

REG-2425-MOCK-SET 3-MATH-CP 1

建議題解

1. $2(3a - 11) = 3a - 5b$

$$6a - 22 = 3a - 5b$$

$$3a = 22 - 5b$$

$$a = \frac{22 - 5b}{3}$$

1M

1M

1A

2. $\frac{m^6 n^{-3}}{(m^5 n^{-4})^2} = \frac{m^6 n^{-3}}{m^{10} n^{-8}}$

$$= \frac{n^{-3+8}}{m^{10-6}}$$

$$= \frac{n^5}{m^4}$$

1M

1M

1A

3. $\frac{5}{3k+2} - \frac{4}{2k+7} = \frac{5(2k+7) - 4(3k+2)}{(3k+2)(2k+7)}$

$$= \frac{10k + 35 - 12k - 8}{(3k+2)(2k+7)}$$

$$= \frac{-2k + 27}{(3k+2)(2k+7)}$$

1M

1M

1A

4. (a) $25x^2 - 4 = (5x + 2)(5x - 2)$

1A

(b) $5x^2 y - 17xy + 6y = y(5x^2 - 17x + 6)$

$$= y(x - 3)(5x - 2)$$

1A

(c) $5x^2 y - 17xy + 6y - 25x^2 + 4 = y(x - 3)(5x - 2) - (5x + 2)(5x - 2)$

1M

$$= (5x - 2)(xy - 3y - 5x - 2)$$

1A

5. (a) $-3(x - 4) \geq \frac{5x + 3}{6}$

$$-\frac{23x}{6} \geq -\frac{23}{2}$$

$$x \leq 3$$

1A

(b) $6x + 24 > 0$

$$x > -4$$

故此， $-4 < x \leq 3$ 。

1A

1M

共有 7 個整數。

1A

6. (a) 成本 = $\frac{7000}{1 + 40\%}$

$$= \$5000$$

1M

1A

(b) 盈利百分比 = $\frac{7000(1 - 12\%) - 5000}{5000} \times 100\%$

1M

$$= 23.2\%$$

1A

7. 設小麗現在的歲數為 x 。則彼得的歲數為 $\frac{4x}{3}$ 。

$$\frac{x-7}{\frac{4x}{3}-7} = \frac{2}{3}$$

$$3x-21 = \frac{8x}{3} - 14$$

$$x = 21$$

她現在 21 歲。

8. (a) $57 = \frac{41 + 47 + \dots + (70 + a)}{12}$

$$a = 5$$

(b) 分佈域 = $75 - 41 = 34$ kg

四分位數間距 = $66 - 49.5 = 16.5$ kg

標準差 ≈ 10.7 kg

9. (a) 設 $\angle AOE = x$ 。

則 $\angle AEO = x$ 及 $\angle DBE = \frac{x}{2}$ 。

$$x + \frac{x}{2} = 48^\circ$$

$$x = 32^\circ$$

- (b) $\angle OAB = 32^\circ + 32^\circ = 64^\circ$ 及 $\angle AOB = 180^\circ - 2 \times 64^\circ = 52^\circ$ 。

$$\frac{\widehat{AB}}{AE} = \frac{2(AO)\pi \times \frac{52^\circ}{360^\circ}}{AO}$$

$$\approx 0.908 < 1$$

故此， $\widehat{AB} < AE$ 。同意該宣稱。

10. (a) 設 $f(x) = a + bx^2$ ，其中 a 及 b 均為非常數。

$$\begin{cases} 206 = a + b \\ 254 = a + 9b \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 200$ 及 $b = 6$ 。

因此， $f(x) = 200 + 6x^2$ 。

(b) $200 + 6x^2 = 80x$

$$6x^2 - 80x + 200 = 0$$

$$x = \frac{10}{3} \text{ 或 } 10$$

11. (a) $(c + 1) + 4 + a = 8 + (b - a) + c$

$$2a - b = 3$$

由於 $a > 5$ 及 $b < 11$ ， $(a, b) = (6, 9)$ 。

(b) (i) 1

(ii) 6

(c) 所求概率 = $\frac{3 + 1}{2 + 4 + 6 + 8 + 3 + 1}$
 $= \frac{1}{6}$

1M

1A+1A

1A

1A

1M

1A

12. (a) $f(-1) = 0 = -4(-1)^3 + (a + 2)(-1)^2 + 2(-1) - 3b$

$$a - 3b = -4$$

$$f(2) = 9 = -4(2)^3 + (a + 2)(2)^2 + 2(2) - 3b$$

$$4a - 3b = 29$$

求解後，可得 $a = 11$ 及 $b = 5$ 。

(b) $f(x) = -4x^3 + 13x^2 + 2x - 15$

$$= (-x^2 + 2x + 3)(4x - 5)$$

故此， $g(x) = 4x - 5$ 。

$$kx(4x - 5) = (-x^2 + 2x + 3)(4x - 5)$$

$$(4x - 5)(x^2 + (k - 2)x - 3) = 0$$

$$x = \frac{5}{4} \quad \text{或} \quad x^2 + (k - 2)x - 3 = 0$$

$\Delta = (k - 2)^2 - 4(1)(-3) = (k - 2)^2 + 12 > 0$ ，對所有實數值 k 。

$x^2 + (k - 2)x - 3 = 0$ 有兩個相異實根。

同意該宣稱。

1M

1M

1A

1M

1M

1M

1A

13. (a) 可得 $\angle DAE = \angle BAE$ 及 $\angle CBE = \angle ABE$ 。

$$\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$$

$$2\angle BAE + 2\angle ABE = 180^\circ$$

$$\angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$$

$$\angle BAE + \angle ABE + \angle AEB = 180^\circ$$

$$90^\circ + \angle AEB = 180^\circ$$

$$\angle AEB = 90^\circ$$

因此， $\triangle ABE$ 為直角三角形。

1M

1A

(b) (i) $\triangle BPE$

$$\angle BCE = 180^\circ - \angle ADE \quad (\text{同旁內角, } AD \parallel BC)$$

$$\angle BPE = 180^\circ - \angle APE \quad (\text{直線上的鄰角})$$

$$= 180^\circ - \angle ADE \quad (\text{同位角, } \cong \triangle s)$$

$$= \angle BCE$$

$$\angle CBE = \angle PBE \quad (\text{已知})$$

$$BE = BE \quad (\text{公共邊})$$

$$\triangle BCE \cong \triangle BPE \quad (AAS)$$

1A

評分標準	
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。 2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。 1

(ii) $AB = \sqrt{12^2 + 5^2}$

$$= 13 \text{ cm}$$

可得 $AD = AP$ 及 $BC = BP$ 。

$$AD + BC = AP + BP$$

$$= AB$$

$$= 13 \text{ cm}$$

1M

1A

14. (a) $BG = \sqrt{13^2 - (29 - 24)^2}$ 1M
 $= 12 \text{ cm}$
 容量 = $\frac{(29 + 24)(12)}{2}(24)$ 1M
 $= 7632 \text{ cm}^2$ 1A
- (b) (i) 該圓錐的底半徑為 12 cm。
 斜高 = $\sqrt{12^2 + 16^2}$ 1M
 $= 20 \text{ cm}$
 該圓錐的曲面面積 = $\pi(12)(20)$ 1M
 $= 240\pi \text{ cm}^2$
 所求面積 = $240\pi \left[1 - \left(\frac{16 - 12}{16} \right)^2 \right]$ 1M
 $= 225\pi \text{ cm}^2$ 1A
- (ii) 所求體積 = $7632 - \left[\frac{1}{3}\pi(12)^2(16) - \frac{1}{3}\pi(3)^2(16 - 12) \right]$ 1M
 $\approx 5257 \text{ cm}^3$ 1A
15. (a) 所求數目 = $C_5^8 C_2^5$ 1M
 $= 560$ 1A
- (b) 所求數目 = $C_3^8 C_4^5 + C_2^8 C_5^5$ 1M
 $= 308$ 1A
16. (a) $f(x) = \frac{x^2}{16} - \frac{x}{2} + 11$
 $= \frac{1}{16}(x^2 - 8x + 16) + 10$ 1M
 $= \frac{1}{16}(x - 4)^2 + 10$
 頂點的坐標為 (4, 10)。
 1A
- (b) $g(x) = -f(x) = -\frac{1}{16}(x - 4)^2 - 10$ 1M
 $h(x) = -\frac{1}{16}(x - 4)^2 + 6$ 1M
 y 截距 = $-\frac{1}{16}(0 - 4)^2 + 6 = 5$ 1A

17. (a) $(x+2)(x-2) = 8(x-1)$

$$x^2 - 8x + 4 = 0$$

因此， $p = 8$ 及 $q = 4$ 。

1A+1A

(b) 公比 = $\frac{\log 8}{\log 4} = \frac{3 \log 2}{2 \log 2} = \frac{3}{2}$ 。

1M

$$(\log 4) \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha + (\log 4) \left(\frac{3}{2}\right)^{2\alpha} < \log 2^{2020}$$

1M

$$2(1.5)^\alpha + 2(1.5)^{2\alpha} < 2020$$

$$(1.5)^{2\alpha} + 1.5^\alpha - 1010 < 0$$

$$\frac{-1 - \sqrt{4041}}{2} < 1.5^\alpha < \frac{-1 + \sqrt{4041}}{2}$$

由於 $1.5^\alpha > 0$ ，

$$0 < 1.5^\alpha < \frac{-1 + \sqrt{4041}}{2}$$

$$\alpha \log 1.5 < \log \frac{-1 + \sqrt{4041}}{2}$$

1M

$$\alpha < 8.49$$

α 的最大值為 8。

1A

18. (a) $(\sqrt{48})^2 = BC^2 + BC^2 - 2(BC)(BC) \cos 120^\circ$

$$BC^2 = 16$$

$$BC = 4 \text{ cm 或 } -4 \text{ cm (捨去)}$$

(b) (i) $\angle CBE = 60^\circ$

$$\angle AED = 60^\circ$$

$$BE = CD = 4 \text{ cm}$$

$$AE = 12 - 4 = 8 \text{ cm}$$

$$AD^2 = 4^2 + 8^2 - 2(8)(4) \cos 60^\circ$$

$$AD = \sqrt{48} \text{ cm}$$

$$AB = \sqrt{(\sqrt{48})^2 + (\sqrt{48})^2}$$

$$= \sqrt{96} \text{ cm}$$

(ii) 設 X 為 AB 上的一點使得 $CX \perp AB$ 。

$$AC = \sqrt{4^2 + 48} = 8 \text{ cm}$$

$$AE = AC = 8 \text{ cm}$$

$$8^2 = 6^2 + AB^2 - 2(6)(AB) \cos \angle ABC$$

$$\angle ABC \approx 52.5^\circ$$

$$EX = CE = BC \sin \angle ABC \approx 3.16 \text{ cm}$$

由於 $\angle CBE = 60^\circ$ 及 $BC = DE$ ，可得 $CE = 4 \text{ cm}$ 。

$$4^2 = EX^2 + CX^2 - 2(EX)(CX) \cos \angle CXE$$

$$\angle CXE \approx 78.5^\circ$$

(iii) 設 Y 為 BC 的延線上的一點使得 $DY \perp BC$ 。

所求之角為 $\angle AYD$ 。

$$DY = 4 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\tan \angle AYD = \frac{\sqrt{48}}{2\sqrt{3}}$$

$$\angle AYD \approx 63.4^\circ$$

$$> 60^\circ$$

同意該宣稱。

1M

1A

1M

1A

1M

1M

1A

1M

1A

19. (a) (i) $CE = EB$ (已知)
 $OA = OB$ (半徑)
 $OE \parallel AC$ (中點定理)
 $\angle BOE = \angle OAD$ (同位角, $AC \parallel OE$)
 $\angle DOE + \angle BOE = 2\angle OAD$ (圓心角兩倍於圓周角)
 $\angle DOE + \angle BOE = 2\angle BOE$
 $\angle DOE = \angle BOE$

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

- (ii) $\angle DOE = \angle BOE$ (已證明)
 $OE = OE$ (公共邊)
 $OD = OB$ (半徑)
 $\triangle DOE \cong \triangle BOE$ (SAS)
 $\angle OBE = 90^\circ$ (切線 \perp 半徑)
 $\angle ODE = \angle OBE$ (全等 \triangle 的對應角)
 $= 90^\circ$

因此, DE 為該圓在 D 的切線 (切線 \perp 半徑的逆定理)。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

- (b) $\angle ODE + \angle OBE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

因此, O 、 B 、 E 、 D 共圓。

由於 $\angle OBE = 90^\circ$, OE 為圓 $OBED$ 的直徑。

O 的坐標為 $(0, 8)$ 。

$$OE \text{ 的斜率} = \frac{8-0}{0+6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{所求切線的斜率} = -\frac{3}{4}$$

所求方程為

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x + 6)$$

$$3x + 4y + 18 = 0$$

1M

1M

1M

1A