REG-AOT-2425-ASM-SET 6-MATH
建議題解

結構式試題

1. (a) $PS^2 = 24^2 + 18^2 - 2(24)(18)\cos 50^\circ$ 1M

$PS \approx 18.6\text{ cm}$ 1A

(b) 設 M 為 QR 的中點。所求之角為 $\angle SMP$。 1M

$SM = \sqrt{18^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2} = 4\sqrt{14}\text{ cm}$ 1M

$PM = \sqrt{24^2 - 10^2} = 2\sqrt{119}\text{ cm}$

$PS^2 = SM^2 + PM^2 - 2(SM)(PM)\cos\angle SMP$ 1M

$\angle SMP \approx 57.0^\circ$ 1A

(c) $\angle PAS = \cos^{-1}\frac{AP^2 + AS^2 - SP^2}{2(AP)(AS)}$

利用圖的對稱性質，在當 A 在 QR 的中點時，使得 AP 及 AS 均垂直於 QR 且為最短，而此時 $\angle PAS$ 為最大。

當 A 由 Q 移動至中點 M，$\angle PAS$ 由 50° 增加至 57.0°。 1A

當 A 由中點 M 移動至 R，$\angle PAS$ 由 57.0° 減小至 50°。 1A

2. (a) $AM = 10\sin 60^\circ \approx 8.66\text{ cm}$ 1A

$\angle MAP = \frac{60^\circ}{4} = 15^\circ$

$PQ = 2PM$

$= 2 \times AM\tan 15^\circ$ 1M

$\approx 4.64\text{ cm}$ 1A

(b) 由於平面 APB 及 AQC 相等及垂直，由 M 至水平地面的距離等於由 P 至地面的距離。

參照第二張圖，垂直距離 = PM。 1M

垂直距離 $= 10\sin 60^\circ \tan 15^\circ$

$\approx 2.32\text{ cm}$ 1A

(c) 設 P' 及 Q' 分別為 P 及 Q 在水平地面上的投影。

$AP' = AQ' = AM \approx 8.66\text{ cm}$ 1A

$P'Q' = PQ \approx 4.64\text{ cm}$

在 $\triangle AP'Q'$ 中，

$P'Q'^2 = AP'^2 + AQ'^2 - 2(AP')(AQ')\cos\angle P'AQ'$ 1M

$\angle P'AQ' \approx 31.1^\circ$

因此，$\angle BAC \approx 31.1^\circ$。 1A

3. (a) $\frac{\sin\angle ABD}{19} = \frac{\sin 80^\circ}{30}$ 1M

$\angle ABD \approx 38.6^\circ$ 或 141°（捨去） 1A

(b) (i) $25^2 = 19^2 + 30^2 - 2(19)(30)\cos\angle CDA$ 1M

$\angle CDA \approx 56.1^\circ$ 1A

(ii) 設 E 為 BD 上的一點使得 $AE \perp BD$。

設 F 為 CD 上的一點使得 $EF \perp BD$。

所求之角為 $\angle AEF$。 1A

$AE = 19\sin 80^\circ \approx 18.7\text{ cm}$ 1M

$DE = 19\cos 80^\circ \approx 3.30\text{ cm}$

$\angle EDF = \angle ABD \approx 38.6^\circ$

$EF = DE\tan EDF \approx 2.63\text{ cm}$

$DF = \dfrac{DE}{\cos\angle EDF} \approx 4.22\text{ cm}$

$AF^2 = DF^2 + 19^2 - 2(DF)(19)\cos\angle CDA$ 1M

$AF \approx 17.0\text{ cm}$

在 $\triangle AEF$ 中，

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2(AE)(EF)\cos\angle AEF$$

$\angle AEF \approx 46.6^\circ$ 1A

所求之角為 46.6°。

4. (a) $AD = 20\cos 50^\circ \approx 12.9\text{ cm}$ 1A

$DB = \sqrt{30^2 - (20\sin 50^\circ)^2} \approx 25.8\text{ cm}$ 1A

(b) (i) $AB^2 = 20^2 + 30^2 - 2(20)(30)\cos 45^\circ$ 1M

$AB \approx 21.2\text{ cm}$ 1A

(ii) 所求之角為 $\angle ADB$。

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2(AD)(DB)\cos\angle ADB$$ 1M

$\angle ADB \approx 55.1^\circ$ 1A

(iii) $CD = 20\sin 50^\circ \approx 15.3\text{ cm}$

四面體的體積 $= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}(AD)(DB)\sin\angle ADB(CD)$ 1M

$\approx 695\text{ cm}^3 > 650\text{ cm}^3$

不同意該宣稱。 1A

5. (a) $\dfrac{12\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \dfrac{12}{\sin\angle ABC}$ 1M

$\angle ABC = 30^\circ$ 或 150°（捨去） 1A

$\angle ACB = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$

$AB^2 = 12^2 + (12\sqrt{3})^2 - 2(12)(12\sqrt{3})\cos 30^\circ$

$AB = 12\text{ cm}$ 1A

(b) 設 M 為 BC 的中點。所求之角為 $\angle VMA$。 1A

$VM = \sqrt{15^2 - (6\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{13}\text{ cm}$

$AM = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6\text{ cm}$

$15^2 = 6^2 + (3\sqrt{13})^2 - 2(6)(3\sqrt{13})\cos\angle VMA$ 1M

$\angle VMA \approx 124^\circ$ 1A

(c) (i) $QR = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\text{ cm}$ 1A

考慮外接圓 PQR。由於 $\angle QPR = 90^\circ$，QR 為一直徑及 M 為圓心。 1M

因此，$PM = \dfrac{QR}{2} = 7.5\text{ cm}$。 1A

(ii) $\triangle QRV$ 為等邊三角形。$VM = VR\sin 60^\circ = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$。 1A

$15^2 = VM^2 + (7.5)^2 - 2(VM)(7.5)\cos\angle PMV$ 1M

$\angle PMV = 90^\circ$

由於 $VM \perp QR$ 及 $VM \perp PM$，VM 垂直於平面 PQR。

同意該宣稱。 1A

6. (a) $\angle BDC = \dfrac{360^\circ - 150^\circ}{2} = 105^\circ$ 1A

$50^2 = 32^2 + BD^2 - 2(32)(BD)\cos 105^\circ$ 1M

$0 = BD^2 - 64(BD)\cos 105^\circ - 1476$

$BD \approx 31.0\text{ cm}$ 或 -47.6 cm（捨去） 1A

(b) (i) $AC^2 = 32^2 + 32^2 - 2(32)^2\cos 40^\circ$ 1M

$AC \approx 21.9\text{ cm}$

所求距離為 21.9 cm。 1A

(ii) 設 E 為 AC 的中點。

所求之角為 $\angle BED$。 1A

$DE = 32\cos\dfrac{40^\circ}{2} \approx 30.1\text{ cm}$ 1M

$BE = \sqrt{50^2 - \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2} \approx 48.8\text{ cm}$

$BD^2 = DE^2 + BE^2 - 2(DE)(BE)\cos\angle BED$

$\angle BED \approx 37.7^\circ$ 1A

(iii) $\triangle ACD$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(32)(32)\sin 40^\circ$ 1M

$= 512\sin 40^\circ\text{ cm}^2$

體積 $= \dfrac{1}{3}(512\sin 40^\circ)(BE\sin\angle BED)$ 1M

$\approx 3270\text{ cm}^3$ 1A

另一方法：

體積 $= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}(AC)(BE)\right)(DE\sin\angle BED)$ 1M+1M

$\approx 3270\text{ cm}^3$ 1A

(c) 設 D' 及 P' 分別為 D 及 P 在平面 ABC 的投影。

由於 $\triangle BDD' \sim \triangle BPP'$，可得 $\dfrac{PP'}{DD'} = \dfrac{BP}{BD} = \dfrac{1}{2}$。 1M

$$\frac{ABCP\text{ 的體積}}{ABCD\text{ 的體積}} = \frac{\frac{1}{3}(\triangle ABC\text{ 的面積})(PP')}{\frac{1}{3}(\triangle ABC\text{ 的面積})(DD')}$$

$$= \frac{PP'}{DD'} = \frac{1}{2}$$

同意該宣稱。 1A

7. (a) $BD^2 = 20^2 + 25^2 - 2(20)(25)\cos 120°$ 1M

$BD = 5\sqrt{61}$ cm

$20^2 = 25^2 + BD^2 - 2(25)(BD)\cos\angle BDC$

$\angle BDC \approx 26.3°$ 1A

$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{25}$ 1M

$AD = 61$ cm 1A

(b) (i) 設 E 為 DC 上的點使得 $BE \perp CD$。

設 F 為 AD 上的點使得 $EF \perp CD$。所求之角為 $\angle BEF$。 1A

$BE = 20\sin(180° - 120°) = 10\sqrt{3}$ cm

$\frac{25}{\sin\angle DAC} = \frac{61}{\sin 140°}$ 1M

$\angle DAC \approx 15.3°$

$\angle ADC = 180° - 140° - \angle DAC \approx 24.7°$

$DE = CD + 20\cos(180° - 120°) = 35$ cm

$EF = DE\tan\angle ADC \approx 16.1$ cm 1A

$DF = \frac{DE}{\cos\angle ADC} \approx 38.5$ cm

$BF^2 = BD^2 + DF^2 - 2(BD)(DF)\cos\angle BDA$

$= BD^2 + DF^2 - 2(BD)(DF)\cos\angle BDC$

$BF \approx 17.7$ cm

$BF^2 = BE^2 + EF^2 - 2(BE)(EF)\cos\angle BEF$

$\angle BEF \approx 63.7°$ 1A

所求之角為 $63.7°$。

(ii) 設 G 為地上的點使得 BG 垂直於平面 ACD。

所求之角為 $\angle BDG$。 1A

$BG = BE\sin\angle BEF \approx 15.5$ cm 1A

$\sin\angle BDG = \frac{BG}{BD}$

$\angle BDG \approx 23.4°$ 1A

所求之角為 $23.4°$。

(iii) 設所求距離為 h cm。

$\triangle BCD$ 的面積 $= \frac{1}{2}(20)(25)(\sin 120°) = 125\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

$\triangle ACD$ 的面積 $= \frac{1}{2}(AD)(25)(\sin\angle ADC) \approx 319\ \text{cm}^2$

藉考慮四面體 $ABCD$ 的體積，

$$\frac{1}{3}(125\sqrt{3})(h) = \frac{1}{3}(\triangle ACD \text{ 的面積})(BG) \quad \text{1M}$$

$$h \approx 22.9\text{ cm} < 23\text{ cm}$$

不同意該宣稱。 1A