2 = \sqrt{3}$ 1A

(ii) 由於 $\triangle A_2B_2C_2$ 為等邊三角形，

$T_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2 \sin 60°$ 1M

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 1A

(c) (i) 公心 $= \frac{3\sqrt{3}}{4} \div \frac{9\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{1}{3}$ 1A

(ii) $T_n = \frac{9\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 1A

(iii) $T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{3}}$ 1M

$= \frac{27\sqrt{3}}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$ 1A

(iv) 所求之和 $= \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{3}}$ 1M

$= \frac{27\sqrt{3}}{8}$ 1A