REG-CP1A-2425-ASM-SET 3-MATH
建議題解

結構式試題

1. (a) $f(x) = (x+p)(x^2+qx-23)-44$ 1M

$= x^3+(p+q)x^2+(qp-23)x+(-23p-44)$

比較係數，

$$\begin{cases} p+q=r \\ qp-23=-15 \\ -23p-44=2 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $p=-2$、$q=-4$ 及 $r=-6$。 1A

(b) $0 = x^3-6x^2-15x+2$

$= (x+2)(x^2-8x+1)$ 1M+1A

$x+2=0$ 或 $x^2-8x+1=0$

$x=-2$ 或 $x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-4}}{2(1)}$

$= 4\pm\sqrt{15}$

由於 $8\pm\sqrt{15}$ 不是有理數，

因此，同意該宣稱。 1A

2. (a) $f(x) = (3x-1)(x^2-2x-3)+r$ 1A

$f(2) = (6-1)(4-4-3)+r = 0$ 1M

$r = 15$ 1A

(b) $f(x) = (3x-1)(x^2-2x-3)+15$

$= 3x^3-7x^2-7x+18$

$= (x-2)(3x^2-x-9)$

故此，$g(x)=3x^2-x-9$。

對方程 $g(x)=0$，$\Delta=(-1)^2-4(3)(-9)=109>0$。 1M

$g(x)=0$ 的根為實數。同意該宣稱。 1A

3. (a) 比較 x^2 的係數及常數項。

$$\begin{cases} -6=(1)(b)+(a)(-1)+(-2)(2) \\ 6=-2b \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a=-1$ 及 $b=-3$。 1A+1A

(b) $$f(x) = g(x)$$

$$(x^2 - x - 2)(2x^2 - x - 3) - (2x^2 - x - 3) = 0$$ 1M

$$(2x^2 - x - 3)(x^2 - x - 3) = 0$$

$$(2x - 3)(x + 1)(x^2 - x - 3) = 0$$

$$x = -1 \quad 或 \quad \frac{3}{2} \quad 或 \quad \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-3)}}{2}$$ 1M

$$x = -1 \quad 或 \quad \frac{3}{2} \quad 或 \quad \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

根 $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ 不是有理數。

不同意該宣稱。 1A

4. (a) 設 $f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + 5x - 25$，其中 $Q(x)$ 為多項式。 1M

$f(1) = 1 + a - 5 + b = 0 + 5 - 25$ 1M

$$a + b = -16$$

$f(-1) = -1 - a - 5 + b = 0 - 5 - 25$

$$-a + b = -24$$ 1M

求解後，可得 $a = 4$ 及 $b = -20$。 1A

(b) $f(x) = x^{15} + 4x^{11} - 5x^4 - 20 = 0$

$$x^{11}(x^4 + 4) - 5(x^4 + 4) = 0$$

$$(x^4 + 4)(x^{11} - 5) = 0$$ 1M

$$x^{11} = 5 \quad 或 \quad x^4 = -4 \text{（捨去）}$$

$x = \sqrt[11]{5}$ 是無理數 1M

該宣稱不正確。 1A

5. (a) $p(x) = (x + r)(x^2 - rx + 2r^2) - 4r^3$ 1A

$p(r) = (r + r)(r^2 - r^2 + 2r^2) - 4r^3$ 1M

$= 4r^3 - 4r^3$

$= 0$

$p(x)$ 可被 $x - r$ 整除。 1

(b) $0 = (x + r)(x^2 - rx + 2r^2) - 4r^3$

$= x^3 + r^2x - 2r^3$

$= (x - r)(x^2 + rx + 2r^2)$ 1M

$x = r \quad 或 \quad x^2 + rx + 2r^2 = 0$ 1A

當 $x^2 + rx + 2r^2 = 0$ 時，$\Delta = r^2 - 4(1)(2r^2) = -7r^2 < 0$。 1M

方程 $x^2 + rx + 2r^2 = 0$ 的根不是實數。

不同意該宣稱。 1A

6. (a) $f(x) = (x - 2)(x^2 - 3x + 4) + r$ 1A

故此，$(x-1)g(x) \equiv (x-2)(x^2-3x+4)+r$。
代 $x=1$，

$$0 = (-1)(1-3+4)+r \qquad \text{1M}$$
$$r = 2 \qquad \text{1A}$$

(b) $f(x) = (x-2)(x^2-3x+4)+2$
$= x^3-5x^2+10x-6$
$= (x-1)(x^2-4x+6)$ 1M

故此，$g(x) = x^2-4x+6$。當 $g(x)=0$， 1A

$$\Delta = 4^2-4(1)(6) = -8 < 0 \qquad \text{1M}$$

$g(x)=0$ 的根不是實數，即不是有理數。
不同意該宣稱。 1A

7. (a) $2(2)^3+19(2)^2+16(2)+k = 112$ 1M
$k = -12$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3+19\left(-\frac{3}{2}\right)^2+16\left(-\frac{3}{2}\right)-12 \qquad \text{1M}$$
$$= 0$$

因此，$2x+3$ 為 $f(x)$ 的因式。 1A

(b) $2x^3+19x^2+16x-12=0$
$(2x+3)(x^2+8x-4)=0$ 1M

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{或} \quad \frac{-8\pm\sqrt{80}}{2}$$

$\dfrac{-8\pm\sqrt{80}}{2} = -4\pm 2\sqrt{5}$ 為無理數。
不同意該宣稱。 1A

8. (a) 設 $f(x) = (x^2-1)Q(x)+Ax+B$，其中 $Q(x)$ 為多項式，A 及 B 均為常數。 1A

$$\begin{cases} 3 = f(1) = A+B \\ -7 = f(-1) = -A+B \end{cases} \qquad \text{1M}$$

求解後，可得 $A=5$ 及 $B=-2$。
所求餘式為 $5x-2$。 1A

(b) 設 $f(x) = (x^2-1)(Cx+D)+5x-2$，其中 C 及 D 均為常數。 1A
x 的係數 $= -C+5 = 0$
$C = 5$ 1A
$f(0) = (-1)(D)-2 = 0$
$D = -2$ 1A

故此，$f(x) = (x^2 - 1)(5x - 2) + (5x - 2)$。當 $f(x) = 0$，

$$\begin{aligned}(x^2 - 1)(5x - 2) + (5x - 2) &= 0\\ (5x - 2)(x^2) &= 0\\ x &= \frac{2}{5} \quad 或 \quad 0\end{aligned}$$

另一個根為 $\frac{2}{5}$。 1A

9. (a) 設 $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(Ax + B) + ax + 32$，其中 A 及 B 均為常數。 1A

$f(-2) = 0 = (4 - 6 + 2)(-2A + B) - 2a + 32$ 1M

$a = 16$ 1A

(b) 可得 $f(1) = 0$ 及 $f(3) = -40$。

$$\begin{cases} 0 = (1 + 3 + 2)(A + B) + 16 + 32 \\ -40 = (9 + 9 + 2)(3A + B) + 48 + 32 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $A = 1$ 及 $B = -9$。 1A

$0 = f(x)$

$0 = (x + 1)(x + 2)(x - 9) + 16(x + 2)$

$0 = (x + 2)[(x + 1)(x - 9) + 16]$ 1M

$0 = (x + 2)(x^2 - 8x + 7)$

$0 = (x + 2)(x - 1)(x - 7)$

$x = -2$ 或 1 或 7 1A

該方程的所有根均為有理數。
該宣稱正確。 1A

10. (a) $p(x) = (x^2 - 2x + 2)(10x^2 + ax - 19) + (bx + 41)$ 1M
由於 $p(x)$ 可被 $(x + 1)(x - 1)$ 整除，可得 $p(1) = p(-1) = 0$。

$$\begin{cases} 0 = (1 - 2 + 2)(10 + a - 19) + b + 41 \\ 0 = (1 + 2 + 2)(10 - a - 19) - b + 41 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a = 7$ 及 $b = -39$。 1A+1A

(b) $0 = p(x)$

$0 = (x^2 - 2x + 2)(10x^2 + 7x - 19) - 39x + 41$

$= 10x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 13x + 3$

$= (x^2 - 1)(10x^2 - 13x - 3)$ 1M

$= (x + 1)(x - 1)(2x - 3)(5x + 1)$

$x = \pm 1$ 或 $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{5}$ 1M

方程 $p(x) = 0$ 有 4 個有理根。 1A

11. (a) $f(-2) = 0$

$4(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + 18 = 0$ 1M

$2b - c = 7$

$f(1) = f\left(-\frac{3}{2}\right)$

$4 + b + c + 18 = 4\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + b\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + c\left(-\frac{3}{2}\right) + 18$ 1M

$b - 2c = 14$

解 $\begin{cases} 2b - c = 7 \\ b - 2c = 14 \end{cases}$， 1M

可得 $b = 0$ 及 $c = -7$。 1A

(b) $f(x) = 4x^3 - 7x + 18$

$= (x + 2)(4x^2 - 8x + 9)$ 1M+1A

(c) 餘數 $= f(-1 - 1)$

$= f(-2)$

$= 4(-2)^3 - 7(-2) + 18$ 1M

$= 0$ 1A

12. (a) 設 $p(x) = 2(x + 3)^2(Ax + B) + 22$，其中 A 及 B 均為常數。 1A

$\begin{cases} 0 = 2(-4 + 3)^2(-4A + B) + 22 & \text{1M} \\ -5 = 2\left(-\frac{3}{2} + 3\right)^2\left(-\frac{3A}{2} + B\right) + 22 & \text{1M} \end{cases}$

求解後，可得 $A = 2$ 及 $B = -3$。 1A

可得 $p(x) = 2(x + 3)^2(2x - 3) + 22$。

(b) $0 = p(x) + k(x^2 + 6x + 8)$

$= 4x^3 + 18x^2 - 32 + k(x^2 + 6x + 8)$

$= 2(x + 4)(2x^2 + x - 4) + k(x + 2)(x + 4)$ 1M

$= (x + 4)(4x^2 + (k + 2)x + (2k - 8))$

$x = -4$ 或 $4x^2 + (k + 2)x + (2k - 8) = 0$

方程 $4x^2 + (k + 2)x + (2k - 8) = 0$ 有兩個相異實根。

$\Delta = (k + 2)^2 - 4(4)(2k - 8) > 0$ 1M

$k^2 - 28k + 132 > 0$

$k < 6$ 或 $k > 22$

當 $x = -4$ 為 $4x^2 + (k + 2)x + (2k - 8) = 0$ 的根。

$4(-4)^2 + (k + 2)(-4) + (2k - 8) = 0$ 1M

$k = 24$

可得當有三個相異實根時，$k \neq 24$。

因此，可得 $k < 6$ 或 $22 < k < 24$ 或 $k > 24$。 1A

13. (a) 設 $g(x) = (2x^2 - 9x + 14)(Ax + B) + 3x - 1$，其中 A 及 B 均為常數。 1M

$$\begin{cases} 33 = [2(2)^2 - 9(2) + 14](2A + B) + 3(2) - 1 \\ 21 = [2(-1)^2 - 9(-1) + 14](-A + B) + 3(-1) - 1 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $A = 2$ 及 $B = 3$。

所求商式為 $2x + 3$。 1A

(b)
$$(2x^2 - 9x + 14)(2x + 3) + 3x - 1 = 2(x + 2)(3x - 1)$$
$$(2x^2 - 9x + 14)(2x + 3) + (3x - 1)[1 - 2(x + 2)] = 0$$
$$(2x + 3)[(2x^2 - 9x + 14) - (3x - 1)] = 0$$ 1M
$$(2x + 3)(2x^2 - 12x + 15) = 0$$

$2x + 3 = 0$ 或 $2x^2 - 12x + 15 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ $\quad$ $x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4(2)(15)}}{2(2)}$ 1M

$= \frac{6 \pm \sqrt{6}}{2}$

$\frac{6 \pm \sqrt{6}}{2}$ 不是有理數。

不同意該宣稱。 1A

14. (a) $f(3) = 3^3 - 8(3) - 3 = 0$

因此，$x - 3$ 為 $f(x)$ 的因式。 1

(b) (i) $g(2) = 0 + 2a + b = 0$ 1M

$$2a + b = 0$$

$g(1) = 2(1 - 8)(1 - 2) + a + b = 20$ 1M

$$a + b = 6$$

求解後，可得 $a = -6$ 及 $b = 12$。 1A

(ii) $g(x) = 2x(x^2 - 8)(x - 2) - 6x + 12 = 0$

$$(x - 2)[2x(x^2 - 8) - 6] = 0$$ 1M
$$(x - 2)(2x^3 - 16x - 6) = 0$$
$$2(x - 2)(x - 3)(x^2 + 3x + 1) = 0$$ 1M

$x = 2$ 或 $x = 3$ 或 $x^2 + 3x + 1 = 0$

$x = 2$ 或 3 或 $\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4}}{2}$ 1M

$x = 2$ 或 3 或 $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

由於 $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 不是有理數，不同意該宣稱。 1A