

REG-2324-MOCK-SET 9-MATH-EP(M2)

建議題解

$$\begin{aligned}
 1. \quad f' \left(\frac{\pi}{2} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left(\frac{\pi}{2} + h \right) - f \left(\frac{\pi}{2} \right)}{h} & 1M \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\ln \left(\frac{\pi}{2} + h \right) \right] [\sin(\pi + 2h)] - \left(\ln \frac{\pi}{2} \right) (\sin \pi)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\ln \left(\frac{\pi}{2} + h \right) \right] (-\sin 2h)}{h} & 1M \\
 &= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \ln \left(\frac{\pi}{2} + h \right) & 1M \\
 &= -2(1) \ln \frac{\pi}{2} \\
 &= -2 \ln \frac{\pi}{2} & 1A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad (a) \quad C_2^n (3)^2 &= 252 & 1M \\
 \frac{n(n-1)}{2} &= 28 & 1A \\
 \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 28 &= 0 \\
 n &= 8 \quad \text{或} \quad -7 \quad (\text{捨去}) & 1A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad (1+3x)^n &= (3x)^8 + C_1^8 (3x)^7 + C_2^8 (3x)^6 + \dots & 1M \\
 &= 6561x^8 + 17496x^7 + 20412x^6 + \dots \\
 \left(1 - \frac{2}{x} \right)^5 &= 1 - 5 \left(\frac{2}{x} \right) + 10 \left(\frac{2}{x} \right)^2 + \dots \\
 &= 1 - \frac{10}{x} + \frac{40}{x^2} + \dots \\
 \text{所求係數} &= 1(20412) - 10(17496) + 40(6561) & 1M \\
 &= 107892 & 1A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad (a) \quad \sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta \\
 &= (\sin \theta + 7\theta) + (\sin 3\theta + \sin 5\theta) + (\cos \theta + \cos 7\theta) + (\cos 3\theta + \cos 5\theta) \\
 &= 2 \sin 4\theta \cos 3\theta + 2 \sin 4\theta \cos \theta + 2 \cos 4\theta \cos 3\theta + 2 \cos 4\theta \cos \theta & 1M \\
 &= 2 \sin 4\theta (\cos 3\theta + \cos \theta) + 2 \cos 4\theta (\cos 3\theta + \cos \theta) \\
 &= 2(\sin 4\theta + \cos 4\theta)(\cos 3\theta + \cos \theta) \\
 &= 2(\sin 4\theta + \cos 4\theta)(2 \cos 2\theta \cos \theta) & 1M \\
 &= 4 \cos \theta \cos 2\theta (\sin 4\theta + \cos 4\theta) & 1
 \end{aligned}$$

(b) 利用 (a) 的結果，

$$4 \cos \theta \cos 2\theta (\sin 4\theta + \cos 4\theta) = 0$$

可得 $\cos \theta = 0$ 或 $\cos 2\theta = 0$ 或 $\sin 4\theta + \cos 4\theta = 0$ 。

求解後，可得 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $4\theta = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ 。

因此， $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{16}$ 或 $\frac{7\pi}{16}$ 。

1A+1A

解	分
4. (a) 面積 $= \frac{1}{2}(u)(5e^{u+2})$ $= \frac{5}{2}ue^{u+2}$ (b) 設 A 單位為 $\triangle OPQ$ 的面積。 $A = \frac{5}{2}ue^{u+2}$ $\frac{dA}{dt} = \frac{5}{2}(e^{u+2} + ue^{u+2}) \frac{du}{dt}$ 當 $u = 5$ 及 $\frac{dA}{dt} = -15e^7$, $-15e^7 = \frac{5}{2}e^7(1 + 5) \frac{du}{dt}$ $\frac{du}{dt} = -1$ OQ 的變率為每秒 -1 單位。 $PQ = 5e^{u+2}$ $\frac{dPQ}{dt} = 5e^{u+2} \frac{du}{dt}$ 當 $u = 5$ 及 $\frac{du}{dt} = -1$, $\frac{dPQ}{dt} = 5e^{5+2}(-1)$ $= -5e^7$ PQ 的變率為每秒 $-5e^7$ 單位。	1A 1M 1M 1A 1A

解	分
5. (a) 當 $n = 1$, 左式 $= 1(3^1) = 3$ 及右式 $= \frac{1}{4}[3 + (2 - 1)3^2] = 3 =$ 左式 對 $n = 1$, 命題為真。 假設 $\sum_{k=1}^p k(3^k) = \frac{1}{4}[3 + (2p - 1)3^{p+1}]$, 其中 $p \in \mathbb{Z}^+$ 。 $\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p+1} k(3^k) &= \sum_{k=1}^p k(3^k) + (p + 1)(3^{p+1}) \\ &= \frac{1}{4}[3 + (2p - 1)3^{p+1}] + (p + 1)(3^{p+1}) \\ &= \frac{1}{4}[3 + 3^{p+1}[(2p - 1) + 4(p + 1)]] \\ &= \frac{1}{4}[3 + (2p + 1)3^{p+2}]\end{aligned}$ 對 $n = p + 1$, 命題為真。 藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。 (b) $2(3) + 3(3^2) + 4(3^3) + \dots + 51(3^{50})$ $\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{50} (k + 1)(3^k) \\ &= \sum_{k=1}^{50} k(3^k) + \sum_{k=1}^{50} 3^k \\ &= \frac{1}{4}[3 + (2 \times 50 - 1)3^{50+1}] + \frac{3(3^{50} - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{99}{4}(3^{51}) + \frac{3^{51}}{2} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{101}{4}(3^{51}) - \frac{3}{4}\end{aligned}$	1 1 1M 1 1M 1A 1A

解	分
6. (a) 設 $u = x^2 + 5$ 。則 $du = 2x \, dx$ 。	1M
$ \begin{aligned} g(x) &= \int \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 5}} \, dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= 3u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 3(x^2 + 5)^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned} $	1M
G 通過點 $\left(\frac{1}{4}, \frac{31}{4}\right)$ 。	
$ \begin{aligned} \frac{31}{4} &= 3 \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5 \right]^{\frac{1}{2}} + C \\ C &= 1 \end{aligned} $	1M
所求方程為 $y = 3(x^2 + 5)^{\frac{1}{2}} + 1$ 。	1A
(b) (i) 設 P 的坐標為 (a, b) 。	
$\frac{b-4}{a+1} = \frac{3a}{\sqrt{a^2+5}}$	1M
$\sqrt{a^2+5} \left[(3\sqrt{a^2+5} + 1) - 4 \right] = 3a^2 + 3a$	1M
$3(a^2 + 5) - 3\sqrt{a^2 + 5} = 3a^2 + 3a$	
$-3\sqrt{a^2 + 5} = 3a - 15$	
$9(a^2 + 5) = 9a^2 - 90a + 225$	
$0 = -90a + 180$	
$a = 2$	
所求坐標為 $(2, 10)$ 。	1A
(ii) 所求方程為	
$\frac{y-10}{x-2} = \frac{3(2)}{\sqrt{2^2+5}}$	1M
$2x - y + 6 = 0$	1A

解	分
7. (a) $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx$ $= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2 \int dx$ $= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + \text{常數}$	1M 1M 1A
(b) 留意 $y = \ln(1+x)$ 及 $y = \ln 2x$ 的圖像的 x 截距分別為 0 及 $\frac{1}{2}$。 $\ln(1+x) = \ln 2x$ $1+x = 2x$ $x = 1$	1A
設 $u = x + 1$ 及 $w = 2x$。則 $du = dx$ 及 $dw = 2 dx$。 體積 $= \pi \int_0^1 [\ln(1+x)]^2 dx - \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (\ln 2x)^2 dx$ $= \pi \int_1^2 (\ln u)^2 du - \frac{1}{2} \pi \int_1^2 (\ln w)^2 dw$ $= \frac{\pi}{2} \int_1^2 (\ln u)^2 du$ $= \frac{\pi}{2} \left[u(\ln u)^2 - 2u \ln u + 2u \right]_1^2$ $= \pi [(\ln 2)^2 - 2 \ln 2 + 1]$	1M 1M 1A

解	分
8. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a+2b & 2+2c \\ -a & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & 2a \\ b-c & 2b \end{pmatrix}$ 可得 $a+2b = a-2$、$2+2c = 2a$、$-a = b-c$ 及 $-2 = 2b$。 求解後，可得 $b = -1$ 及 $c = a-1$。 因此，$B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & a-1 \end{pmatrix}$。 (b) $\det B = a(a-1) + 2$ $= a^2 - a + 2$ $= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ $\geq \frac{7}{4}$ > 0 因此，B 不能為奇異矩陣。 (c) $B^{-1} = \frac{1}{a^2 - a + 2} \begin{pmatrix} a-1 & -2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$ $= \frac{1}{a^2 - a + 2} \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ -2 & a \end{pmatrix}$	1M 1A 1M 1 1M 1A

Dexter Mathematics @ Beacon College

解	分
$q(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{4 - (-x)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = q(x)$ 因此，$q(x)$ 為偶函數。 利用 (b) 的結果， $\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{x(8 - x^2)}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \ln(e^x + 1) \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{e + 1}{e^{-1} + 1} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{e + 1}{e^{-1}(1 + e)} - \left[2 \sin^{-1} \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$	1M 1M 1A

10. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。

1A

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2(x+5)}{(x-1)^2} \\ &= x+7 + \frac{13x-7}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

1M

斜漸近線為 $y = x + 7$ 。

1A

(b) $f(x) = x + 7 + \frac{13x-7}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = 1 + \frac{13(x-1)^2 - (13x-7)(2)(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= 1 + \frac{-13x+1}{(x-1)^3}$$

1A

$$f''(x) = \frac{-13(x-1)^3 - (-13x+1)(3)(x-1)^2}{(x-1)^6}$$

$$= \frac{2(13x+5)}{(x-1)^4}$$

1A

(c) 留意 $f'(x) = \frac{x(x-5)(x+2)}{(x-1)^3}$ 。

當 $f'(x) = 0$ ， $x = 5$ 或 0 或 -2 。

1A

x	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 5$	$x > 5$
$f'(x)$	+	-	+	-	+

1M

極大點為 $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$ 。

1A

(d) 當 $f''(x) = 0$ ， $x = -\frac{5}{13}$ 。

x	$x < -\frac{5}{13}$	$-\frac{5}{13} < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	+	+

1M

G 在 $x = -\frac{5}{13}$ 時有一拐點。

不同意該宣稱。

1A

(e) 設 $u = x - 1$ 。則 $du = dx$ 。

$$\text{Area} = \int_{-5}^0 f(x) dx$$

1M

$$= \int_{-5}^0 \left(x + 7 + \frac{13x-7}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 7x \right]_{-5}^0 + \int_{-6}^{-1} \frac{13(u+1)-7}{u^2} du$$

$$= \frac{45}{2} + \int_{-6}^{-1} (13u^{-1} + 6u^{-2}) du$$

$$= \frac{45}{2} + \left[13 \ln |u| - 6u^{-1} \right]_{-6}^{-1}$$

1M

$$= \frac{55}{2} - 13 \ln 6$$

1A

11. (a) $\overrightarrow{AB} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

$\overrightarrow{AC} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & 2 & -10 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 54\mathbf{i} - 54\mathbf{j} + 27\mathbf{k}$$

一所有求向量 = $\frac{1}{\sqrt{54^2 + 54^2 + 27^2}}(54\mathbf{i} - 54\mathbf{j} + 27\mathbf{k})$

$$= \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

(b) (i) $\overrightarrow{DA} = -7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

設 $\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$ 使得 $\mathbf{n}$ 垂直於 Π 。

$$\overrightarrow{DE} = \left(\frac{\overrightarrow{DA} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \right) \mathbf{n}$$

$$= \frac{-\frac{14}{3} - \frac{8}{3} - \frac{5}{3}}{1} \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k} \right)$$

$$= -6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DA}$$

$$= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

(ii) $\overrightarrow{BC} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \lambda(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - (7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 10\mathbf{k})$$

$$= (\lambda - 7)\mathbf{i} + (2\lambda - 2)\mathbf{j} + (2\lambda + 10)\mathbf{k}$$

留意 B 、 C 、 F 共線。

$$\frac{\lambda - 7}{-3} = \frac{2\lambda - 2}{3} = \frac{2\lambda + 10}{12}$$

求解後，可得 $\lambda = 3$ 。

(iii) 所求之角為 $\angle DFE$ 。

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$EF = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$$

$$DE = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = 9$$

$$\tan \theta = \frac{DE}{EF}$$

$$= \frac{3}{2}$$

1M

1M

1A

1M

1M

1A

1M

1M

1A

1M

1M

1A

解		分
12. (a) (i) (1)	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & h \\ 1 & 3 & -1 \\ h & 7 & 1 \end{vmatrix}$ $= -3h^2 + 9h + 12$ $= -3(h+1)(h-4)$ 由於 (E) 有唯一解，可得 $\Delta \neq 0$。 因此，$h \neq -1$ 及 $h \neq 4$。	1A
(2)	$x = \frac{\begin{vmatrix} 16 & -2 & h \\ k & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-3(h+1)(h-4)}$ $= \frac{-7hk + 12h - 2k - 168}{3(h+1)(h-4)}$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 & h \\ 1 & k & -1 \\ h & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-3(h+1)(h-4)}$ $= \frac{hk - k + 12}{3(h-4)}$ $z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 16 \\ 1 & 3 & k \\ h & 7 & 4 \end{vmatrix}}{-3(h+1)(h-4)}$	1M 1A
(ii) (1)	當 $h = 4$，(E) 的增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 4 & 7 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -5 & k-16 \\ 0 & 15 & -15 & -60 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -5 & k-16 \\ 0 & 0 & 0 & -12-3k \end{array} \right)$ 由於 (E) 有解，可得 $-12 - 3k = 0$。 因此，$k = -4$。	1M 1
(2)	當 $h = 4$ 及 $k = -4$，(E) 的增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ 解集為 $\{(8 - 2t, t - 4, t) : t \in \mathbb{R}\}$。	1A
(b)	當 $h = 4$ 及 $k = -4$，首三方程的解集為 $\{(8 - 2t, t - 4, t) : t \in \mathbb{R}\}$。 $x^2 + y^2 - 5z^2 = 0$ $(8 - 2t)^2 + (t - 4)^2 - 5t^2 = 0$ $80 - 40t = 0$ $t = 2$ 因此，(F) 在 $h = 4$ 時有解。	1M

解	分
當 $h = -1$ 及 $k = -4$，首三方程的增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 1 & 16 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 7 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 1 & 16 \\ 0 & 5 & 0 & -20 \\ 0 & 5 & 0 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{array}\right)$ 該方程組在 $h = -1$ 時無解。 當 $h \neq -1$ 及 $h \neq -4$ 及 $k = -4$， 可得 $x = \frac{40}{3(h+1)}$，$y = \frac{-4}{3}$ 及 $z = \frac{40}{3(h+1)}$。 $x^2 + y^2 - 5z^2 = 0$ $\left[\frac{40}{3(h+1)}\right]^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2 - 5\left[\frac{40}{3(h+1)}\right]^2 = 0$ $\frac{16}{9} = 4\left[\frac{40}{3(h+1)}\right]^2$ $(h+1)^2 = 400$ $h = 19 \quad \text{或} \quad -21$ (F) 在 $h = 19$ 或 $h = -21$ 時有解。 因此，(F) 在 $h = -21$ 或 4 或 19 時有解。 同意該宣稱。	1M 1M 1A