REG-CP1A-2425-ASM-SET 4-MATH
建議題解

結構式試題

1. (a) $\angle BAD = \angle BCE$ （已知）

$\angle CBE = \angle BDA$ （錯角，$BC // AD$）

$\triangle ABD \sim \triangle CEB$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) 設 $BE = x$ cm。

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AD}{CB}$$ 1M

$$\frac{x+45}{x} = \frac{85}{34}$$

$$x = 30$$

可得 $BD = 75$ cm。

$AB^2 + BD^2 = 40^2 + 75^2 = 7225\text{ cm}^2$ 1M

$AD^2 = 85^2 = 7225\text{ cm}^2 = AB^2 + BD^2$

因此，$\triangle ABD$ 為直角三角形。 1A

2. (a) $AD = CB$ （正方形性質）

$\angle ADR = 90°$ （正方形性質）

$\angle CBP = 90°$ （正方形性質）

$= \angle ADR$

$\angle CPB = \angle RAB$ （同位角，$AR // PC$）

$\angle ARD = \angle RAB$ （錯角，$AB // DC$）

$= \angle CPB$

$\triangle ADR \cong \triangle CBP$ （AAS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) $\angle ARD + \angle DAR + 90° = 180°$

$$\angle ARD + \frac{\angle ARD}{4} = 90°$$

$$\angle ARD = 72°$$

由於 $\triangle ADR \cong \triangle CBP$，可得 $\angle CPB = \angle ARD = 72°$。 1M

留意 $QC = AR = PC$。$\triangle CPQ$ 為等腰三角形。 1M

$\angle CQB = \angle CPB = 72°$ 1A

3. (a) (i) $AB = AD$ （已知）

$\angle ABC = \angle ADC = 90°$ （已知）

$AC = AC$ （公共邊）

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$ （RHS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ （已證明）

$CD = BC$ （全等 $\triangle$ 的對應邊）

$\angle ECD = \angle ECB$ （全等 $\triangle$ 的對應角）

$CE = CE$ （公共邊）

$\triangle BCE \cong \triangle DCE$ （SAS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) $\angle BFD + \angle FBC = 90° + 90° = 180°$

故此，$DE // BC$。 1M

可得 $\angle DEC = \angle BCE$ 及 $\angle DEC = \angle BEC$。

因此，可得 $\angle BEC = \angle BCE$ 及 $BE = BC$。 1M

則 $DE = CD = CB = BE$ 及 $BCDE$ 為菱形。

該宣稱正確。 1A

4. (a) $\angle BAC = \angle ADC$ （已知）

$\angle DAC = \angle ACB$ （錯角，$AD // BC$）

$\triangle ADC \sim \triangle CAB$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{DC}{AB}$

$\dfrac{AC}{625} = \dfrac{168}{175}$ 1M

$AC = 600\text{ cm}$

$AB^2 + AC^2 = 175^2 + 600^2 = 390\,625\text{ cm}^2$

$BC^2 = 625^2 = 390\,625 \text{ cm}^2 = AB^2 + AC^2$ 1M

可得 $\angle BAC = 90°$ 及 $\angle ADC = \angle BAC = 90°$。

同意該宣稱。 1A

5. (a) $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ （已知）

$\angle BAE = \angle DCE$ （相似 △ 的對應角）

$AB // DC$ （錯角相等）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) $\angle BDC = \angle ABD$ 1M

$\angle BDC + \angle ACD = \angle BEC$

$\angle BDC + 2\angle BDC = 75°$

$\angle BDC = 25°$

$\angle ADC = \dfrac{180° - \angle ACD}{2}$ 1M

$= 65°$

$\angle ADB = 65° - 25°$

$= 40°$ 1A

6. (a) $DE = DE$ （公共邊）

$\angle DFE = 90°$ （已知）

$\angle DCE = 90°$ （長方形性質）

$= \angle DFE$

$AD = AE$ （已知）

$\angle AED = \angle ADE$ （等腰 △ 底角）

$AD // BC$ （長方形性質）

$\angle CED = \angle ADE$ （錯角，$AD // BC$）

$= \angle AED$

$\triangle CDE \cong \triangle FDE$ （AAS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) $AF = AE - FE = AE - CE = 5 - 1 = 4 \text{ cm}$ 1M

$DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$ 1M

$\triangle ADF$ 的面積 $= \frac{1}{2}(4)(3) = 6\text{ cm}^2$ 1A

7. (a) (i) $EA = EF$ （已知）

$ED = ED$ （公共邊）

$\angle EAD = 90°$ （長方形性質）

$\angle EFD = 90°$ （已知）

$= \angle EAD$

$\triangle EAD \cong \triangle EFD$ （RHS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) $\angle EBF = \angle FCD = 90°$ （長方形性質）

$\angle BEF = 180° - 90° - \angle BFE$ （△ 內角和）

$= 90° - \angle BFE$

$\angle EFD = 90°$

$\angle CFD = 180° - 90° - \angle BFE$ （直線上的鄰角）

$= 90° - \angle BFE$

$= \angle BEF$

$\triangle EBF \sim \triangle FCD$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $FD = AD = 30\text{ cm}$

$CF = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18\text{ cm}$

$BF = 30 - 18 = 12\text{ cm}$

由於 $\triangle EBF \sim \triangle FCD$，可得

$\frac{EF}{FD} = \frac{BF}{CD}$ 1M

$\frac{EF}{30} = \frac{12}{24}$

$EF = 15\text{ cm}$ 1A

(ii) $DE = \sqrt{15^2 + 30^2} = 15\sqrt{5}\text{ cm}$

設由 G 至 DE 的最短距離為 $h\text{ cm}$。

$\frac{(DE)(h)}{2} = \frac{(15)(30)}{2}$ 1M

$h \approx 13.4$

> 13

因此，該點 G 不存在。 1A

8. (a) $\angle EFD = \angle AFB$ （對頂角）

$\angle EDF = 90° - \angle CBE$ （已知）

$\angle ABC = 90°$ （已知）

$\angle ABF = 90° - \angle CBE$

$= \angle EDF$

$\triangle DEF \sim \triangle BAF$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $\angle DEF = \angle BAF = 90°$ 1M

$\triangle BDE$ 為直角三角形。 1A

(ii) 設 $DF = x$ cm。則 $AF = (25 - x)$ cm。

$$\frac{DF}{BF} = \frac{EF}{AF}$$

$$\frac{x}{25} = \frac{6}{25 - x}$$ 1M

$$25x - x^2 = 150$$

$$-x^2 + 25x - 150 = 0$$

$$x = 10 \quad 或 \quad 15（捨去）$$

$DE = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm 1M

$BD = \sqrt{(25+6)^2 + 8^2} = \sqrt{1025}$ cm

所求周界 $= (25 + 6) + 8 + \sqrt{1025}$

$= (39 + 5\sqrt{41})$ cm 1A

≈ 71.0 cm

9. (a) L 的斜率 $= \dfrac{5 - 0}{15 - 12} = \dfrac{5}{3}$ 1M

L' 的斜率 $= -\dfrac{3}{5}$

所求方程為

$$\frac{y - 0}{x - 12} = -\frac{3}{5}$$ 1M

$3x + 5y - 36 = 0$ 1A

(b) (i) $3x + 5k - 36 = 0$

$$x = \frac{36 - 5k}{3}$$

G 的坐標為 $\left(\dfrac{36 - 5k}{3},\ k\right)$。 1M

C 的方程為

$$x^2 + y^2 - 2\left(\frac{36 - 5k}{3}\right)x - 2ky + F = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 2(36 - 5k)x - 6ky + 3F = 0$$

其中 F 為一常數。

C 通過 $Q\,(12,\ 0)$。

$$3(12)^2 + 0 - 2(36 - 5k)(12) - 0 + 3F = 0$$ 1M

$$3F = 432 - 120k$$

C 的方程為 $3x^2 + 3y^2 - 2(36 - 5k)x - 6ky + 432 - 120k = 0$。 1

(ii) $3(4)^2 + 3(8)^2 - 2(36 - 5k)(4) - 6k(8) + 432 - 120k = 0$ 1M

$$k = 3$$

G 的坐標為 $(7,\ 3)$。

PG 為所求之圓的一直徑。

$PG = \sqrt{(15 - 7)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{68}$ 1M

所求面積 $= \pi\left(\frac{\sqrt{68}}{2}\right)^2$

$= 17\pi$ 1A

10. (a) 設 G 的坐標為 $(h,\ 26)$。

留意 G 在 AB 的垂直平分線上。

$h = \frac{5 + 13}{2}$ 1M

$= 9$

C 的方程為

$$(x - 9)^2 + (y - 26)^2 = (5 - 9)^2 + (23 - 26)^2$$ 1M

$$(x - 9)^2 + (y - 26)^2 = 25$$ 1A

(b) $\sqrt{(k - 9)^2 + (38 - 26)^2} = 15$ 1M

$$k^2 - 18k = 0$$

$k = 18$ 或 0（捨去） 1A

(c) (i) T、P 與 G 共線。 1A

(ii) C 的半徑為 5。

所求之比 $= GP : PT$ 1M

$= 5 : (15 - 5)$

$= 1 : 2$ 1A

11. (a) L_1 的斜率 $= \frac{6 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{2}$

L_2 的斜率 $= -\frac{2}{3}$ 1M

L_2 的方程為

$$y - 6 = -\frac{2}{3}(x - 4) \qquad \text{1M}$$

$$y = -\frac{2x}{3} + \frac{26}{3} \qquad \text{1A}$$

(b) (i) Γ 為 MN 的垂直平分線。 1M

Γ 平行於 L_1。 1A

(ii) N 的坐標為 $(13, 0)$。 1M

所求方程為

$$\sqrt{(x-13)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2} \qquad \text{1M}$$

$$x^2 + y^2 - 26x + 169 = x^2 + y^2 - 8x - 12y + 52$$

$$-18x + 12y + 117 = 0$$

$$-6x + 4y + 39 = 0 \qquad \text{1A}$$

12. (a) $(x-7)^2 + (y+2)^2 = (4-7)^2 + (2+2)^2$ 1M

$(x-7)^2 + (y+2)^2 = 25$ 1A

(b) $GF = \sqrt{(7-2)^2 + (-2-10)^2} = 13$

C 的半徑 $= 5 < FG$ 1M

因此，F 在 C 外。 1A

(c) (i) Γ 為 GF 的垂直平分線。 1A

(ii) FG 的中點的坐標為 $\left(\frac{9}{2}, 4\right)$。

$$\text{所求距離} = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 7\right)^2 + (4+2)^2} - 5 \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{3}{2} \qquad \text{1A}$$

13. (a) (i) Γ 為 EF 的垂直平分線。 1A

(ii) 設 (x, y) 為 P 的坐標。

$$\sqrt{(x-8)^2 + (y+20)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \qquad \text{1M}$$

$$x^2 + y^2 - 16x + 40y + 464 = x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20$$

$$x - 4y - 37 = 0 \qquad \text{1A}$$

(b) (i) 設 (a, b) 為 H 的坐標。

$$\begin{cases} a - 4b - 37 = 0 \\ \dfrac{9-4}{5-2} \times \dfrac{b-4}{a-2} = -1 \end{cases} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{b-4}{(4b+37)-2} = -1 \qquad \text{1M}$$

$$b = -5$$

H 的坐標為 $(17,\ -5)$。 1A

(ii) C 的圓心為 GH 的中點。

圓心的坐標為 $(11,\ 2)$。 1A

半徑 $= \dfrac{GH}{2} = \dfrac{\sqrt{(17-5)^2+(9+5)^2}}{2} = \sqrt{85}$

E 至 C 的圓心的距離

$= \sqrt{(11-8)^2+(2+20)^2}$ 1M

$= \sqrt{493}$

$> \sqrt{85}$

E 在 C 外。

同意該宣稱。 1A

14. (a) 設 S 的坐標為 $(x,\ y)$。

$$\sqrt{(x-18)^2+(y+70)^2} = \sqrt{(x+60)^2+(y+96)^2}$$ 1M

$$x^2+y^2-36x+140y+5224 = x^2+y^2+120x+192y+12\,816$$

$$-156x-52y-7592 = 0$$

$$3x+y+146 = 0$$ 1

可得 S 在 $3x+y+146=0$ 上。

(b) (i) $130 = \sqrt{(x-18)^2+(y+70)^2}$

$16\,900 = (x-18)^2+(-3x-146+70)^2$ 1M

$0 = 10x^2+420x-10\,800$

$x = -60$ 或 18（捨去）

S 的坐標為 $(-60,\ 34)$。 1A

(ii) T 的坐標為 $(0,\ -70)$。 1A

留意 Q、S 及 U 共線及 $QS : SU = 130 : 60 = 13 : 6$。

設 U 的坐標為 $(a,\ b)$。

$\dfrac{a+60}{-60-18} = \dfrac{6}{13}$ 及 $\dfrac{b-34}{34+70} = \dfrac{6}{13}$ 1M

$a = -96$ $b = 82$

RT 的斜率 $= \dfrac{-70+96}{0+60} = \dfrac{13}{30}$ 1M

TU 的斜率 $= \dfrac{82+70}{-96-0} = -\dfrac{19}{12}$

RU 的斜率 $= \dfrac{82+96}{-96+60} = -\dfrac{89}{18}$

由於沒有兩個斜率的積為 -1，$\triangle RTU$ 中沒有直角。

不同意該宣稱。 1A