REG-COT-2425-ASM-SET 4-MATH
建議題解

結構式試題

1. $20^2 = 14^2 + 30^2 - 2(14)(30)\cos\angle BAC$ 1M

$\angle BAC \approx 34.0^\circ$
O 為 $\triangle ABC$ 的垂心。
可得 $AE \perp OB$。 1M
$CE = AE - AC$
$= 30\cos\angle BAC - 14$ 1M
$\approx 10.9\text{ cm}$ 1A

2. $\angle ABC = 180^\circ - 50^\circ - 58^\circ = 72^\circ$
考慮 $\triangle OBC$。
$\angle OBC = \dfrac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ 1M
$\angle OCB = \dfrac{58^\circ}{2} = 29^\circ$
$\angle BOC = 180^\circ - 36^\circ - 29^\circ = 115^\circ$
$\dfrac{OB}{\sin 29^\circ} = \dfrac{7}{\sin 115^\circ}$ 1M
$OB \approx 3.74\text{ cm}$

設 r cm 為內切圓的半徑。
$\sin 36^\circ = \dfrac{r}{OB}$ 1M
$r \approx 2.20$ 1A

所求半徑為 2.20 cm。

3. (a) (i) 由於 G 為 $\triangle OAB$ 的形心，P 及 Q 分別為 AB 及 OA 的中點。
$PQ // OB$ 及 $QP = \dfrac{1}{2}OB$ （中點定理）
在 $\triangle PGQ$ 及 $\triangle OGB$ 中，

$\angle PGQ = \angle OGB$ （對頂角）
$\angle PQG = \angle OBG$ （錯角，$QP // OB$）
$\angle QPG = \angle BOG$ （錯角，$QP // OB$）
$\triangle PGQ \sim \triangle OGB$ （AAA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(ii) $\triangle PGQ \sim \triangle OGB$ （已證明）

$\dfrac{GQ}{BG} = \dfrac{QP}{OB}$ （全等 △ 的對應邊）

$= \dfrac{\frac{1}{2}OB}{OB}$ （已證明）

$= \dfrac{1}{2}$

因此，$BG : GQ = 2 : 1$。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) 設 $(m,\ n)$ 及 $(b,\ 0)$ 分別為 Q 及 B 的坐標。

由於 $BG : GQ = 2 : 1$，

$\dfrac{n-1}{1-0} = \dfrac{1}{2}$

$n = \dfrac{3}{2}$

由於 Q 在 OA 上，當 $n = \dfrac{3}{2}$，$m = 2 \times \dfrac{3}{2} = 3$。

Q 的坐標為 $\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$。 1M

$\dfrac{b-5}{5-3} = \dfrac{2}{1}$

$b = 9$

B 的坐標為 $(9,\ 0)$。 1A

(ii) 設 $S\,(p,\ q)$ 為 $\triangle OAB$ 的外心。

由於 S 在 OB 的垂直平分線上，$p = \dfrac{9}{2}$。 1M

由於 $OA \perp SQ$，

$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{q-\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}-3} = -1$ 1M+1M

$q = -\dfrac{3}{2}$

外心的坐標為 $\left(\dfrac{9}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$。 1A

4. (a) (i) $\angle BOD = 90°$ （垂心性質）

$\angle ACB = 90°$ （半圓上的圓周角）

$= \angle BOD$

因此，B、C、O、D 共圓。 （同弓形內的圓周角的逆定理）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) 由於 $\triangle BCD$ 的內心在 AB 上，$\angle DBA = \angle ABC$。 1

由於 B、O、C、D 共圓，$\angle DBA = \angle DCO$。 1

故此，$\angle DCO = \angle ABC$ 及 OC 為圓 ABC 的切線。

同意該宣稱。 1

(b) $\angle DBO = \angle CBO$ （已證明）

$\angle CDO = \angle CBO$ （同弓形內的圓周角）

$= \angle DBO$

$\angle DOB = \angle AOD$ （公共角）

$\triangle ADO \sim \triangle DBO$ （AA）

$$\frac{OD}{AO} = \frac{OB}{OD}$$ 1M

$$OD^2 = 2 \cdot 4$$

$$OD = 2\sqrt{2}$$

D 的坐標為 $\left(0,\ 2\sqrt{2}\right)$。 1A

由於 $\angle DOB = 90°$，DB 是圓的直徑。

圓心的坐標為 $\left(2,\ \sqrt{2}\right)$。所求方程為

$$(x-2)^2 + (y-\sqrt{2})^2 = (0-2)^2 + (0-\sqrt{2})^2$$ 1M

$$(x-2)^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 6$$ 1A

5. (a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(4x^2 + 16kx + 16k^2 + 4k - 2)$

$= 2x^2 + 8kx + 8k^2 + 2k - 1$ 1A

(b) $f(x) = 2x^2 + 8kx + 8k^2 + 2k - 1$

$= 2[x^2 + 2(x)(2k) + (2k)^2] + 2k - 1$ 1M

$= 2(x+2k)^2 + 2k - 1$

頂點的坐標為 $(-2k,\ 2k-1)$。 1A

(c) P 的坐標為 $(-2k,\ 2k-1)$。

Q 的坐標為 $(2k,\ 1-2k)$。 1A

PQ 的中點的坐標為 $(0,\ 0)$。 1M

因此，O 為 QP 的中點。

OR 為 $\triangle PQR$ 的中線，且通過 G。

同意該宣稱。 1A

6. (a) $$\frac{\triangle BAD\text{ 的面積}}{\triangle CAD\text{ 的面積}} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(AB)(AD)\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}(AC)(AD)\sin\angle CAD} = \frac{BD}{DC}$$ 1M

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$ 1

(b) (i) $AC = \sqrt{(24k)^2 + (18k)^2} = 30k$

$$\begin{aligned}\frac{BD}{DC} &= \frac{AB}{AC} \\ &= \frac{15}{30k} \\ &= \frac{1}{2k}\end{aligned}$$ 1M

設 $(a,\ b)$ 為 D 的坐標。

$$\frac{a-0}{24k-a} = \frac{1}{2k} \quad \text{及} \quad \frac{15-b}{b-18k} = \frac{1}{2k}$$ 1M

$$a = \frac{24k}{2k+1} \qquad b = \frac{48k}{2k+1}$$

AD 的斜率 $= \dfrac{48k}{2k+1} \div \dfrac{24k}{2k+1} = 2$ 1

(ii) (1) I 的 x 坐標為 3。

由於 I 在直線 $y = 2x$ 上，I 的坐標為 $(3,\ 6)$。 1M

BI 的方程為

$$y - 15 = \frac{15-6}{0-3}(x-0)$$ 1M

$$y = -3x + 15$$

AC 的方程為

$$y - 0 = \frac{18k-0}{24k-0}(x-0)$$

$$y = \frac{3x}{4}$$

求解後，可得 $x = 4$ 及 $y = 3$。

所求坐標為 $(4,\ 3)$。 1A

(2) 將 AC 與 BI 的交點記為 E。

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BA}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{4^2+3^2}}{\sqrt{(24k-4)^2+(18k-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{(24k)^2+(18k-15)^2}}$$ 1M

$$(24k)^2 + (18k-15)^2 = 9[(24k-4)^2 + (18k-3)^2]$$

$$0 = 7200k^2 - 2160k$$

$$k = 0.3 \quad \text{或} \quad 0\text{（捨去）}$$

C 的坐標為 $(7.2,\ 5.4)$。

$AC^2 + BC^2 = (7.2^2 + 5.4^2) + (7.2^2 + (15-5.4)^2) = 225$

$AB^2 = 15^2 = 225 = AC^2 + BC^2$ 1M

因此，$\angle ACB = 90°$。

AB 為 $\triangle ABC$ 的外接圓的直徑。

同意該宣稱。 1A

7. (a) (i) $r^2 = \left(\dfrac{k-4}{-2}\right)^2 + \left(\dfrac{2+k}{-2}\right)^2 - (-3k-6)$ 1M

$= \dfrac{k^2}{2} + 2k + 11$ 1A

(ii) $r^2 = \dfrac{k^2}{2} + 2k + 11$

$= \dfrac{1}{2}(k^2 + 4k + 4) + 9$ 1M

$= \dfrac{1}{2}(k+2)^2 + 9$

$r = \sqrt{\dfrac{1}{2}(k+2)^2 + 9}$

當 $k = -2$ 時，r 的值最小。

所求方程為 $x^2 + y^2 - 6x = 0$。 1A

(b) L 的方程為 $y = mx + h$。 1A

$x^2 + (mx+h)^2 - 6x = 0$ 1M

$(1+m^2)x^2 + (2mh-6)x + h^2 = 0$

該方程只有一個實根。

$\Delta = (2mh-6)^2 - 4(1+m^2)h^2 = 0$ 1M

$-24mh - 4h^2 + 36 = 0$

$m = \dfrac{9-h^2}{6h}$ 1

(c) A 的坐標為 $(3,\ 0)$。

設 M 為 OA 的中點，則 $M\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$。

形心的坐標 $= \left(\dfrac{1(0) + 2\left(\frac{3}{2}\right)}{1+2},\ \dfrac{1(h)+2(0)}{1+2}\right)$ 1M

$= \left(1,\ \dfrac{h}{3}\right)$

形心在圓上。

$1^2 + \left(\dfrac{h}{3}\right)^2 - 6(1) = 0$ 1M

$h^2 = 45$

$h = \sqrt{45}$ 或 $-\sqrt{45}$（捨去）

PQ 的斜率 $= m$

$\dfrac{\sqrt{45}-0}{0-q} = \dfrac{9-(\sqrt{45})^2}{6(\sqrt{45})}$ 1M

$q = \dfrac{15}{2}$

$$\triangle OPQ \text{ 的面積} = \frac{(\sqrt{45})\left(\frac{15}{2}\right)}{2} \qquad \text{1M}$$

$$\approx 25.2$$

$$> 25$$

不同意該宣稱。 1A