

ELITE-2425-MOCK-SET 8-MATH-CP 1

建議題解

- | | |
|---|----|
| 1. $\frac{(m^2n^{-3})^{-7}}{m^{-3}n^{20}} = \frac{m^{-14}n^{21}}{m^{-3}n^{20}}$ | 1M |
| $= \frac{n^{21-20}}{m^{-3+14}}$ | 1M |
| $= \frac{n}{m^{11}}$ | 1A |
| | |
| 2. 平均值 = $\frac{20+23+\dots+63}{25} = 45$ | 1A |
| 下四分位數 = 35 | 1A |
| 標準差 ≈ 12.2 | 1A |
| | |
| 3. 設該學校中男生及女生的數目分別為 b 及 g 。 | |
| $\begin{cases} b = g(1 + 15\%) \\ b - 85 = g(90\%) \end{cases}$ | 1A |
| $1.15g - 85 = 0.9g$ | 1M |
| $g = 340$ | |
| 當 $g = 340$ 時， $b = g(1 + 15\%) = 391$ 。男生和女生的總人數為 $340 + 391 = 731$ 。 | 1A |
| | |
| 4. (a) $x^3y - 4xy^3 = xy(x^2 - 4y^2)$ | |
| $= xy(x + 2y)(x - 2y)$ | 1A |
| (b) $2x^2 - 3xy - 2y^2 = (x - 2y)(2x + y)$ | 1A |
| (c) $x^3y - 4xy^3 - 2x^2 + 3xy + 2y^2 = xy(x + 2y)(x - 2y) - (x - 2y)(2x + y)$ | 1M |
| $= (x - 2y)[xy(x + 2y) - (2x + y)]$ | 1A |
| $= (x - 2y)(x^2y + 2xy^2 - 2x - y)$ | |
| | |
| 5. (a) 每公斤的成本 = $\frac{2(27) + 1(66)}{2 + 1}$ | 1M |
| $= \$40/\text{kg}$ | 1A |
| (b) 所求標價 = $\frac{40(1 + 20\%)}{1 - 20\%}$ | 1M |
| $= \$60$ | 1A |

解	分
6. (a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2^2} + 5\right] - k\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7 = -3$ $k = 6$ (b) $f(x) = 2x(2x^2 + 5) - 6x^2 - 7 = 4x^3 - 6x^2 + 10x - 7$ $ \begin{array}{r} 4x^2 + 2x + 14 \\ \hline x - 2 \quad 4x^3 - 6x^2 + 10x - 7 \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ 2x^2 + 10x \\ \underline{2x^2 - 4x} \\ 14x - 7 \\ \underline{14x - 28} \\ 21 \end{array} $ 所求商式 $4x^2 + 2x + 14$。	1M 1A 1M 1A
7. (a) $\frac{\sin(90^\circ + \theta)}{\cos(270^\circ - \theta)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta}$ $= -\frac{1}{\tan \theta}$ (b) $\frac{\sin(90^\circ + \theta)}{\cos(270^\circ - \theta)} = 1$ $-\frac{1}{\tan \theta} = 1$ $\tan \theta = -1$ $\theta = 135^\circ \text{ 或 } 315^\circ$	1A 1M 1A+1A
8. (a) $204^\circ - 24^\circ = 180^\circ$。故此，$P$、$O$、$Q$ 共線。 $114^\circ - 24^\circ = 90^\circ$。故此，$PQ \perp OR$。 (b) 周界 $= \sqrt{15^2 + 36^2} + \sqrt{27^2 + 36^2} + (15 + 27)$ $= 126$	1M 1A 1M+1M 1A

解		分									
9. (a) $\angle QPR = \angle SPT$ (已知) $PR = PS$ (已知) $\angle PTS = \angle PQR$ (等弦對等角) $\triangle PQR \cong \triangle PTS$ (AAS) <table border="1"> <tr> <th colspan="3">評分標準</th></tr> <tr> <td>情況 1</td><td>附有正確理由的任何正確證明。</td><td>2</td></tr> <tr> <td>情況 2</td><td>未附有正確理由的任何正確證明。</td><td>1</td></tr> </table>		評分標準			情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2	情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1	
評分標準											
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2									
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1									
(b) $\triangle PQR \cong \triangle PTS$											
$QR = TS$		1M									
$\angle QTR = \angle SRT$		1M									
因此， $QT \parallel RS$ 。同意該宣稱。		1A									
10. (a) 設 $g(x) = ax + bx^2$ ，其中 a 及 b 為非零常數。		1A									
$\begin{cases} -93 = -3a + 9b \\ 2 = 2a + 4b \end{cases}$		1M									
求解後， $a = 13$ 及 $b = -6$ 。		1A									
(b) $13x - 6x^2 = x + k$											
$-6x^2 + 12x - k = 0$											
$\Delta = 12^2 - 4(-6)(-k) \geq 0$		1M									
$k \leq 6$		1A									
11. (a) 中位數 = 26.5 min		1A									
分佈域 = $42.3 - 16.8 = 25.5$ min		1A									
(b) 設新學生所需的時間為 t 分鐘。											
$28 \times 35 + t = (28 - 0.3) \times 36$											
$t = 17.2$		1A									
分佈域 = $42.3 - 16.8 = 25.5$ min		1M									
該宣稱不正確。		1A									

解	分
12. (a) L_1 的斜率 = $\frac{7}{6}$ L_2 的方程為 $y + 12 = \frac{-6}{7}(x - 14)$ $6x + 7y = 0$ (b) 解 $\begin{cases} 6x + 7y = 0 \\ 7x - 6y - 22 = 0 \end{cases}$, M 的坐標為 $\left(\frac{154}{85}, -\frac{132}{85}\right)$。 H 及 K 的坐標為 $\left(\frac{22}{7}, 0\right)$ 及 $\left(0, -\frac{11}{3}\right)$。 由於 H、M、K 共線， 所求之比 = $HM : KM$ $= \left(\frac{22}{7} - \frac{154}{85}\right) : \frac{154}{85}$ $= 36 : 49$	1A 1M 1A 1A 1A 1M 1A
13. (a) $BC = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32 \text{ cm}$ 角錐的高 = $\sqrt{29^2 - \left(\frac{40}{2}\right)^2} = 21 \text{ cm}$ 角錐的體積 = $\frac{1}{3}(24)(32)(21)$ $= 5376 \text{ cm}^3$ (b) (i) 設該圓柱的半徑及高分別為 $r \text{ cm}$ 及 $h \text{ cm}$。 $4\pi r^2 = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ $r = h$ $\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2(r) = 5376$ $\pi r^3 = 2304$ 球體體積 = $\frac{4}{3}\pi r^3 = 3072 \text{ cm}^3$ (ii) 原來的總表面面積 $= (24)(32) + \frac{(24)\sqrt{21^2 + 16^2}}{2} \times 2 + \frac{(32)\sqrt{21^2 + 12^2}}{2} \times 2$ $\approx 2180 \text{ cm}^2$ 新總表面面積 $= 4\pi r^2 \times 2$ $= 8\pi \left(\frac{2304}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\approx 2040 \text{ cm}^2 < 2180 \text{ cm}^2$ 不同意該宣稱。	1A 1M 1A 1M 1A 1M 1A 1A 1A

解	分
14. (a) $\sqrt{(x-6)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(12-6)^2 + (4+4)^2}$ $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 100$ (b) 當 $(x, y) = (-2, -10)$ 時, $(x-6)^2 + (y+4)^2 = (-2-6)^2 + (-10+4)^2 = 100$。 因此, $B(-2, -10)$ 在 Γ 上。 (c) 設 M 為 AB 的中點。M 的坐標為 $(5, -3)$。 Q 在 AB 的垂直平分線上。故此, $QM \perp AB$。 $QM = GA - GM = 10 - \sqrt{(6-5)^2 + (-3+4)^2} = 10 - \sqrt{2}$ $AM = \sqrt{(12-5)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{98}$ $\tan \angle QAB = \frac{10 - \sqrt{2}}{\sqrt{98}}$ $\angle QAB \approx 40.9^\circ > 40^\circ$ 該宣稱正確。	1M 1A 1M 1 1A 1A 1M 1A 1A
15. 代 $(0, 1)$ 及 $(1, 6)$, $\begin{cases} 1 = m - 2n \\ 6 = mn - 2n \end{cases}$ $6 = (2n+1)n - 2n$ $0 = 2n^2 - n - 6$ $n = 2$ 或 $-\frac{3}{2}$ (捨去) 當 $n = 2$ 時, $m = 2(2) + 1 = 5$。 $y = 5 \times 2^x - 4$ $2^x = \frac{y+4}{5}$ $x = \log_2 \frac{y+4}{5}$	1M 1A 1A
16. (a) $z = \frac{5(a+i)}{a-i} \times \frac{a+i}{a+i}$ $= \frac{5(a^2-1) + 10ai}{a^2+1}$ $= \frac{5(a^2-1)}{a^2+1} + \frac{10a}{a^2+1}i$ (b) $\frac{5(a^2-1)}{a^2+1} - \frac{10a}{a^2+1} = 1$ $5a^2 - 10a - 5 = a^2 + 1$ $4a^2 - 10a - 6 = 0$ $a = 3$ 或 -0.5 (捨去) $z = 4 + 3i$, 方程的兩根為 $4 \pm 3i$。 $s = (4+3i)(4-3i) = 25$	1M 1A 1M 1A 1A

解	分
17. (a) $f(x) = \frac{-1}{3}x^2 - \frac{k}{2}x + k - 1$ $= \frac{-1}{3}\left(x^2 + \frac{3k}{2}x + \frac{9k^2}{16}\right) + \frac{3k^2}{16} + k - 1$ $= \frac{-1}{3}\left(x + \frac{3k}{4}\right)^2 + \frac{3k^2}{16} + k - 1$ S 的坐標為 $\left(-\frac{3k}{4}, \frac{3k^2}{16} + k - 1\right)$。 (b) (i) $g(x) = \frac{3}{2}f(-x)$ T 的坐標為 $\left(\frac{3k}{4}, \frac{9k^2}{32} + \frac{3k}{2} - \frac{3}{2}\right)$。 (ii) 由於 S 為 $\triangle OST$ 的垂心，$\angle OST = 90^\circ$。 $\frac{\frac{3k^2}{16} + k - 1}{-\frac{3k}{4}} \times \frac{\frac{9k^2}{32} + \frac{3k}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3k^2}{16} - k + 1}{\frac{3k}{4} + \frac{3k}{4}} = -1$ $\frac{1}{2}\left(\frac{3k^2}{16} + k - 1\right)^2 = \frac{9k^2}{8}$ $\frac{3k^2}{16} + k - 1 = \pm \frac{3k}{2}$ 若 $\frac{3k^2}{16} + k - 1 = \frac{3k}{2}$， $\frac{3k^2}{16} - \frac{k}{2} - 1 = 0$ $k = 4 \quad \text{或} \quad -\frac{4}{3} \quad (\text{捨去})$ 若 $\frac{3k^2}{16} + k - 1 = -\frac{3k}{2}$， $\frac{3k^2}{16} + \frac{5k}{2} - 1 = 0$ $k \approx -13.7 \quad (\text{捨去}) \quad \text{或} \quad 0.389 \quad (\text{捨去})$ T 的坐標為 $(3, 9)$。$\triangle OST$ 的外心在 OT 的中點。 所求坐標為 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$。	1M 1A 1A 1M 1A 1A

解	分
18. (a) 所求概率 = $\frac{3}{7} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{6}{8}$ $= \frac{33}{56}$ (b) 所求概率 = $\frac{33}{56} + \left(\frac{23}{56}\right)^2 \frac{33}{56} + \left(\frac{23}{56}\right)^4 \frac{33}{56} + \dots$ $= \frac{\frac{33}{56}}{1 - \frac{529}{3136}}$ $= \frac{56}{79}$ (c) 所求概率 = $\frac{\left(\frac{23}{56}\right) \frac{33}{56} + \left(\frac{23}{56}\right)^3 \frac{33}{56}}{1 - \frac{56}{79}}$ ≈ 0.972	1M 1A 1M 1M 1A 1M+1A 1A

解	分
19. (a) $BD^2 = 20^2 + 25^2 - 2(20)(25) \cos 120^\circ$ $BD = 5\sqrt{61}$ cm $20^2 = 25^2 + BD^2 - 2(25)(BD) \cos \angle BDC$ $\angle BDC \approx 26.3^\circ$ $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{25}$ $AD = 61$ cm (b) (i) 設 E 為 DC 上的點使得 $BE \perp CD$。 設 F 為 AD 上的點使得 $EF \perp CD$。所求之角為 $\angle BEF$。 $BE = \frac{20 \sin(180^\circ - 120^\circ)}{25} = \frac{10\sqrt{3}}{61}$ cm $\frac{\sin \angle DAC}{\sin 140^\circ} = \frac{61}{25}$ $\angle DAC \approx 15.3^\circ$ $\angle ADC = 180^\circ - 140^\circ - \angle DAC \approx 24.7^\circ$ $DE = CD + 20 \cos(180^\circ - 120^\circ) = 35$ cm $EF = DE \tan \angle ADC \approx 16.1$ cm $DF = \frac{DE}{\cos \angle ADC} \approx 38.5$ cm $BF^2 = BD^2 + DF^2 - 2(BD)(DF) \cos \angle BDA$ $= BD^2 + DF^2 - 2(BD)(DF) \cos \angle BDC$ $BF \approx 17.7$ cm $BF^2 = BE^2 + EF^2 - 2(BE)(EF) \cos \angle BEF$ $\angle BEF \approx 63.7^\circ$ 所求之角為 63.7°。 (ii) 設 G 為地上的點使得 BG 垂直於平面 ACD。 所求之角為 $\angle BDG$。 $BG = BE \sin \angle BEF \approx 15.5$ cm $\sin \angle BDG = \frac{BG}{BD}$ $\angle BDG \approx 23.4^\circ$ 所求之角為 23.4°。 (iii) 設所求距離為 h cm。 $\triangle BCD$ 的面積 $= \frac{1}{2}(20)(25)(\sin 120^\circ) = 125\sqrt{3}$ cm² $\triangle ACD$ 的面積 $= \frac{1}{2}(AD)(25)(\sin \angle ADC) \approx 319$ cm² 藉考慮四面體 $ABCD$ 的體積， $\frac{1}{3}(125\sqrt{3})(h) = \frac{1}{3}(\triangle ACD \text{ 的面積})(BG)$ $h \approx 22.9$ cm < 23 cm 不同意該宣稱。	1M 1A 1M 1A 1A 1M 1A 1A 1A 1A 1A 1M 1A