

REG-2324-MOCK-SET 11-MATH-EP(M2)

建議題解

$$\begin{aligned}
 1. f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)^4 - \ln 1}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \ln(1+h)^4 \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left[(1+h)^{\frac{1}{h}} \right]^4 \\
 &= \ln e^4 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

1M

1M

1M

1A

$$\begin{aligned}
 2. \quad (a) \quad (1-2x)^n(2+3x)^2 \\
 &= [1 + C_1^n(-2x) + C_2^n(-2x)^2 + \dots] (4 + 12x + 9x^2) \\
 &= [1 - 2nx + 2n(n-1)x^2 + \dots] (4 + 12x + 9x^2)
 \end{aligned}$$

考慮 x^2 的係數。

1M

$$(1)(9) + (-2n)(12) + 2n(n-1)(4) = 49$$

1M+1A

$$8n^2 - 32n - 40 = 0$$

$$n = 5 \quad \text{或} \quad -1 \quad (\text{捨去})$$

1A

$$(b) \quad (1-2x)^2(2+3x)^2 = (1-10x+40x^2+\dots)(4+12x+9x^2)。$$

所求係數

$$= (1)(12) + (-10)(4)$$

$$= -28$$

1A

解	分
3. (a) $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \theta)}{2\sin \theta \cos \theta}$ $= \frac{2\sin^2 \theta}{2\sin \theta \cos \theta}$ $= \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $= \tan \theta$ (b) $\sqrt{3} \cos 4x - \sqrt{3} \cos 4x \cos 8x = \sin 8x - \sin 8x \cos 4x$ $\sqrt{3} \cos 4x (1 - \cos 8x) = \sin 8x - \sin 8x \cos 4x$ $\sqrt{3} \cos 4x \tan 4x \sin 8x = \sin 8x (1 - \cos 4x)$ $\sin 8x (\sqrt{3} \sin 4x - 1 + \cos 4x) = 0$ $\sin 8x = 0 \quad \text{or} \quad \sqrt{3} \sin 4x - 1 + \cos 4x = 0$ $8x = 5\pi \text{ 或 } 6\pi \text{ 或 } 7\pi$ $x = \frac{5\pi}{8} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} \text{ 或 } \frac{7\pi}{8}$ $\sqrt{3} = \frac{1 - \cos 4x}{\sin 4x}$ $\tan 2x = \sqrt{3}$ $2x = \frac{4\pi}{3}$ $x = \frac{2\pi}{3}$ 因此，$x = \frac{5\pi}{8} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} \text{ 或 } \frac{7\pi}{8}$。	1M 1 1M 1M 1A+1A
4. (a) $\int (4 + k\sqrt{t})^2 dt = \int (16 + 8k\sqrt{t} + k^2 t) dt$ $= 16t + \frac{16kt^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{k^2 t^2}{2} + \text{常數}$ (b) 可得 $\Gamma: x = 4 \pm \sqrt{y}$。 體積 = $\pi \int_0^{16} (4 + \sqrt{y})^2 dy - \pi \int_0^{16} (4 - \sqrt{y})^2 dy$ $= \pi \left[16y + \frac{16y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_0^{16} - \pi \left[16y - \frac{16y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_0^{16}$ $= \frac{2048\pi}{3}$	1M 1A 1M 1M+1A 1M 1A

解	分
5. 設 (a, b) 為切點。 $4x + y^2 = 16$ $4 + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{y}$ 該切線通過 (a, b) 及 $(6, 0)$。 $\frac{b - 0}{a - 6} = -\frac{2}{b}$ $b^2 = 12 - 2a$ $(16 - 4a) = 12 - 2a$ $a = 2$ 切點為 $(2, 2\sqrt{2})$ 及 $(2, -2\sqrt{2})$。 C 在 $(2, 2\sqrt{2})$ 的切線的方程為 $\frac{y - 2\sqrt{2}}{x - 2} = -\frac{2}{2\sqrt{2}}$ $x + \sqrt{2}y - 6 = 0$ C 在 $(2, -2\sqrt{2})$ 的切線的方程為 $\frac{y + 2\sqrt{2}}{x - 2} = -\frac{2}{-2\sqrt{2}}$ $x - \sqrt{2}y - 6 = 0$	1M 1M 1M 1A 1M 1A 1A

6. (a) $y = \int x \ln x^4 dx$

$$= 4 \int x \ln x dx$$

$$= 2x^2 \ln x - 2 \int x dx$$

$$= 2x^2 \ln x - x^2 + C$$

Γ 通過點 $P(e^2, 3e^4 + 7)$ 。

$$3e^4 + 7 = 2(e^2)^2 \ln e^2 - (e^2)^2 + C$$

$$C = 7$$

所求方程為 $y = 2x^2 \ln x - x^2 + 7$ 。

(b) $f'(x) = 4x \ln x$

$$f''(x) = 4(\ln x + 1)$$

當 $f''(x) = 0$ 時， $x = \frac{1}{e}$ 。

x	$0 < x < \frac{1}{e}$	$x > \frac{1}{e}$
$f''(x)$	-	+

Γ 的拐點為 $\left(\frac{1}{e}, -3e^{-2} + 7\right)$ 。

1M

1A

1M

1A

1A

1M

1A

解	分
7. (a) $\int \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$ $= x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \int \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(2x)\right) dx$ $= x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \int \frac{x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$ $= x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$ 設 $u = x^2 - 1$。則 $du = 2x dx$。 $\int \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$ $= x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du$ $= x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - u^{\frac{1}{2}} + \text{常數}$ $= x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1} + \text{常數}$ (b) $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0$ $x + \sqrt{x^2 - 1} = 1$ $x^2 - 1 = (1 - x)^2$ $x = 1$ 所求面積 $= \int_1^{\frac{e+e^{-1}}{2}} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$ $= \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1} \right]_1^{\frac{e+e^{-1}}{2}}$ $= \frac{1}{e}$	1M+1M 1M 1A 1M 1M 1A

解	分
8. (a) 當 $n = 1$, $\text{左式} = \frac{1}{(2+2)(2+3)} + \frac{1}{(3+2)(3+3)} = \frac{1}{12}$ $\text{右式} = \frac{1}{6(1+1)} = \frac{1}{12} = \text{左式}$ 對 $n = 1$, 命題為真。 假設 $\sum_{k=2p}^{3p} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{6(p+1)}$, 其中 $p \in \mathbb{Z}^+$ 。 $\begin{aligned} & \sum_{k=2p+2}^{3p+3} \frac{1}{(k+2)(k+3)} \\ &= \sum_{k=2p}^{3p} \frac{1}{(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(2p+2)(2p+3)} - \frac{1}{(2p+3)(2p+4)} + \frac{1}{(3p+3)(3p+4)} \\ & \quad + \frac{1}{(3p+4)(3p+5)} + \frac{1}{(3p+5)(3p+6)} \\ &= \frac{1}{6(p+1)} - \frac{1}{(2p+2)(2p+3)} - \frac{1}{(2p+3)(2p+4)} + \frac{1}{(3p+3)(3p+4)} \\ & \quad + \frac{1}{(3p+4)(3p+5)} + \frac{1}{(3p+5)(3p+6)} \\ &= \frac{1}{6(p+1)} - \left(\frac{1}{2p+2} - \frac{1}{2p+3} \right) - \left(\frac{1}{2p+3} - \frac{1}{2p+4} \right) + \left(\frac{1}{3p+3} - \frac{1}{3p+4} \right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{3p+4} - \frac{1}{3p+5} \right) + \left(\frac{1}{3p+5} - \frac{1}{3p+6} \right) \\ &= \frac{1}{6(p+1)} - \frac{1}{2p+2} + \frac{1}{2p+4} + \frac{1}{3p+3} - \frac{1}{3p+6} \\ &= \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{p+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6(p+2)} \end{aligned}$ 對 $n = p + 1$, 命題為真。 藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。 (b) $\sum_{k=40}^{90} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$ $\begin{aligned} &= \sum_{k=40}^{60} \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \sum_{k=60}^{90} \frac{1}{(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(62)(63)} \\ &= \frac{1}{6(20+1)} + \frac{1}{6(30+1)} - \frac{1}{3906} \\ &= \frac{17}{1302} \end{aligned}$	1 1 1M 1M 1 1M 1A

解	分
9. (a) $PQ = \sqrt{u^2 + 64} + \sqrt{(u-9)^2 + 16}$	1M
$\frac{dPQ}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 64}} + \frac{u-9}{\sqrt{(u-9)^2 + 16}}$	1M
$= \frac{u\sqrt{(u-9)^2 + 16} + (u-9)\sqrt{u^2 + 64}}{\sqrt{u^2 + 64}\sqrt{(u-9)^2 + 16}}$	
$= \frac{u^2[(u-9)^2 + 16] - (u-9)^2(u^2 + 64)}{\sqrt{u^2 + 64}\sqrt{(u-9)^2 + 16}(u\sqrt{(u-9)^2 + 16} - (u-9)\sqrt{u^2 + 64})}$	
$= \frac{-48(u-6)(u-18)}{\sqrt{u^2 + 64}\sqrt{(u-9)^2 + 16}(u\sqrt{(u-9)^2 + 16} - (u-9)\sqrt{u^2 + 64})}$	
對 $\frac{dPQ}{du} = 0$ ，可得 $u = 6$ 。	1M
因此，可得 $a = 6$ 。	1A
(b) (i) 設 A 平方單位為長方形 $PQSR$ 的面積。	
$A = uPQ$	1M
$\frac{dA}{du} = PQ + u\frac{dPQ}{du}$	1M
當 $u = 6$ ，	
$\frac{dA}{du} = \sqrt{6^2 + 64} + \sqrt{(6-9)^2 + 16} + 6(0)$	
$= 10 \neq 0$	1M
由此，當 $u = 6$ 時， A 不達至其極小值。	
不同意該宣稱。	1A
(ii) $OP = \sqrt{u^2 + (u^2 + 64)}$	
$= \sqrt{2u^2 + 64}$	
$\frac{dOP}{dt} = \frac{2u}{\sqrt{2u^2 + 64}} \frac{du}{dt}$	1M
當 $u = 6$ 時，	
$12 = \frac{2(6)}{\sqrt{2(6)^2 + 64}} \left(\frac{du}{dt} \Big _{u=6} \right)$	1M
$\frac{du}{dt} \Big _{u=6} = 2\sqrt{34}$	
設 w 單位為長方形 $PQSR$ 的周界。	
$w = 2(u + PQ)$	
$\frac{dw}{dt} = 2\frac{du}{dt} + 2\frac{dPQ}{du} \cdot \frac{du}{dt}$	1M
當 $u = 6$ 時，	
$\frac{dw}{dt} \Big _{u=6} = 2(2\sqrt{34}) + 2(0)(2\sqrt{34})$	
$= 4\sqrt{34}$	1A
所求變率為每秒 $4\sqrt{34}$ 單位。	

解		分
10. (a) (i) (1)	$\begin{vmatrix} 1 & a+2 & 1 \\ 1 & -a & 6b-1 \\ 2 & a+3 & 2b+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 2 & a+3 \end{vmatrix} - (6b-1) \begin{vmatrix} 1 & a+2 \\ 2 & a+3 \end{vmatrix} + (2b+1) \begin{vmatrix} 1 & a+2 \\ 1 & -a \end{vmatrix}$ $= (3a+3) - (6b-1)(-a-1) + (2b+1)(-2a-2)$ $= 2b(a+1)$ 由於 (E) 有唯一解，可得 $2b(a+1) \neq 0$。 因此，$a \neq -1$ 及 $b \neq 0$。	1M
(2)	$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a+2 & 1 \\ 1 & -a & 6b-1 \\ 3 & a+3 & 2b+1 \end{vmatrix}}{2b(a+1)}$ $= \frac{-4b+1}{2b(a+1)}$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6b-1 \\ 2 & 3 & 2b+1 \end{vmatrix}}{2b(a+1)}$ $= \frac{4b-1}{2b(a+1)}$ $z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+2 & 2 \\ 1 & -a & 1 \\ 2 & a+3 & 3 \end{vmatrix}}{2b(a+1)}$ $= \frac{a+1}{2b(a+1)}$ $= \frac{1}{2b}$	1M 1A
(ii) (1) (E) 的增廣矩陣為	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 6b-1 & 1 \\ 2 & 2 & 2b+1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6b-2 & -1 \\ 0 & 0 & 2b-1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6b-2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right)$ 可得 $z = 2$。 $(6b-2)(2) = -1$ $b = \frac{1}{4}$	1M 1A
(2) (E) 的增廣矩陣為	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ 解集為 $\{(-t, t, 2) : t \in \mathbb{R}\}$。	1A
(b)	當 $a = -1$ 及 $b = \frac{1}{4}$ ，方程組 (F) 與 (E) 等價。	

解	分
(F) 的解集為 $\{(-t, t, 2) : t \in \mathbb{R}\}$。 $4(-t) + t^2 + 2 < -2$ $t^2 - 4t + 4 < 0$ $(t - 2)^2 < 0$ 留意對所有實數值 t，$(t - 2)^2 \geq 0$。 (F) 沒有實解滿足 $4x + y^2 + z < -2$。	1M 1M 1A

解	分
11. (a) $\int_0^1 x e^{ax} dx = \left[\frac{x e^{ax}}{a} \right]_0^1 - \frac{1}{a} \int_0^1 e^{ax} dx$ $= \frac{e^a}{a} - \left[\frac{e^{ax}}{a^2} \right]_0^1$ $= \frac{a e^a - e^a + 1}{a^2}$	1M+1M 1
(b) 設 $u = \ln(x+1)$。則 $du = \frac{1}{x+1} dx$。	1M
$\int_0^{e-1} \frac{\ln(x+1)}{(1+x)^r} dx = \int_0^1 \frac{u}{(e^u)^{r-1}} du$ $= \int_0^1 u e^{(1-r)u} du$ $= \frac{(1-r)e^{1-r} - e^{1-r} + 1}{(1-r)^2}$ $= \frac{1 - r e^{1-r}}{(1-r)^2}$	1M 1M 1A
(c) 設 $v = (e-1)\tan x$。則 $dv = (e-1)\sec^2 x dx$。	1M
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln[1+(e-1)\tan x]}{(1+e\tan x - \tan x)^3} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{[\ln[1+(e-1)\tan x]] \tan^2 x}{(1+e\tan x - \tan x)^3} dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln[1+(e-1)\tan x] \sec^2 x}{[1+(e-1)\tan x]^3} dx$ $= \frac{1}{e-1} \int_0^{e-1} \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^3} dv$ $= \frac{1}{e-1} \times \frac{1-3e^{1-3}}{(1-3)^2}$ $= \frac{e^2-3}{4e^2(e-1)}$	1M 1A
(d) 設 $w = \frac{\pi}{2} - 2x$。則 $dw = -2 dx$。	1M
$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{[\ln[1+(e-1)\cot 2x]] \csc^2 2x}{(1+e\cot 2x - \cot 2x)^3} dx$ $= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\ln[1+(e-1)\cot(\frac{\pi}{2}-w)] \csc^2(\frac{\pi}{2}-w)}{[1+e\cot(\frac{\pi}{2}-w) - \cot(\frac{\pi}{2}-w)]^3} dw$ $= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln[1+(e-1)\tan w] \sec^2 w}{(1+e\tan w - \tan w)^3} dw$ $= \frac{1}{2} \times \frac{e^2-3}{4e^2(e-1)}$ $= \frac{e^2-3}{8e^2(e-1)}$	1M 1A

解	分
12. (a) (i) 留意 $AK \perp BC$、$BK \perp AC$ 及 $HA = HB = HC$。 $ \begin{aligned} & (\overrightarrow{HK} - \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} - (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) \\ &= 0 - (HC^2 - HB^2) \\ &= 0 \\ & (\overrightarrow{HK} - \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC}) \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) \\ &= 0 - (HC^2 - HA^2) \\ &= 0 \end{aligned} $ (ii) 利用 (a)(i) 的結果，可得 $\overrightarrow{HK} - \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = \mathbf{0}$。 因此，可得 $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$。 (b) (i) 可得 $\overrightarrow{AB} = -4\mathbf{i}$ 及 $\overrightarrow{AC} = -2\sqrt{2}\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$。 $ \begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -8\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \\ S &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 8^2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned} $ (ii) 設 r 為 ABC 的外接圓的半徑。 $ \begin{aligned} r &= \frac{abc}{4S} \\ &= \frac{\sqrt{32 - 16\sqrt{2}}(4)(4)}{4(4\sqrt{2})} \\ &= \sqrt{16 - 8\sqrt{2}} \end{aligned} $ 留意 $AB = AC$。將 BC 的中點記為 M。 $ \begin{aligned} \overrightarrow{MA} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ &= (2 + \sqrt{2})\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \overrightarrow{HA} &= \frac{r}{MA} \overrightarrow{MA} \\ &= \frac{\sqrt{16 - 8\sqrt{2}}}{\sqrt{8 + 4\sqrt{2}}} [(2 + \sqrt{2})\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}] \\ &= \sqrt{\frac{8(2 - \sqrt{2})^2}{4(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}} [(2 + \sqrt{2})\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}] \\ &= (2 - \sqrt{2})[(2 + \sqrt{2})\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}] \end{aligned} $ (iii) $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ $ \begin{aligned} &= \overrightarrow{HA} + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= (2 - 2\sqrt{2})\mathbf{i} + (4 - 3\sqrt{2})\mathbf{j} + (4 - 3\sqrt{2})\mathbf{k} \end{aligned} $	1M 1M 1 1 1M 1 1M 1A 1M 1M 1A 1M 1A