

REG-2324-MOCK-SET 10-MATH-EP(M2)

建議題解

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{d}{dx}(\tan 2x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(2x + 2h) - \tan 2x}{h} & 1M \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan[(2x + 2h) - 2x][1 + \tan(2x + 2h) \tan 2x]}{h} & 1M \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \times \frac{2(1 + \tan(2x + 2h) \tan 2x)}{\cos 2h} & 1M \\
 &= 1 \times \frac{2(1 + \tan^2 2x)}{1} \\
 &= 2 \sec^2 2x & 1A
 \end{aligned}$$

$$2. \quad (a) \tan 3\theta = \tan(2\theta + \theta)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\tan 2\theta + \tan \theta}{1 - \tan 2\theta \tan \theta} & 1M \\
 &= \frac{\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} + \tan \theta}{1 - \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \times \tan \theta} \\
 &= \frac{2 \tan \theta + \tan(1 - \tan^2 \theta)}{(1 - \tan^2 \theta) + 2 \tan^2 \theta} \\
 &= \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} & 1
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \sqrt{3} \tan \theta + 3 = \cot^2 \theta + 3\sqrt{3} \cot \theta$$

$$\sqrt{3} \tan^3 \theta + 3 \tan^2 \theta = 1 + 3\sqrt{3} \tan \theta$$

$$-\sqrt{3}(3 \tan \theta - \tan^3 \theta) = 1 - 3 \tan^2 \theta$$

$$\frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 3\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3\theta = \pm \frac{7\pi}{6} \quad \text{或} \quad \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \pm \frac{7\pi}{18} \quad \text{或} \quad \pm \frac{\pi}{18}$$

1M

1A+1A

解	分
3. (a) $y = \int \frac{x+1}{x+3} dx$ $= \int \frac{x+3-2}{x+3} dx$ $= \int \left(1 - \frac{2}{x+3}\right) dx$ $= x - 2 \ln x+3 + C$ Γ 通過 $(e-3, 2e-5)$。 $2e-5 = (e-3) - 2 \ln e + C$ $C = e$ 所求方程為 $x - 2 \ln x+3 + e$。 (b) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{2}{x+3}\right)$ $= \frac{2}{(x+3)^2}$ > 0 Γ 沒有拐點。	1M 1A 1A 1A 1A
4. (a) 通項 $= C_r^9(x)^{9-r} \left(\frac{k}{x^2}\right)^r$ $= C_r^9 k^r x^{9-3r}$ 代 $9-3r=3$，可得 $r=2$。 $C_2^9 k^2 = 576$ $k^2 = 16$ $k = 4$ 或 -4 (捨去) (b) $\left(x + \frac{k}{x^2}\right)^9 (2+x)^3$ $= \left[x^9 + C_1^9(x)^8 \left(\frac{4}{x^2}\right) + C_2^9(x)^7 \left(\frac{4}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{x^2}\right)^9 \right] (8 + 12x + 6x^2 + x^3)$ 常數項 $= C_3^9(4)^3 \times 8 + C_4^9(4)^4 \times 1$ $= 75\,264$	1M 1M 1A 1A 1A 1A

解	分
5. (a) $\int u(4^u) du = \frac{u(4^u)}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} \int 4^u du$ $= \frac{u(4^u)}{\ln 4} - \frac{4^u}{(\ln 4)^2} + \text{常數}$ $= \frac{u(4^u)}{2 \ln 2} - \frac{4^u}{4(\ln 2)^2} + \text{常數}$ (b) 所求面積 $= \int_{-1}^0 x^2(4^x) dx$ $= \left[\frac{x^2(4^x)}{\ln 4} \right]_{-1}^0 - \frac{2}{\ln 4} \int_{-1}^0 x(4^x) dx$ $= \frac{1}{8 \ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{x(4^x)}{\ln 4} - \frac{4^x}{(\ln 4)^2} \right]_{-1}^0$ $= \frac{3 - 2 \ln 2 - 2(\ln 2)^2}{16(\ln 2)^3}$	1M 1A 1A 1M 1M 1A
6. (a) $y = 2e^{\frac{x}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{2}}$ 設 R 的坐標為 $(r, 0)$。 $\frac{0 - 2e^{\frac{u}{2}}}{r - u} = e^{\frac{u}{2}}$ $-2 = r - u$ $r = u - 2$ R 的坐標為 $(u - 2, 0)$。 (b) 設 A 為 $\triangle PQR$ 的面積。 $A = \frac{(2e^{\frac{u}{2}} - \ln(2u))(2)}{2}$ $= 2e^{\frac{u}{2}} - \ln(2u)$ $\frac{dA}{dt} = \left(e^{\frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \right) \frac{du}{dt}$ 當 Q 在 x 軸上時，$u = \frac{1}{2}$。 $0.5 = \left(e^{\frac{1}{4}} - 2 \right) \frac{du}{dt}$ $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2(e^{\frac{1}{4}} - 2)}$ 所求變率為每秒 $\frac{1}{2(e^{\frac{1}{4}} - 2)}$。	1M 1M 1A 1M 1A 1M 1A

解		分
7. (a)	(i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda + 1 \\ \lambda & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -4\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & \lambda + 1 \\ -1 & -4\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda + 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$	1M
	$= 3\lambda^2 - 3\lambda$	
	$= 3\lambda(\lambda - 1)$	
	若 (E) 有唯一解，則 $3\lambda(\lambda - 1) \neq 0$ 。	1M
	求解後，可得 $\lambda \neq 0$ 及 $\lambda \neq 1$ 。	1A
	因此， $\lambda < 0$ 或 $0 < \lambda < 1$ 或 $\lambda > 1$ 。	
	(ii) $y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda + 1 \\ \lambda & \mu & 2 \\ 1 & \lambda & -4\lambda \end{vmatrix}}{3\lambda(\lambda - 1)}$	1M
	$= \frac{\mu(\lambda^2 - 1)}{3\lambda(\lambda - 1)}$	
	$= \frac{\mu(\lambda + 1)}{3\lambda}$	1A
	(b) (E) 的增廣矩陣為	
	$\left(\begin{array}{ccc c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \mu \\ 1 & -1 & 0 & \mu \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & -1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \mu \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & -1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{array} \right)$	1M
	可得 $\mu = 0$ 。	1A
	解集為 $\{(-t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ 。	1A
8. (a)	當 $n = 1$ ，	
	左式 $= \sin x \cos 2x =$ 右式	
	對 $n = 1$ ，命題為真。	1
	假設 $\sin x \sum_{k=1}^p \cos 2kx = \sin px \cos[(p+1)x]$ ，其中 $p \in \mathbf{Z}^+$ 。	1
	$\sin x \sum_{k=1}^{p+1} \cos 2kx$	
	$= \sin x \sum_{k=1}^p \cos 2kx + \sin x \cos[(2p+2)x]$	
	$= \sin px \cos[(p+1)x] + \sin x \cos[(2p+2)x]$	1M
	$= \frac{1}{2} [\sin[(2p+1)x] + \sin(-x)] + \frac{1}{2} [\sin[(2p+3)x] + \sin[(-2p-1)x]]$	1M
	$= \frac{1}{2} [\sin[(2p+3)x] - \sin x]$	
	$= \sin[(p+1)x] \cos[(p+2)x]$	
	對 $n = p+1$ ，命題為真。	
	藉數學歸納法， $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ ，命題為真。	1

9. (a) 垂直漸近線為 $x = -1$ 。

1A

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}$$

$$= x - 8 + \frac{27x}{(x+1)^2}$$

1M

斜漸近線為 $y = x - 8$ 。

1A

(b) $f(x) = x - 8 + \frac{27x}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 1 + \frac{27(x+1)^2 - 27x(2)(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+7)(x-2)^2}{(x+1)^3}$$

1M

當 $f'(x) = 0$ 時， $x = 2$ 或 -7 。

x	$x < -7$	$-7 < x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	-	+	+

1M

G 有恰好一個轉向點，為於 $x = -7$ 時的極大值點。

1

(c) $f''(x) = \frac{(x+1)^3[(x-2)^2 + 2(x+7)(x-2)] - (x+7)(x-2)^2(3)(x+1)^2}{(x+1)^6}$

$$= \frac{54(x-2)}{(x+1)^4}$$

1A

當 $f''(x) = 0$ 時， $x = 2$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	-	-	+

1M

拐點為 $(2, 0)$ 。

1A

- (d) 設 $u = x + 1$ 。則 $du = dx$ 。

Volume

$$= \pi \int_0^2 \left[\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2} \right]^2 dx$$

1M

$$= \pi \int_1^3 \frac{(u-3)^6}{u^4} du$$

$$= \pi \int_1^3 \frac{u^6 - 18u^5 + 135u^4 - 540u^3 + 1215u^2 - 1458u + 729}{u^4} du$$

1M

$$= \pi \int_1^3 (u^2 - 18u + 135 - 540u^{-1} + 1215u^{-2} - 1458u^{-3} + 729u^{-4}) du$$

$$= \pi \left[\frac{u^3}{3} - 9u^2 + 135u - 540 \ln|u| - 1215u^{-1} + \frac{729}{u^2} - \frac{243}{u^3} \right]_1^3$$

$$= \pi \left(\frac{1808}{3} - 540 \ln 3 \right)$$

1A

$$10. \quad (a) \quad \vec{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$$

$$= 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OP} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{25}{4} & 123 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 27\mathbf{i} + 36\mathbf{j} - \frac{75}{4}\mathbf{k}$$

1M

1A

$$(b) \quad \text{面積} = |\overrightarrow{OP} \times \vec{r}|$$

1M

$$= \sqrt{27^2 + 36^2 + \left(\frac{75}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{195}{4}$$

1A

$$(c) \quad (i) \quad \overrightarrow{PQ} = 6\mathbf{i} - \frac{9}{2}\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{NR} = \vec{r} - \overrightarrow{ON} = (3 - 27\alpha)\mathbf{i} + (4 - 36\alpha)\mathbf{j} + \left(12 + \frac{75\alpha}{4}\right)\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{NR} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$= 6(3 - 27\alpha) - \frac{9}{2}(4 - 36\alpha)$$

1M

$$= 0$$

$\overrightarrow{NR}$ 與 $\overrightarrow{PQ}$ 為正交向量。

1A

$$(ii) \quad (1) \quad \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{ON} = (6 - 27\alpha)\mathbf{i} + \left(\frac{7}{4} - 36\alpha\right)\mathbf{j} + \left(12 + \frac{75\alpha}{4}\right)\mathbf{k}$$

$$\text{可得 } \frac{6 - 27\alpha}{-12} = \frac{\frac{7}{4} - 36\alpha}{-41} = \frac{12 + \frac{75\alpha}{4}}{\beta}。$$

1M

$$\frac{6 - 27\alpha}{-12} = \frac{\frac{7}{4} - 36\alpha}{-41} \quad \text{及} \quad \frac{6 - 27\alpha}{-12} = \frac{12 + \frac{75\alpha}{4}}{\beta}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\beta = 73$$

$$\text{可得 } \alpha = \frac{1}{3} \text{ 及 } \beta = 73。$$

1A+1A

(2) 留意 ON 垂直於平面 OPQ 及 $NR \perp PQ$ 。

可得 $OR \perp PQ$ 及 $\theta = \angle ORN$ 。

1M

$$\tan \theta = \frac{ON}{OR}$$

1M

$$= \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{195}{4} \right)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}}$$

$$= \frac{5}{4}$$

1A

解		分
11. (a)	$f'(u) = (m+1)(1+u)^m(1-u)^n - n(1+u)^{m+1}(1-u)^{n-1}$	1M
	$(m+1) \int_{-1}^1 (1+u)^m(1-u)^n du = \int_{-1}^1 f'(u) du + n \int_{-1}^1 (1+u)^{m+1}(1-u)^{n-1} du$	1M
	$(m+1) \int_{-1}^1 (1+u)^m(1-u)^n du = \left[(1+u)^{m+1}(1-u)^n \right]_{-1}^1 + n \int_{-1}^1 (1+u)^{m+1}(1-u)^{n-1} du$	1M
	$\int_{-1}^1 (1+u)^n(1-u)^n du = \frac{n}{m+1} \int_{-1}^1 (1+u)^{m+1}(1-u)^{n-1} du$	1
(b)	設 $t = \tan x$ 。則 $dt = \sec^2 x dx$ 。	
	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan x)^2(\cos 4x+1)}{\cos^6 x} dx$	
	$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^6 x (1+\tan x)^2 [2\cos^2 2x - 1 + 1] dx$	1M
	$= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^6 x (1+\tan x)^2 (2\cos^2 x - 1)^2 dx$	
	$= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x (1+\tan x)^2 (2 - \sec^2 x)^2 dx$	
	$= 2 \int_{-1}^1 (1+t)^2 [2 - (1+t^2)]^2 dt$	1M
	$= 2 \int_{-1}^1 (1+t)^2 [(1+t)(1-t)]^2 dt$	
	$= 2 \int_{-1}^1 (1+t)^4 (1-t)^2 dt$	
	$= \frac{4}{5} \int_{-1}^1 (1+t)^5 (1-t) dt$	1M
	$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} \int_{-1}^1 (1+t)^6 dt$	1M
	$= \frac{2}{15} \left[\frac{(1+t)^7}{7} \right]_{-1}^1$	
	$= \frac{256}{105}$	1A
(c)	設 $f(x) = \frac{\tan x(\cos 4x+1)}{\cos^6 x}$ 及 $g(x) = \frac{(1+\tan^2 x)(\cos 4x+1)}{\cos^6 x}$ 。	
	$f(-x) = \frac{\tan(-x)(\cos(-4x)+1)}{\cos^6(-x)} = -\frac{\tan x(\cos 4x+1)}{\cos^6 x} = -f(x)$	1M
	$g(-x) = \frac{(1+\tan^2(-x))(\cos(-4x)+1)}{\cos^6(-x)} = \frac{(1+\tan^2 x)(\cos 4x+1)}{\cos^6 x} = g(x)$	

因此， $f(x)$ 為奇函數及 $g(x)$ 為偶函數。

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan x)^2 (\cos 4x + 1)}{\cos^6 x} dx = \frac{256}{105}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 x)(\cos 4x + 1)}{\cos^6 x} dx + 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x (\cos 4x + 1)}{\cos^6 x} dx = \frac{256}{105}$$

1M

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 x)(\cos 4x + 1)}{\cos^6 x} dx = \frac{256}{105}$$

1M

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^8 x (\cos 4x + 1) dx = \frac{256}{105}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^8 x (\cos 4x + 1) dx = \frac{128}{105}$$

1A

$$12. \quad (a) \quad (i) \quad QQ^T P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} P$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} abc - abc & -a^2c + a^2c & a^2b - a^2b \\ b^2c - b^2c & -abc + abc & ab^2 - ab^2 \\ bc^2 - bc^2 & -ac^2 + ac^2 & abc - abc \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{0}$$

$$PQQ^T = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{0}$$

$$(ii) \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b^2 - c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2 - c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$I + P^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = QQ^T$$

$$\left[\frac{1}{2}(I - P + QQ^T) \right] (I + P)$$

$$= \frac{1}{2}[I + P - P - P^2 + QQ^T + QQ^T P]$$

$$= \frac{1}{2}[I - P^2 + QQ^T + \mathbf{0}]$$

$$= \frac{1}{2}[I - P^2 + (I + P^2)]$$

$$= \frac{1}{2}(2I)$$

$$= I$$

1M

1

1M

1M

1

1M

1M

1M

解	分
$ \begin{aligned} & (I + P) \left[\frac{1}{2}(I - P + QQ^T) \right] \\ &= \frac{1}{2} [I - P + P - P^2 + QQ^T + PQQ^T] \\ &= \frac{1}{2} [I - P^2 + (I + P^2) + \mathbf{0}] \\ &= \frac{1}{2} (2I) \\ &= I \end{aligned} $	
因此，$(I + P)^{-1} = \frac{1}{2}(I - P + QQ^T)$。	1
(b) 取 $a = \frac{1}{\sqrt{6}}$、$b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ 及 $c = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$，使得 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$。 可得 $M = \sqrt{6} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{6}P$。	1M
$(I + P^2)P = QQ^T P$ $P + P^3 = \mathbf{0}$ $ \begin{aligned} M + \frac{1}{6}M^3 + \frac{1}{6^2}M^5 + \dots + \frac{1}{6^{1048}}M^{2097} \\ &= \sqrt{6}P + \frac{1}{6}(\sqrt{6}P)^3 + \frac{1}{6^2}(\sqrt{6}P)^5 + \dots + \frac{1}{6^{1048}}(\sqrt{6}P)^{2097} \\ &= \sqrt{6}(P + P^3 + P^5 + \dots + P^{2097}) \\ &= \sqrt{6}[P + P^2(P + P^3) + \dots + P^{2094}(P + P^3)] \\ &= \sqrt{6}P \end{aligned} $	1M
$ = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} $	1A