

REG-2324-MOCK-SET 8-MATH-EP(M2)

建議題解

$$\begin{aligned}
 1. \quad f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} & 1M \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3+h}{\sqrt{1-h}} - 3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+h-3\sqrt{1-h}}{h\sqrt{1-h}} \times \frac{3+h+3\sqrt{1-h}}{3+h+3\sqrt{1-h}} & 1M \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9(1-h)}{h\sqrt{1-h}(3+h+3\sqrt{1-h})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15h + h^2}{h\sqrt{1-h}(3+h+3\sqrt{1-h})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15+h}{\sqrt{1-h}(3+h+3\sqrt{1-h})} & 1M \\
 &= \frac{15}{3+3} \\
 &= \frac{5}{2} & 1A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad &\left(2x^2 + \frac{1}{kx}\right)^8 - (x+2)^8 \\
 &= \sum_{r=0}^8 C_r^8 (2x^2)^{8-r} \left(\frac{1}{kx}\right)^r - \sum_{p=0}^8 C_p^8 2^{8-p} x^p & 1M \\
 &= \sum_{r=0}^8 C_r^8 2^{8-r} k^{-r} x^{16-3r} - \sum_{p=0}^8 C_p^8 2^{8-p} x^p \\
 &\text{代 } 16-3r=7, \text{ 可得 } r=3. \\
 &208 = C_3^8 2^5 k^{-3} - C_7^8 2^{8-7} & 1M \\
 &208 = \frac{1792}{k^3} - 16 \\
 &k = 2 & 1A
 \end{aligned}$$

解	分
3. 當 $n = 1$, 左式 = $\frac{1}{(1+1)(1+3)} = \frac{1}{8}$ 右式 = $\frac{1(5+13)}{12(1+2)(1+3)} = \frac{1}{8} = \text{左式}$ 對 $n = 1$, 命題為真。 假設 $\sum_{r=1}^p \frac{1}{(r+1)(r+3)} = \frac{p(5p+13)}{12(p+2)(p+3)}$, 其中 $p \in \mathbf{Z}^+$ 。 $\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{p+1} \frac{1}{(r+1)(r+3)} \\ &= \sum_{r=1}^p \frac{1}{(r+1)(r+3)} + \frac{1}{(p+2)(p+4)} \\ &= \frac{p(5p+13)}{12(p+2)(p+3)} + \frac{1}{(p+2)(p+4)} \\ &= \frac{p(5p+13)(p+4) + 12(p+3)}{12(p+2)(p+3)(p+4)} \\ &= \frac{5p^3 + 33p^2 + 64p + 36}{12(p+2)(p+3)(p+4)} \\ &= \frac{(p+1)(5p+18)(p+2)}{12(p+2)(p+3)(p+4)} \\ &= \frac{(p+1)(5p+18)}{12(p+3)(p+4)} \end{aligned}$ 對 $n = p + 1$, 命題為真。 藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbf{Z}^+$, 命題為真。	1 1 1M 1A 1
4. (a) $\tan(\alpha + \beta)(\tan \alpha + \tan \beta) + 2 = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}(\tan \alpha + \tan \beta) + 2$ $\begin{aligned} &= \frac{(\tan \alpha + \tan \beta)^2 + 2(1 - \tan \alpha \tan \beta)}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{(\tan^2 \alpha + 1) + (\tan^2 \beta + 1)}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\sec^2 \alpha + \sec^2 \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$ (b) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\left(\tan \theta + \tan \frac{\pi}{4}\right) = -8$ $\begin{aligned} \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\left(\tan \theta + \tan \frac{\pi}{4}\right) + 2 &= -6 \\ \frac{\sec^2 \theta + \sec^2 \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \theta \tan \frac{\pi}{4}} &= -6 \\ \sec^2 \theta + 2 &= -6 + 6 \tan \theta \\ (\tan^2 \theta + 1) + 2 &= -6 + 6 \tan \theta \\ \tan^2 \theta - 6 \tan \theta + 9 &= 0 \\ \tan \theta &= 3 \\ \theta &\approx 1.25 \quad \text{或} \quad 4.39 \end{aligned}$	1M 1 1M 1A 1A

解	分
7. (a) $\int x^2 e^{-kx} \, dx = -\frac{1}{k}x^2 e^{-kx} + \frac{2}{k} \int x e^{-kx} \, dx$ $= -\frac{1}{k}x^2 e^{-kx} - \frac{2}{k^2}x e^{-kx} + \frac{2}{k^2} \int e^{-kx} \, dx$ $= -\frac{1}{k}x^2 e^{-kx} - \frac{2}{k^2}x e^{-kx} - \frac{2}{k^3}e^{-kx} + \text{常數}$	1M 1A 1A
(b) 體積 $= \pi \int_1^3 (xe^{-2x})^2 \, dx$ $= \pi \int_1^3 x^2 e^{-4x} \, dx$ $= \pi \left[-\frac{1}{4}x^2 e^{-4x} - \frac{2}{4^2}x e^{-4x} - \frac{2}{4^3}e^{-4x} \right]_1^3$ $= \pi \left(\frac{13}{32}e^{-4} - \frac{85}{32}e^{-12} \right)$	1M 1M 1A

8. (a) P 在曲線 C 上。可得 $u^2 - \frac{v^2}{4} = 1$ 。

$$OP = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$= \sqrt{u^2 + 4(u^2 - 1)}$$

$$= \sqrt{5u^2 - 4}$$

$$\frac{dOP}{dt} = \frac{1}{2}(5u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}}(10u)\frac{du}{dt}$$

$$= \frac{5u}{\sqrt{5u^2 - 4}} \frac{du}{dt}$$

當 $u = 5$ 及 $\frac{dOP}{dt} = -3$ ，

$$-3 = \frac{5(5)}{\sqrt{5(5)^2 - 4}} \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{33}{25}$$

所求變率為 $-\frac{33}{25}/s$ 。

- (b) 設 A 為 $\triangle OPQ$ 的面積。

$$A = \frac{1}{2}u(2\sqrt{u^2 - 1})$$

$$= u\sqrt{u^2 - 1}$$

$$\frac{dA}{dt} = \left[\sqrt{u^2 - 1} + \frac{1}{2}u(u^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(2u) \right] \frac{du}{dt}$$

$$= \left[\sqrt{u^2 - 1} + \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 1}} \right] \frac{du}{dt}$$

當 $u = 5$ 及 $\frac{du}{dt} = -\frac{33}{25}$ ，

$$\frac{dA}{dt} = \left[\sqrt{5^2 - 1} + \frac{5^2}{\sqrt{5^2 - 1}} \right] \left(-\frac{33}{25} \right)$$

$$= -\frac{1617\sqrt{6}}{300}$$

所求變率為 $-\frac{1617\sqrt{6}}{300}/s$ 。

1M

1M

1A

1M

1M

1A

解	分								
9. (a) $f(x) = -x(x - p)^2 + qx^2$ $= -x^3 + (2p + q)x^2 - p^2x$ $f'(x) = -3x^2 + 2(2p + q)x - p^2$ $f'(1) = 0 = -3(-1)^2 + 2(2p + q)(-1) - p^2$ $0 = p^2 + 4p + 2q + 3$ $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 = -3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2(2p + q)\left(-\frac{1}{3}\right) - p^2$ $0 = 3p^2 + 4p + 2q + 1$ 求解後，可得 $0 = (3p^2 + 4p + 2q + 1) - (p^2 + 4p + 2q + 3)$ $0 = 2p^2 - 2$ $p = \pm 1$ 可得 $(p, q) = (1, -4)$ 或 $(-1, 0)$。 (b) 可得 $p = 1, q = -4$ 及 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - x$。 當 $f'(x) = 0$，$x = -1$ 或 $-\frac{1}{3}$。 <table><tr><td>x</td><td>$x < -1$</td><td>$-1 < x < -\frac{1}{3}$</td><td>$x > -\frac{1}{3}$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr></table> 極大點為 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$。 極小點為 $(-1, 0)$。	x	$x < -1$	$-1 < x < -\frac{1}{3}$	$x > -\frac{1}{3}$	$f'(x)$	-	+	-	1A 1M 1M 1A+1A 1M 1A 1A
x	$x < -1$	$-1 < x < -\frac{1}{3}$	$x > -\frac{1}{3}$						
$f'(x)$	-	+	-						

$$10. \quad (a) \quad (i) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 2a+7 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -a^2 + 5a - 4$$

$$= -(a-1)(a-4)$$

(E) 有唯一解。可得 $\Delta \neq 0$ 。

因此， $a \neq 1$ 及 $a \neq 4$ 。

當 $a \neq 1$ 及 $a \neq 4$ ，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -a \\ b & 2a+7 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-(a-1)(a-4)}$$

$$= \frac{3ab - 4a - 2b + 1}{(a-1)(a-4)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & b & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-(a-1)(a-4)}$$

$$= \frac{-ab + 2a + 2b - 5}{(a-1)(a-4)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2a+7 & b \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-(a-1)(a-4)}$$

$$= \frac{a + 2b - 7}{(a-1)(a-4)}$$

(ii) (E) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 9 & -5 & b \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & b+1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} - \frac{b}{4} \end{array} \right)$$

由於 (E) 有解，可得 $b = 3$ 。

(E) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

解集為 $\left\{ \left(\frac{t-3}{2}, \frac{1+t}{2}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ 。

(b) (F) 的首三條方程等價於 (E)，其中 $a = 1$ 及 $b = 3$ 。

(F) 的首三條方程的解集為 $\left\{ \left(\frac{t-3}{2}, \frac{1+t}{2}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ 。

$$7 \left(\frac{t-3}{2} \right) - \lambda \left(\frac{1+t}{2} \right) - \mu t = -4\lambda$$

$$(7 - \lambda - 2\mu)t + (-21 + 7\lambda) = 0$$

1A

1M

1A

1M

1A

1A

1A

1A

1A

1M

1M

解	分
若 (F) 有無限多個解， $\begin{cases} 7 - \lambda - 2\mu = 0 \\ -21 + 7\lambda = 0 \end{cases}$ 求解後，可得 $\lambda = 3$ 及 $\mu = 2$。	1M 1A

11. (a) 設 $u = \frac{\pi}{3} - x$ 。則 $du = -dx$ 。

1M

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \right] dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{12}} \ln(\cos u) du$$

$$= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u) du$$

1M

$$= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$$

1

(b)
$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \right] dx = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right) dx = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$$

1M

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) dx = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{\cos x + \sqrt{3} \sin x}{2} \right) dx - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx = 0$$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\cos x + \sqrt{3} \sin x}{\cos x} dx = \ln 2 \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} dx$$

1M

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \sqrt{3} \tan x) dx = \ln 2 \left[x \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \sqrt{3} \tan x) dx = \frac{\pi \ln 2}{6}$$

1A

(c) (i) $\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}}$$

1M

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

1

(ii) 留意 $\frac{d}{dx} [\ln(1 + \sqrt{3} \tan x)] = \frac{\sqrt{3} \sec^2 x}{1 + \sqrt{3} \tan x}$ 。

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sec^2 x}{1 + \sqrt{3} \tan x} dx \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{3}} x \ln(1 + \sqrt{3} \tan x) \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \sqrt{3} \tan x) dx \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \ln\left(1 + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \ln\left(1 + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi \ln 2}{6\sqrt{3}} \\
&= \frac{3\sqrt{3}\pi}{36} \ln(1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}\pi}{36} \ln[1 + \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})] - \frac{2\sqrt{3}\pi \ln 2}{36} \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{36} \ln \left[\frac{(1 + \sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3} - 2)(2^2)} \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{36} \ln \frac{(1 + \sqrt{3})^4}{8(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{36} \ln \frac{1 + 4\sqrt{3} + 6(3) + 4(3\sqrt{3}) + 9}{8(3 - 1)} \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{36} \ln \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

1M

1M

1M

1

解	分
12. (a) $0 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 及 $0 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ $0 = \lambda(1) + 1(2) + \mu(-1) \quad 0 = (\lambda)(-3) + 1(0) + \mu(1)$ $0 = \lambda - \mu + 2 \quad 0 = -3\lambda + \mu$ 求解後，可得 $\lambda = 1$ 及 $\mu = 3$。	1M 1A+1A
(b) (i) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{AC} = -4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$。 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $= -6\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	1A
(ii) 設 $\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$。 設 E 為平面 ABC 上的一點使得 OE 垂直於平面 ABC。 $\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}(\mathbf{n})$ $= \frac{11}{77}(-3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ $= -\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{8}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k}$ 所求距離 = OE	1M
$= \sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{8}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2}$ $= \sqrt{\frac{11}{7}}$	1M 1A
(iii) $\sin \theta = \frac{OE}{OA}$ $= \frac{\sqrt{\frac{11}{7}}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2}}$ $\theta = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{7}}$	1M 1A
(c) D 與 (b) 中的 E 為同一點，且 $\theta = \angle OAD$。 設 F 為 BC 的中點。 $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $= -2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AF} = (AO)(AF) \cos \angle OAF$	1A 1M
$(-1)(-2) + 0 + (-3)(-3) = \sqrt{11}\sqrt{13} \cos \angle OAF$ $\cos \angle OAF = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{13}}$ $\sin \angle OAF = \frac{\sqrt{13-11}}{\sqrt{13}}$ $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} \neq \frac{1}{\sqrt{7}}$	
可得 $\angle OAF \neq \angle OAD$。由此，$A$、$D$、$F$ 不共線。 不同意該宣稱。	1A

解	分
13. (a) $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$ $\text{tr}(M) + (\det M)I = (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$ 因此，$M^2 = \text{tr}(M) + (\det M)I$。	1M
(b) $MN = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$ $NM = \begin{pmatrix} ae + cf & be + df \\ ag + ch & bg + dh \end{pmatrix}$ $\text{tr}(MN) = ae + bg + cf + dh$ $\text{tr}(NM) = ae + cf + bg + dh = \text{tr}(MN)$	1 1M 1
(c) (i) $\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr}[B(AB^{-1})]$ $= \text{tr}[(AB^{-1})B]$ $= \text{tr}(A)$ $\text{tr}(A) = \text{tr} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1$ $\det(BAB^{-1}) = -2$ $(\det B)(\det A)(\det B^{-1}) = -2$ $[\det(BB^{-1})](\det A) = -2$ $\det A = -2$	1M 1A 1M 1A
(ii) 當 $n = 1$， $\text{右式} = \frac{(-1)^2 + 2}{3}A + \frac{(-1) \cdot 2 + 2}{3}I = A = \text{左式}$ 對 $n = 1$，命題為真。 假設 $A^k = \frac{(-1)^{k+1} + 2^k}{3}A + \frac{(-1)^k \cdot 2 + 2^k}{3}I$，其中 $k \in \mathbb{Z}^+$。	1 1
$A^{k+1} = A^k A$ $= \left[\frac{(-1)^{k+1} + 2^k}{3}A + \frac{(-1)^k \cdot 2 + 2^k}{3}I \right] A$ $= \frac{(-1)^{k+1} + 2^k}{3}(A + 2I) + \frac{(-1)^k \cdot 2 + 2^k}{3}A$ $= \frac{[(-1)^{k+1} + 2^k] + (-1)^k \cdot 2 + 2^k}{3}A + \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2 + 2^{k+1}}{3}I$ $= \frac{(-1)^{k+1}(1 - 2) + 2 \cdot 2^k}{3}A + \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2 + 2^{k+1}}{3}I$ $= \frac{(-1)^{k+2} + 2^{k+1}}{3}A + \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2 + 2^{k+1}}{3}I$	1M 1M 1
對 $n = k + 1$，命題為真。 藉數學歸納法，$\forall n \in \mathbb{Z}^+$，命題為真。	1