REG-AOT-2425-ASM-SET 3-MATH
建議題解

多項選擇題

1. C	2. D	3. B	4. C	5. D
6. D	7. A	8. B	9. B	10. D
11. A	12. B	13. C	14. B	15. C
16. B	17. D	18. C	19. B	20. D
21. C	22. B	23. D	24. C	

1. $\boxed{\text{C}}$

設立方體的邊長為 2。M 及 N 分別為 BD 及 PQ 的中點。

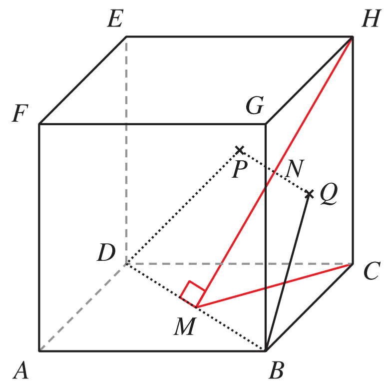
留意由於 D、P、H 共線，及 B、Q、H 共線。可得 M、N、H 共線。

留意 $MH \perp BD$ 及 $CM \perp BD$。

所求之角為 $\angle CMH$。

$CM = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$

$\angle CMH = \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{2}} \approx 55°$



2. $\boxed{\text{D}}$

設 E 為 AC 上的一點使得 $VE \perp AC$。

所求角為 $\angle VED$。

由於該錐體沿平面 VAC 對稱，

可得 $\angle VEB = \angle VED = \frac{180°}{2} = 90°$。

3. $\boxed{\text{B}}$

設 M 為 BC 上的點使得 $AM \perp BC$。

留意 AMD 為該四面體的對稱面，且垂直於平面 BCD。

可得 $\angle AMD = 80^\circ$ 及所求之角為 $\angle ADM$。

考慮 $\triangle ABC$。

$AM = 56 \sin 60^\circ = 28\sqrt{3}\text{ cm}$

考慮 $\triangle BCD$。

$DM = \sqrt{60^2 - 28^2} = \sqrt{2816}\text{ cm}$

考慮 $\triangle AMD$。

$AD^2 = AM^2 + DM^2 - 2(AM)(DM)\cos 80^\circ$

$AD \approx 65.4\text{ cm}$

$AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2(AD)(DM)\cos \angle ADM$

$\angle ADM \approx 47^\circ$

4. $\boxed{\text{C}}$

設 M 及 N 分別為 AB 及 CD 的中點。

設 X 為 MN 的中點使得 VX 垂直於平面 $ABCD$。

可得 $\theta = \angle MVN$ 及 $\dfrac{\theta}{2} = \angle VNX$。

$DX = \dfrac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{5}\text{ cm}$

$VX = \sqrt{7^2 - DX^2} = 2\sqrt{11}\text{ cm}$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{MX}{VX} = \frac{2}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

5. $\boxed{\text{D}}$

設 E 為 CD 上的一點使得 $BE \perp CD$。則 $\theta = \angle AEB$。

$CD = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25\text{ cm}$。藉考慮 $\triangle BCD$ 的面積，

$$\frac{(25)(BE)}{2} = \frac{(24)(7)}{2}$$

$$BE = \frac{168}{25}$$

$\tan\theta = \dfrac{7}{BE} = \dfrac{25}{24}$

6. $\boxed{\text{D}}$

設 D 為 BC 上的點使得 $PD \perp BC$。
所求之角為 $\angle ADP$。

$BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{ m}$

$$\frac{(PD)(BC)}{2} = \frac{(PB)(PC)}{2}$$

$$PD = 2.4\text{ m}$$

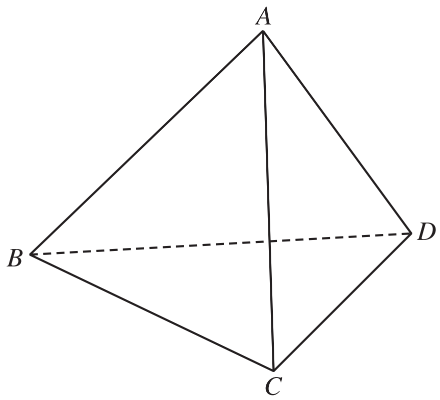
$$\tan\angle ADP = \frac{5}{2.4} = \frac{25}{12}$$

7. $\boxed{\text{A}}$

留意 $\alpha = \angle GFH = 45^\circ$，$\beta = 90^\circ$。
因此，$\alpha < 60^\circ < \beta$。

8. $\boxed{\text{B}}$

參照下圖。設 E 為 BC 的中點，且每邊的長度為 $x\text{ cm}$。



在 $\triangle AED$ 中，$AE = DE = x\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}x}{2}\text{ cm}$。

$$x^2 = AE^2 + DE^2 - 2(AE)(DE)\cos\angle AED$$

$$\angle AED = \cos^{-1}\frac{1}{3}$$

考慮該四面體的體積。

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\sin 60^\circ\right)(AE\sin\angle AED) = 576$$

$$x \approx 17.0$$

設 X 為 A 在 BCD 上的投影。
留意 D、X、E 共線。
考慮 $\triangle AXE$。
所求高度 $= AE\sin\angle AED$

$\approx 13.9\text{ cm}$

9. $\boxed{\text{B}}$

設 M 及 N 分別為 BC 及 AD 的中點。
所求角為 $\angle MVN$。

$$MV = NV = \sqrt{8^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \sqrt{60}\text{ cm}$$

$$6^2 = MV^2 + NV^2 - 2(MV)(NV)\cos\angle MVN$$

$$\angle MVN \approx 46^\circ$$

10. $\boxed{\text{D}}$

設 K 為 EG 上的一點使得 $AK \perp EG$。
所求角為 $\angle AKF$。
考慮 $\triangle EFG$ 的面積。

$$\frac{1}{2}(8)(6) = \frac{1}{2}(EG)(FK)$$

$$24 = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2}(EK)$$

$$EK = 4.8\text{ cm}$$

$$\tan\theta = \frac{12}{4.8}$$

$$\theta \approx 68^\circ$$

11. $\boxed{\text{A}}$

設 M 及 N 分別為 BD 及 AD 的中點。
所求之角為 $\angle MVN$。

$$MV = NV = \sqrt{15^2 - 4^2} = \sqrt{209}\text{ cm}$$

$$MN = 6\text{ cm}$$

$$MN^2 = MV^2 + NV^2 - 2(MV)(NV)\cos\angle MVN$$

$$\angle MVN \approx 24^\circ$$

12. $\boxed{\text{B}}$

所求角為 $\angle CBH$（或 $\angle DAE$）。

$$\angle CBH = 45^\circ$$

13. $\boxed{\text{C}}$

$$15^2 = 9^2 + 12^2 \quad \Rightarrow \quad \angle BDC = 90^\circ$$

由於 $\triangle ABD$ 為鉛垂及 CD 為水平，$AD \perp CD$。
故此，$\theta = \angle ADB = \tan^{-1}\dfrac{12}{9}$ 及 $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$。

14. $\boxed{\text{B}}$

設 $BC = 1$。

$AE = BF = 1\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$AC = \dfrac{AE}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}$

$\cos\angle ACB = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

15. $\boxed{\text{C}}$

設 K 為 AC 上的一點使得 $DK \perp AC$。

可得 $x = \angle DKE$。

考慮 $\triangle ACD$ 的面積。

$$\frac{(AD)(CD)}{2} = \frac{(AC)(DK)}{2}$$
$$\frac{(3)(4)}{2} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}(DK)}{2}$$
$$DK = 2.4\text{ cm}$$

考慮 $\triangle DKE$。

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{DE}{DK}\\ &= \frac{2}{2.4}\\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

16. $\boxed{\text{B}}$

留意 $\angle BCT = \angle BCA = 90^\circ$。

可得 BC 垂直於平面 ACT。

設 D 為 AT 上的一點使得 $CD \perp AT$。

則 $\theta = \angle BDC$。

考慮 $\triangle ACT$ 的面積。

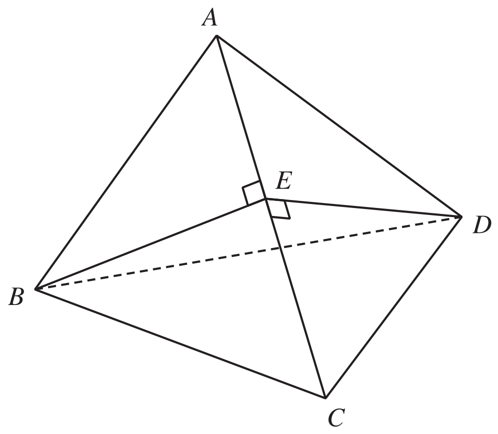
$$\frac{(40)(30)}{2} = \frac{\sqrt{40^2+30^2}(CD)}{2}$$
$$CD = 24\text{ cm}$$

考慮 $\triangle BCD$。

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{20}{24}\\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

17. $\boxed{\text{D}}$

由於 $BE \perp AC$ 及 $DE \perp AC$，所求之角為 $\angle BED$。



18. $\boxed{\text{C}}$

設每邊的長度為 2。設 K 為 BV 上的一點使得 $AK \perp BV$ 及 $CK \perp BV$。

$AK = CK = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$ 及 $AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

在 $\triangle AKC$，$\angle AKC$ 為所求之角。

$$(2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})^2 \cos\angle AKC$$

$$\angle AKC \approx 109^\circ$$

19. $\boxed{\text{B}}$

設 F 為 AC 上的一點使得 $BF \perp AC$。

所求之角為 $\angle BFD$。

設 $BC = 1\text{ cm}$。

留意 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ACD$ 為等邊三角形。

$DF = BF = 1\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$

$BD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\text{ cm}$

$$BD^2 = DF^2 + BF^2 - 2(DF)(BF)\cos\angle BFD$$

$\angle BFD \approx 109^\circ$

20. $\boxed{\text{D}}$

設 E 為 CD 上的一點使得 $BE \perp CD$。則 $AE \perp CD$ 及 $\theta = \angle AEB$。

$\angle BCD = \tan^{-1}\dfrac{15}{8}$，及 $BE = BC\sin\angle BCD = \dfrac{120}{17}\text{ m}$

$\tan\theta = \dfrac{8}{BE} = \dfrac{17}{15}$

21. $\boxed{\text{C}}$

設 K 為 AM 上的一點使得 $DK \perp AM$。
則 $\alpha = \angle EMD$ 及 $\beta = \angle EKD$。

I. ✓。由於 $\angle DKM = 90^\circ$，可得 $DK < DM$ 及 $\alpha < \beta$。

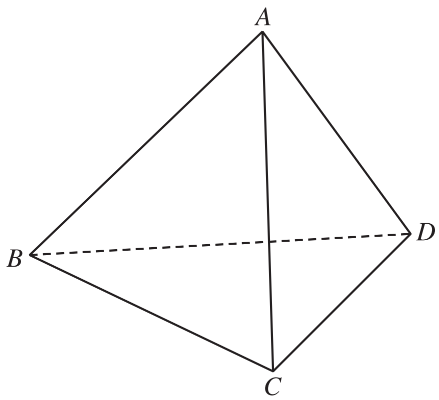
II. ✗。由於 $\alpha < \beta$，可得 $\cos\alpha > \cos\beta$。

III. ✓。$\angle DAM = \angle BMA = \tan^{-1}\dfrac{5}{2.5} \approx 63.4^\circ$
$DK = AD\sin\angle DAM \approx 4.47\text{ cm}$
$\tan\beta = \dfrac{DE}{DK} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

22. $\boxed{\text{B}}$

參照下圖。設 E 為 BC 的中點及每邊的邊長為 12 cm。

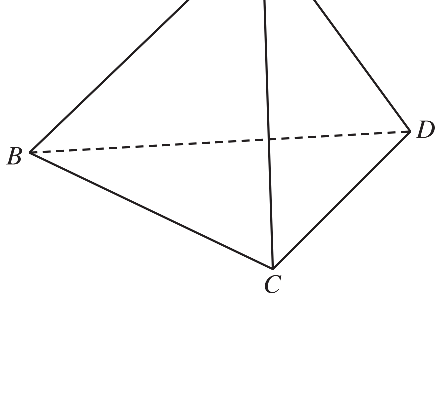
在 $\triangle AED$，$AE = DE = 12\sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$ cm。
$$12^2 = AE^2 + DE^2 - 2(AE)(DE)\cos\angle AED$$
$\angle AED = \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$
設 X 為 A 在平面 BCD 上的投影。則 X 為 $\triangle BCD$ 的形心且它在 DE 上。
在 $\triangle AEX$，$\angle AXE = 90^\circ$ 及
高 $= AE\sin\angle AED$
$= \sqrt{96}$ cm
體積 $= \dfrac{1}{2}(12)^2\sin 60^\circ(\sqrt{96}) \times \dfrac{1}{3}$
$= 144\sqrt{2}\text{ cm}^3$



23. $\boxed{\text{D}}$

參照下圖。設 E 為 BC 的中點及每邊長度為 x cm。

在 $\triangle AED$ 中，$AE = DE = x\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$ cm
$$x^2 = AE^2 + DE^2 - 2(AE)(DE)\cos\angle AED$$
$\angle AED = \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$
設 X 為 A 在平面 BCD 上的投影。則 X 在 DE 上及 $AX \perp BD$。
在 $\triangle AEX$，
$$AE\sin\angle AED = 4$$
$$x = 2\sqrt{6}$$



24. $\boxed{\text{C}}$

設 K 為 VB 上的一點使得 $AK \perp VB$。可得 $CK \perp VB$。
所求之角為 $\angle AKC$。

$AC = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$ cm

$VA = VB = VC = \sqrt{8^2 + \left(\dfrac{12\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{136}$ cm

在 $\triangle VAB$ 中，

$$\cos\angle ABV = \frac{\left(\frac{12}{2}\right)}{VB}$$
$$\angle ABV \approx 59.0^\circ$$

$AK = CK = 12\sin\angle ABV \approx 10.3$ cm

在 $\triangle AKC$ 中，

$$AC^2 = AK^2 + CK^2 - 2(AK)(CK)\cos\angle AKC$$
$$\angle AKC \approx 111^\circ$$

結構式試題

25. (a) 在 $\triangle ABC$，

$$AC^2 = 9^2 + 15^2 - 2(9)(15)\cos 120^\circ \qquad \text{1M}$$

$$AC = 21\text{ cm} \qquad \text{1A}$$

在 $\triangle ADC$，$\angle ADC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

由於 $AD = CD$，$\angle DAC = \angle ACD = \dfrac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ 及 $\triangle ACD$ 為等邊三角形。 1M

So, $AD = AC = 21\text{ cm}$。 1A

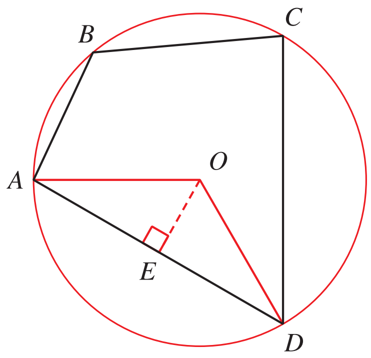
(b) 所求圓的圓心在 $\triangle ACD$ 的外心 O。設 E 為 AD 的中點。

$\angle OAE = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$。

$$\text{半徑} = OA = \frac{AE}{\cos 30^\circ} \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{21}{2} \div \cos 30^\circ$$

$$= 7\sqrt{3}\text{ cm} \qquad \text{1A}$$



(c) 所求之角為 $\angle OEV$。 1A

$$OE = OA\sin 30^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{2}\text{ cm} \qquad \text{1M}$$

$$\tan\angle OEV = \frac{15}{OA} \qquad \text{1M}$$

$$\angle OEV \approx 68.0^\circ \qquad \text{1A}$$

所求之角為 68.0°。

26. (a) $AC^2 = 8^2 + 12^2 - 2(8)(12)\cos 100^\circ$ 1M

$AC \approx 15.5\text{ cm}$ 1A

(b) (i) 設 M 為 BD 的中點。

$$DM = 3\text{ cm}$$

在 $\triangle AMD$，

$$AM = \sqrt{8^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{55}\text{ cm} \qquad \text{1M}$$

在 $\triangle CMD$，

$$CM = \sqrt{12^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{135}\text{ cm}$$

在 $\triangle ACM$，

$$(\sqrt{55})^2 = AC^2 + (\sqrt{135})^2 - 2(AC)(\sqrt{135})\cos\angle ACM \qquad \text{1M}$$

$$\angle ACM \approx 27.1^\circ$$

所求之角為 27.1°。 1A

(ii) 設 Q 為 D 至 AC 的垂足。

由於 $\sin\dfrac{\angle DPB}{2} = \dfrac{DM}{PD}$，

$\angle DPB$ 在當 PD 為極小時為極大，即 $P = Q$。 1A

當 P 由 A 移動至 Q，$\angle DPB$ 增加。

當 P 由 Q 移動至 C，$\angle DPB$ 減少。 1A

27. (a) (i) $CM = \sqrt{10^2 + 10^2}$

$= 10\sqrt{2}\text{ cm}$ 1A

(ii) $\tan\angle ACB = \dfrac{20}{10}$

$\angle ACB \approx 63.4^\circ$ 1A

(iii) $\triangle ACM$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(20-10)(10)$

$= 50\text{ cm}^2$ 1A

(b) (i) 在 $\triangle CDM$，$\angle DCM = \angle ACB - 45^\circ \approx 18.4^\circ$ 1A

$$DM^2 = CD^2 + (10\sqrt{2})^2 - 2(CD)(10\sqrt{2})\cos\angle DCM \qquad \text{1M}$$

$CD \approx 7.45\text{ cm}$ 1A

在 $\triangle BCD$，$BD = \sqrt{10^2 - CD^2} \approx 6.67\text{ cm}$ 1A

(ii) 設 N 為 B 至 CM 的垂足。

所求之角為 $\angle BND$。

在 $\triangle BNC$，$BN = 10\sin 45^\circ = 5\sqrt{2}\text{ cm}$

在 $\triangle BND$，

$$\sin\angle BND = \frac{BD}{5\sqrt{2}} \qquad \text{1M}$$

$\angle BND \approx 70.5^\circ$ 1A

所求之角為 70.5°。