

M2REG-SOLE-2425-ASM-SET 3-MATH

建議題解

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 0 \\ 3 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & -2 & -12 & | & 0 \\ 0 & 1 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & -2 & -12 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1M

設 $z = t$ ，其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

解集為 $\{(-4t, -6t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ 。

1A+1A

$$2. \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & | & 0 \\ 2 & -12 & -1 & | & 0 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1M

設 $z = t$ ，其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

解集為 $\left\{\left(-\frac{5t}{2}, -\frac{t}{2}, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$ 。

1A+1A

$$3. \quad (a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -7 \\ 4 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 27 + 0 + 4 - 24 - 7 - 0$$

$$= 0$$

1M

該方程組有非平凡解。

1

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 2 & -3 & -7 & | & 0 \\ 4 & -1 & -9 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1M

設 $z = t$ ，其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

解集為 $\{(2t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ 。

1A+1A

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ 1 & -k & -4 \\ 3 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 9k - 36 + 5k + 3k^2 + 20 + 27$$

1M+1A

$$= 3k^2 + 14k + 11$$

$$= (k + 1)(3k + 11)$$

方程組有非平凡解當且僅當 $(k + 1)(3k + 11) = 0$ 。

1M

故此， $k = -1$ 或 $k = -\frac{11}{3}$ 。

1A

$$5. \quad (a) \quad (i) \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & a-1 & -a \\ 2 & 3a & -a \\ 3 & 4a-1 & -1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 3a - 2 \quad 1A$$

$$= (2a-1)(a+2)$$

(E) 有唯一的解，故此 $(2a-1)(a+2) \neq 0$ 。 1M

故此， $a < -2$ 或 $-2 < a < \frac{1}{2}$ 或 $a > \frac{1}{2}$ 。 1A

$$(2) \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b-6 & a-1 & -a \\ -10 & 3a & -a \\ 4b & 4a-1 & -1 \end{vmatrix}}{(2a-1)(a+2)} \quad 1M$$

$$= \frac{2(5+2a+8a^2+6a^2b)}{(2a-1)(a+2)} \quad 1A$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b-6 & -a \\ 2 & -10 & -a \\ 3 & 4b & -1 \end{vmatrix}}{(2a-1)(a+2)} = \frac{-2-12a+2b-7ab}{(2a-1)(a+2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & b-6 \\ 2 & 3a & -10 \\ 3 & 4a-1 & 4b \end{vmatrix}}{(2a-1)(a+2)} = \frac{3b+16}{2a-1} \quad 1A$$

(ii) (1) (E) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & b-6 \\ 2 & -6 & 2 & -10 \\ 3 & -9 & -1 & 4b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & b-6 \\ 0 & 0 & -2 & 2-2b \\ 0 & 0 & -7 & b+18 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & b-6 \\ 0 & 0 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 8b+11 \end{array} \right) \quad 1M$$

由於 (E) 有解， $8b+11=0$ ，即 $b = -\frac{11}{8}$ 。 1A

(2) 當 $a = -2$ 及 $b = -\frac{11}{8}$ ，(E) 的增廣矩陣成為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -\frac{59}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

解集為 $\left\{ \left(3t - \frac{21}{8}, t, -\frac{19}{8} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ 。 1A

(b) (F) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -24 & 16 & -59 \\ 1 & -3 & 1 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -\frac{59}{8} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{19}{8} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -\frac{59}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{8} \end{array} \right) \quad 1M$$

解集為 $\left\{ \left(3t - \frac{21}{8}, t, -\frac{19}{8} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ 。

代 $\left(3t - \frac{21}{8}, t, -\frac{19}{8}\right)$ 至 $kx^2 - y^2 \geq z$,

$$k\left(3t - \frac{21}{8}\right)^2 - t^2 \geq -\frac{19}{8}$$

$$(9k - 1)t^2 - \frac{63k}{4}t + \left(\frac{441k}{64} + \frac{19}{8}\right) \geq 0 \quad 1A$$

由於不等式對所有 t 值成立， $9k - 1 > 0$ 及

$$\left(\frac{63k}{4}\right)^2 - 4(9k - 1)\left(\frac{441k}{64} + \frac{361}{64}\right) \leq 0 \quad 1M$$

$$-\frac{927k}{16} + \frac{19}{2} \leq 0$$

$$k \geq \frac{152}{927}$$

結合兩不等式，可得 $k \geq \frac{152}{927}$ 。 1A

$$\begin{aligned}
 6. \quad (a) \quad (i) \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k^2 & 3k-8 \\ 3 & -3 & k \end{vmatrix} &= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & k \end{vmatrix} + k^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & k \end{vmatrix} - (3k-8) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & 1M \\
 &= k^3 - 3k^2 + k - 3 \\
 &= (k-3)(k^2+1)
 \end{aligned}$$

由於 (E) 有唯一解， $(k-3)(k^2+1) \neq 0$ 。 1M

因此， $k \neq 3$ 。 1A

$$\begin{aligned}
 (2) \quad x &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3a & k^2 & 3k-8 \\ a+1 & -3 & k \end{vmatrix}}{(k-3)(k^2+1)} & 1M \\
 &= \frac{-(a+1)k^2 - 3k + 8 - a}{(k^2+1)(k-3)}
 \end{aligned}$$

1A

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3a & 3k-8 \\ 3 & a+1 & k \end{vmatrix}}{(k-3)(k^2+1)} \\
 &= -\frac{3}{k^2+1} & 1A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & k^2 & 3a \\ 3 & -3 & a+1 \end{vmatrix}}{(k-3)(k^2+1)} \\
 &= \frac{a+1}{k-3} & 1A
 \end{aligned}$$

(ii) (1) (E) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 3a \\ 3 & -3 & 3 & a+1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right) \quad 1M$$

由於 (E) 有解。

$$a+1=0$$

$$a=-1 \quad 1A$$

(2) (E) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

可得 $y = -\frac{3}{10}$ 。

設 $z = t$ ，其中 $t \in \mathbf{R}$ 。

$$x - \left(-\frac{3}{10}\right) + t = 0$$

$$x = -\frac{10t+3}{10}$$

$$\text{解集為 } \left\{ \left(-\frac{10t+3}{10}, -\frac{3}{10}, t \right) : t \in \mathbf{R} \right\}。 \quad 1A$$

(b) 當 $k = 3$ 及 $a = c$ 時， (F) 的首三條方程與 (E) 等價。

首三條方程的解集為 $\left\{ \left(-\frac{10t+3}{10}, -\frac{3}{10}, t \right) : t \in \mathbf{R} \right\}。$

$$10 \left(-\frac{10t+3}{10} \right) + 10 \left(-\frac{3}{10} \right) + t^2 = -27 \quad 1M$$

$$t^2 - 10t + 21 = 0$$

$$t = 3 \quad \text{or} \quad 7$$

$$\text{解為 } \left(-\frac{33}{10}, -\frac{3}{10}, 3 \right) \text{ 或 } \left(-\frac{73}{10}, -\frac{3}{10}, 7 \right)。 \quad 1A$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad (a) \quad (i) \quad 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ a-3 & -3 & -2 \\ -3 & 3a+6 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -3 \begin{vmatrix} 3 & a \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - (3a+6) \begin{vmatrix} 1 & a \\ a-3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a-3 & -3 \end{vmatrix} & 1M \\
 &= a^3 - a^2 - 8a + 12 \\
 &= (a-2)^2(a+3) & 1M
 \end{aligned}$$

$a = -3$ 或 2 (捨去)

1A

當 $a = -3$ 時, (E) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -2 \\ -6 & -3 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 1 & b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 15 & -20 & -10 \\ 0 & 6 & -8 & b-6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array} \right) \quad 1M$$

由於 (E) 有無限個解。

$$b - 2 = 0 \quad 1M$$

$$b = 2 \quad 1A$$

(ii) 設 $z = t$, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

$$3y - 4t = -2$$

$$y = \frac{4t-2}{3} \quad 1M$$

代 $y = \frac{4t-2}{3}$ 及 $z = t$ 至 $x + 3y - 3z = -2$ 。

$$x + 3 \left(\frac{4t-2}{3} \right) - 3t = -2$$

$$x = -t$$

$$\text{解集為 } \left\{ \left(-t, \frac{4t-2}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}。 \quad 1A$$

(b) 代 $x = \sqrt{u}$ 、 $y = v$ 、 $z = -w$ 、 $a = -3$ 及 $b = 2$ 至 (E) 。

首三條方程的解為 $\sqrt{u} = -t$ 、 $v = \frac{4t-2}{3}$ 及 $w = -t$ 。 1M

$$4(-t)^2 - 3 \left(\frac{4t-2}{3} \right) - (-t) = 3 \quad 1M$$

$$4t^2 - 3t - 1 = 0$$

$$t = 1 \text{ (捨去) } \quad \text{或} \quad -\frac{1}{4} \quad 1M$$

解為 $u = \frac{1}{16}$ 、 $v = -1$ 及 $w = \frac{1}{4}$ 。 1A

$$8. \quad (a) \quad (i) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 3 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\lambda - 16 \quad 1A$$

(E) 有唯一的解當且僅當 $4\lambda \neq -16$ ，即 $\lambda \neq -4$ 。 1M+1A

$$(ii) \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 11 & -1 & 6 \\ \lambda & 1 & \mu \end{vmatrix}}{4\lambda - 16} \quad 1M$$

$$= \frac{12\lambda - 12\mu + 60}{4\lambda - 16}$$

$$= \frac{3(\lambda - \mu + 5)}{\lambda - 4} \quad 1A$$

$$(b) \quad (i) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 11 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & \mu \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -12 & -8 & -60 \\ 0 & -3 & -2 & \mu - 24 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -12 & -8 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 9 \end{array} \right) \quad 1M$$

由於 (E) 有解， $\mu = 9$ 。 1A

設 $z = t$ ，其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

解集為 $\left\{ \left(\frac{3-t}{3}, \frac{15-2t}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ 。 1A+1A

(ii) (T) 的首三方程等價於方程組 (E)。

首三方程的解為 $\left\{ \left(\frac{3-t}{3}, \frac{15-2t}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ 。

$$\left(\frac{3-t}{3} \right) t + 3 \left(\frac{15-2t}{3} \right) = \frac{7}{4} \quad (9) \quad 1M$$

$$-\frac{t^2}{3} - t - \frac{3}{4} = 0 \quad 1A$$

$$t = -\frac{3}{2}$$

故此，解為 $\left(\frac{3}{2}, 6, -\frac{3}{2} \right)$ 。 1A