結構式試題

1. (a) Q 為 PR 的中點。

R 的坐標為 $(14,\ 2t)$。 1M

G 的 x 坐標 $= \dfrac{0+50}{2} = 25$ 1M

設 G 的坐標為 $(25,\ g)$。

$$\sqrt{25^2+g^2} = \sqrt{(25-14)^2+(g-2t)^2} \quad \text{1M}$$

$$625+g^2 = 121+g^2-4gt+4t^2$$

$$4gt = 4t^2-504$$

$$g = \frac{t^2-126}{t}$$

G 的坐標為 $\left(25,\ \dfrac{t^2-126}{t}\right)$。 1A

設 H 的坐標為 $(14,\ h)$。

$$\frac{h-0}{14-0} \times \frac{2t-0}{14-50} = -1$$

$$h = \frac{252}{t}$$

H 的坐標為 $\left(14,\ \dfrac{252}{t}\right)$。 1A

(b) (i) S 的坐標為 $(32,\ 0)$。

$$\tan\angle PQS = \tan\angle POQ$$

$$\frac{50-32}{t} = \frac{t-0}{32-0} \quad \text{1M}$$

$$t^2 = 576$$

$$t = 24 \quad 或 \quad -24（捨去） \quad \text{1}$$

(ii) G 及 H 的坐標分別為 $\left(25,\ \dfrac{75}{4}\right)$ 及 $\left(14,\ \dfrac{21}{2}\right)$。 1M

OQ 的斜率 $= \dfrac{24-0}{32-0} = \dfrac{3}{4}$

OG 的斜率 $= \dfrac{\frac{75}{4}-0}{25-0} = \dfrac{3}{4}$

可得 $OQ /\!/ OG$。

因此，O、G 與 Q 共線。 1A

(iii) 留意 $\triangle OPQ \cong \triangle ORQ$，且 I 在 OQ 上。

設內切圓的半徑為 r。

可得 $OR = OP = 50$ 及 $PR = \sqrt{(50-14)^2+(48-0)^2} = 60$。

考慮 $\triangle OPR$ 的面積。

$$\frac{(50)(48)}{2} = \frac{50r}{2}+\frac{50r}{2}+\frac{60r}{2} \quad \text{1M}$$

$$r = 15$$

$$GH = \sqrt{(25-14)^2+\left(\frac{75}{4}-\frac{21}{2}\right)^2} = \frac{55}{4}$$

所求之比 $= \dfrac{(GH)(QR)}{2} : \dfrac{r(PQ)}{2}$ 1M

$= GH : r$

$= 11 : 12$ 1A

2. (a) $\Delta = (-4k)^2 - 4(2)(3k^2 + 5)$ 1M

$= 16k^2 - 24k^2 - 40$

$= -8k^2 - 40$

< 0

因此，$y = f(x)$ 的圖像與 x 軸不相交。 1A

(b) $f(x) = 2x^2 - 4kx + 3k^2 + 5$

$= 2(x^2 - 2kx + k^2) + k^2 + 5$ 1M

$= 2(x - k)^2 + k^2 + 5$ 1A

頂點的坐標為 $\left(k,\ k^2 + 5\right)$。 1M

(c) $y = 2 - f(x)$ 的圖像的頂點的坐標為 $\left(k,\ -k^2 - 3\right)$。 1M

當 S 與 T 最接近時，S 及 T 的坐標分別為 $\left(k,\ k^2 + 5\right)$ 及 $\left(k,\ -k^2 - 3\right)$。

此時，ST 為一鉛垂直線。 1M

外心在 ST 的垂直平分線上。

外心的 y 坐標 $= \dfrac{(k^2 + 5) + (-k^2 - 3)}{2}$ 1M

$= 1 \neq 0$

故此，$\triangle OST$ 的外心不在 x 軸上。

該宣稱不正確。 1A

3. (a) 設 $f(x) = ax^2 + bx$，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} 60 = 4a + 2b \\ 99 = 9a + 3b \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a = 3$ 及 $b = 24$。 1A

因此，$f(x) = 3x^2 + 24x$。

(b) (i) $f(x) = 3x^2 + 24x$

$= 3[x^2 + 2(4)(x) + 4^2] - 48$ 1M

$= 3(x + 4)^2 - 48$

Q 的坐標為 $(-4,\ -48)$。 1A

(ii) $(-4,\ 75)$ 1A

(iii) QS 的斜率 $= \dfrac{-48 - 0}{-4 - 56} = \dfrac{4}{5}$

RS 的斜率 $= \dfrac{75 - 0}{-4 - 56} = -\dfrac{5}{4}$

由於 $\left(-\dfrac{5}{4}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right) = -1$，$QS \perp RS$。 1M

QR 為 $\triangle QRS$ 的外接圓的直徑。

因此，P 為 QR 的中點，三點共線。 1A

4. (a) $g(x) = x^2 - 2kx + 2k^2 + 4$

$= (x^2 - 2kx + k^2) + k^2 + 4$ 1M

$= (x - k)^2 + k^2 + 4$

頂點的坐標為 $\left(k,\ k^2 + 4\right)$。 1A

(b) D 及 E 的坐標分別為 $\left(k - 2,\ k^2 + 4\right)$ 及 $\left(k + 2,\ -k^2 - 4\right)$。 1A

假定 $(0,\ 3)$ 為 $\triangle DEF$ 的外心。

$$\sqrt{(k-2)^2 + (k^2 + 4 - 3)^2} = \sqrt{(k+2)^2 + (-k^2 - 4 - 3)^2}$$ 1M

$$(k-2)^2 - (k+2)^2 = (k^2 + 7)^2 - (k^2 + 1)^2$$

$$-8k = 12k^2 + 48$$

$$0 = 12k^2 + 8k + 48$$

$\Delta = 8^2 - 4(12)(48) = -2240 < 0$ 1M

該方程沒有實根。$(0,\ 3)$ 不可能為外心。

點 F 不存在。 1A

5. (a) $f(x)=x^2-(12k+14)x+36k^2+89k+53$

$=[x^2-2(6k+7)x+(6k+7)^2]+5k+4$ 1M

$=[x-(6k+7)]^2+5k+4$

因此，Q 的坐標為 $(6k+7,\ 5k+4)$。 1A

(b) $(-6k+7,\ 5k+4)$ 1A

(c) (i) QS 的斜率 $=\dfrac{5k+4-(4-3k)}{6k+7-7}=\dfrac{4}{3}$ 1M

所求方程為

$$y-(4-3k)=\frac{4}{3}(x-7)$$

$$4x-3y-9k-16=0$$ 1A

(ii) RS 的斜率 $=\dfrac{5k+4-(4-3k)}{-6k+7-7}=-\dfrac{4}{3}$

因此，$\angle QRS=\angle RQS$ 及 $\triangle QRS$ 等腰。

$\triangle QRS$ 的內心在 $\angle QSR$ 的角平分線上，即 $x=7$。 1M

$QS=RS=\sqrt{(6k)^2+(5k+3k)^2}=10k$ 及 $QR=(6k+7)-(-6k+7)=12k$。

設 C 的半徑為 r。藉考慮 $\triangle QRS$ 的面積，

$$\frac{(QR+RS+QS)r}{2}=\frac{(12k)((5k+4)-(4-3k))}{2}$$ 1M

$$16kr=48k^2$$

$r=3k$　或　$k=0$（捨去） 1A

C 的方程為

$$(x-7)^2+[y-(5k+4-3k)]^2=(3k)^2$$

$$(x-7)^2+(y-2k-4)^2=9k^2$$ 1A

(iii) $\angle STU=90^\circ$ 及 $U(7,\ 2k+4)$。若 $STUV$ 為長方形，則 $UV\perp VS$。

$$\frac{(2k+4)+14}{7+29}\times\frac{4-3k+14}{7+29}=-1$$ 1M

$$-6k^2-18k+324=-1296$$

$$-6k^2-18k+1620=0$$

$k=15$　或　-18（捨去） 1A

當 $k=15$ 時，$U(7,\ 34)$ 及 UT 的斜率 $=-1\div\dfrac{4}{3}=-\dfrac{3}{4}$。

(UV 的斜率) $\times$ (UT 的斜率)

$=\dfrac{34+14}{7+29}\times\dfrac{-3}{4}$

$=-1$

故此，$\angle STU=\angle UVS=\angle TUV=90^\circ$ 及 $\angle VST=360^\circ-90^\circ\times 3=90^\circ$。

因此，$STUV$ 有可能為長方形。 1A

6. (a) $\angle JPO = \angle JPQ$ （內心性質）

$JP = JP$ （公共邊）

$JO = JP$ （半徑）

$JQ = JP$ （半徑）

$\angle JOP = \angle JPO$ （等腰 △ 底角）

$\angle JQP = \angle JPQ$ （等腰 △ 底角）

$= \angle JOP$

$\triangle JPO \cong \triangle JPQ$ （AAS）

$OP = PQ$ （全等 △ 的對應邊）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) (i) 設 $(h,\ 19)$ 為 P 的坐標。

$$h^2 + 19^2 = (40 - h)^2 + (30 - 19)^2$$ 1M

$$h = 17$$

設 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 為 C 的方程，其中 D、E 及 F 均為常數。

$$\begin{cases} F = 0 \\ 17D + 19E + F + 650 = 0 \\ 40D + 30E + F + 2500 = 0 \end{cases}$$ 1A, 1M

求解後，可得 $D = -112$ 及 $E = 66$。 1A

因此，C 的方程為 $x^2 + y^2 - 112x + 66y = 0$。

(ii) L_1 及 L_2 的方程均為 $y = \frac{3}{4}x + k$ 的形式，其中 k 為一常數。

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x + k\right)^2 - 112x + 66\left(\frac{3}{4}x + k\right) = 0$$ 1M

$$\frac{25}{16}x^2 + \left(\frac{3}{2}k - \frac{125}{2}\right)x + (k^2 + 66k) = 0$$

由於 L_1 及 L_2 均為 C 的切線，

$$\left(\frac{3}{2}k - \frac{125}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{25}{16}\right)(k^2 + 66k) = 0$$ 1M

$$-4k^2 - 600k + \frac{15\,625}{4} = 0$$

$$k = \frac{25}{4} \quad \text{或} \quad -\frac{625}{4}$$

故此，L_1 及 L_2 的方程分別為 $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ 及 $y = \frac{3}{4}x - \frac{625}{4}$。 1M

所以，$S = \left(-\frac{25}{3},\ 0\right)$、$T = \left(0,\ \frac{25}{4}\right)$、$U = \left(\frac{625}{3},\ 0\right)$ 及 $V = \left(0,\ -\frac{625}{4}\right)$。

梯形 $STUV$ 的面積

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{625}{3}\right)\left(\frac{625}{4}\right)+\left(\frac{625}{4}\right)\left(\frac{25}{3}\right)+\left(\frac{25}{3}\right)\left(\frac{25}{4}\right)+\left(\frac{25}{4}\right)\left(\frac{625}{3}\right)\right]$ 1M

$\approx 17\,604.166\,67 > 17\,000$

該宣稱為正確。 1A

7. (a) C 的方程為 $(x-8)^2+(y-2)^2=r^2$。 1A

代 L：$y = 0.2kx - 4.2$ 至 C，

$$(x-8)^2+(0.2kx-4.2-2)^2=r^2$$ 1M

$$(1+0.04k^2)x^2+(-16-2.48k)x+(64+38.44-r^2)=0$$

由於 L 為 C 的切線，

$$0=(-16-2.48k)^2-4(1+0.04k^2)(102.44-r^2)$$ 1M

$$\frac{(16+2.48k)^2}{4(1+0.04k^2)}=102.44-r^2$$

$$r^2=\frac{102.44(1+0.04k^2)-(8+1.24k)^2}{1+0.04k^2}$$

$$=\frac{2.56k^2-19.84k+38.44}{1+0.04k^2}$$

$$=\frac{64k^2-496k+961}{25+k^2}$$ 1A

$$=\frac{(8k-31)^2}{25+k^2}$$

(b) (i) $k(18)-5(39)-21=0$ 1M

$k=12$

$r=\sqrt{\frac{(96-31)^2}{25+12^2}}=5$ 1A

(ii) E 的坐標為 $(0,\ -4.2)$。 1A

設圓心為 R。

$RE=\sqrt{8^2+(-4.2-2)^2}=\sqrt{102.44}$ 及 $RD=\sqrt{(18-8)^2+(39-2)^2}=\sqrt{1469}$ 1M

留意 RE 及 RD 分別為 $\angle DEF$ 及 $\angle EDF$ 的角平分線。

$\angle DEF = 2\angle RED = 2\sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{102.44}} \approx 59.2^\circ$ 1M+1M

$\angle EDF = 2\sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{1469}} \approx 15.0^\circ$

故此，$\angle DFE = 180^\circ - \angle DEF - \angle EDF \approx 106^\circ > 90^\circ$。 1M

因此，$\triangle DEF$ 為鈍角三角形。 1A

8. (a) AG 的斜率 $= \dfrac{112-12}{83-158} = \dfrac{-4}{3}$

所求方程為

$$y - 12 = \frac{-4}{3}(x - 158) \qquad \text{1M}$$

$$4x + 3y - 668 = 0 \qquad \text{1A}$$

(b) $GP = \sqrt{(83-23)^2 + (112-67)^2} = 75$

$AG = \sqrt{(158-83)^2 + (112-12)^2} = 125$

$AP = \sqrt{125^2 - 75^2} = 100$

將 AG 與 PQ 的交點記為 T。

留意 $\triangle AGP \sim \triangle APT$。

$$\frac{AT}{AP} = \frac{AP}{AG} \qquad \text{1M}$$

$$AT = 80$$

$AT : TG = 80 : (125 - 80) = 16 : 9$

所求坐標 $= \left(\dfrac{16(83)+9(158)}{16+9},\ \dfrac{16(112)+9(12)}{16+9}\right)$ 1M

$= (110,\ 76)$ 1A

(c) 將 $\triangle APQ$ 的內心及內切圓的半徑分別記為 S 及 r。

假定 AP 與該內切圓相切於 U。

留意 $\triangle AUS \sim \triangle APG$。

$$\frac{AS}{US} = \frac{AG}{PG}$$

$$\frac{80-r}{r} = \frac{125}{75} \qquad \text{1M}$$

$$r = 30 \qquad \text{1A}$$

$AS : ST = (80 - 30) : 30 = 5 : 3$

S 的坐標 $= \left(\dfrac{5(110)+3(158)}{5+3},\ \dfrac{5(76)+3(12)}{5+3}\right)$ 1M

$= (128,\ 52)$

所求方程為

$$(x-128)^2 + (y-52)^2 = 30^2$$

$$(x-128)^2 + (y-52)^2 = 900 \qquad \text{1A}$$

(d) 留意 A、P、G、Q 共圓。

$\triangle APQ$ 的外接圓的半徑 $= \dfrac{AG}{2} = \dfrac{125}{2}$ 1M

所求比例 $= 30^2 : \left(\dfrac{125}{2}\right)^2$ 1M

$= 144 : 625 \neq 1 : 4$

不同意該宣稱。 1A

9. (a) $R\,(64,\ -48)$ 1A

PR 的中點的坐標 $= (40,\ 16)$

PR 的斜率 $= \dfrac{80+48}{16-64} = -\dfrac{8}{3}$

PR 的垂直平分線的斜率為 $\dfrac{3}{8}$。 1M

所求方程為

$$y - 16 = \frac{3}{8}(x-40) \quad \text{1M}$$

$$3x - 8y + 8 = 0 \quad \text{1A}$$

(b) 由於 PS 為 QR 的垂直平分線而其方程為 $x = 16$，$\triangle PQR$ 的外心的坐標為 $(16,\ h)$，其中 h 為一常數。 1M

代 $(16,\ h)$ 至 $3x - 8y + 8 = 0$，

$$3(16) - 8h + 8 = 0 \quad \text{1M}$$

$$h = 7 \quad \text{1A}$$

$\triangle PQR$ 的外心的坐標為 $(16,\ 7)$。

(c) (i) C 的圓心的坐標 $= (16,\ 7)$

C 的方程為

$$(x-16)^2 + (y-7)^2 = (16-16)^2 + (80-7)^2 \quad \text{1M}$$

$$(x-16)^2 + (y-7)^2 = 5329 \quad \text{1A}$$

(ii) 設 N 為 $\triangle PQR$ 的外心，則 N 的坐標為 $(16,\ 7)$。

設 M 為 PR 的中點，則 $MN \perp PR$。

$$NS = 7 - (-48) = 55 \quad \text{1M}$$

$$NM = \sqrt{(40-16)^2 + (16-7)^2} = \sqrt{657} \neq 55$$

故此，N 不是 $\triangle PQR$ 的內心。

因此，C 的圓心與 $\triangle PQR$ 的內心不是同一點。 1A

10. (a) (i) 延長 CH 與 AB 相交於 K。

$\angle BAS = 90^\circ = \angle BCS$ （半圓上的圓周角）

$\angle BKC = \angle BOA = 90^\circ$ （垂心性質）

$\angle BAS = \angle BKC$

$AS // HC$ （同位角相等）

$\angle BCS = \angle BOA$

$SC // AH$ （同位角相等）

因此，$AHCS$ 為平行四邊形。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(ii) $GR \perp BC$ （已知）

$BR = RC$ （圓心至弦的垂線平分弦）

$BG = GS$ （半徑）

$SC = 2GR$ （中點定理）

$AH = SC$ （平行四邊形對邊）

$AH = 2GR$

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) 設圓的方程為 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$。

$$\begin{cases} (-6)^2 - 6D + F = 0 \\ 4^2 + 4D + F = 0 \\ 12^2 + 12E + F = 0 \end{cases}$$ 1M

解首兩條方程，可得 $D = 2$ 及 $F = -24$。 1A

故此，可得 $E = -10$。 1A

因此，圓的方程為 $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 24 = 0$。

(ii) G 的坐標為 $(-1,\ 5)$。

故此，R 的坐標為 $(-1,\ 0)$。

可得 $GR = 5$，並由此可得 $AH = 10$。

因此，H 的坐標為 $(0,\ 2)$。 1A

(iii) GH 的斜率 $= \dfrac{5-2}{-1-0} = -3$

BG 的斜率 $= \dfrac{5-0}{-1+6} = 1$

由於 GH 與 BG 的斜率之積不是 -1，$\angle BGH \neq 90^\circ$。 1M

$\angle BGH + \angle BOH = \angle BGH + 90^\circ \neq 180^\circ$

因此，B、O、H、G 不共圓。 1A

11. (a) (i) $\angle ABG = \angle DBG$ （內心性質）

$BG = BG$ （公共邊）

$AB = BD$ （已知）

$\triangle ABG \cong \triangle DBG$ （SAS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(ii) $\angle IAG = \angle EAB$ （內心性質）

$\angle ABE = 90^\circ$ （半圓上的圓周角）

$\angle AGI = \angle DGI$ （全等 △ 的對應角）

$\angle AGI + \angle DGI = 180^\circ$ （直線上的鄰角）

$\angle AGI = 90^\circ$

$= \angle ABE$

$\triangle AGI \sim \triangle ABE$ （AA）

$\dfrac{GI}{AG} = \dfrac{BE}{AB}$ （相似 △ 的對應邊）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) (i) 設 G 的坐標為 $(a,\ 0)$。

$$a = \frac{-25+11}{2}$$

$= -7$ 1A

G 的坐標為 $(-7,\ 0)$。

(ii) 留意 $AG = 11 + 7 = 18$。 1M

$$\frac{GI}{AG} = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$GI = \left(\frac{BE}{AB}\right) AG$$

$= \dfrac{1}{2}(18)$ 1M

$= 9$ 1A

I 的坐標為 $(-7,\ 9)$。
內切圓的方程為

$$(x+7)^2+(y-9)^2=9^2 \qquad \text{1A}$$
$$(x+7)^2+(y-9)^2=81$$

12. (a) $\angle BAP = \angle CAP$ （內心性質）
$\angle ACI = \angle BCI$ （內心性質）
$BP = CP$ （等角對等弦）
$\angle BCP = \angle CAP$ （等弦對等角）
$\angle CIP = \angle CAP + \angle ACI$ （△ 外角）
$= \angle BCP + \angle BCI$
$= \angle ICP$
$CP = IP$ （等角對等弦）
因此，$BP = CP = IP$。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) (i) 據 (a)，所求圓通過 B、C 及 I。
設圓的方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$。

$$\begin{cases}(-80)^2-80D+F=0\\ 64^2+64D+F=0\\ 32^2+32E+F=0\end{cases} \qquad \text{1M}$$

解首兩條方程，可得 $D=16$ 及 $F=-5120$。 1A
故此，可得 $E=128$。 1A
因此，所求方程為 $x^2+y^2+16x+128y-5120=0$。

(ii) P 的坐標為 $(-8,\ -64)$。
設 G 的坐標為 $(-8,\ k)$。 1M

$$GP = BG$$
$$(k+64)^2=(-8+80)^2+(k-0)^2 \qquad \text{1M}$$
$$k=\frac{17}{2}$$

由於 G 為 PQ 的中點，Q 的 y 坐標為 81。
因此，Q 的坐標為 $(-8,\ 81)$。 1A

(iii) BQ 的斜率 $=\dfrac{81-0}{-8+80}=\dfrac{9}{8}$
IQ 的斜率 $=\dfrac{81-32}{-8-0}=-\dfrac{49}{8}$

由於 BQ 與 IQ 的斜率之積不是 -1，$\angle BQI \neq 90^\circ$。 1M

$\angle BQI + \angle BRI = \angle BQI + 90^\circ \neq 180^\circ$

因此，B、Q、I、R 不共圓。 1A

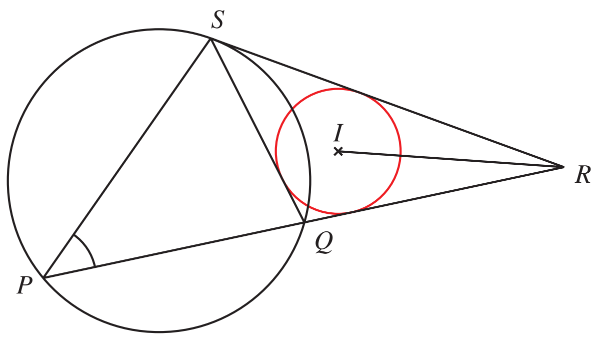
多項選擇題

1. $\boxed{\text{C}}$ (42.8%)

I 為 $\triangle QRS$ 的內心。

$\angle IRQ = \angle IRS = 12^\circ$
$\angle SRQ = 12^\circ + 12^\circ = 24^\circ$
$\angle QPS = \angle SQR$
在 $\triangle PSR$ 中，

$$70^\circ + 2\angle QPS + 24^\circ = 180^\circ$$
$$\angle QPS = 43^\circ$$



2. $\boxed{\text{B}}$ (44.1%)

I. ✗。垂心在 B。
II. ✓。形心永遠在三角形內。
III. ✗。內心永遠在三角形內。

3. $\boxed{\text{B}}$ (57%)

$BC = 2BL = 26\text{ cm}$
$AB = 2BN = 10\text{ cm}$
$AC = 2CM = 24\text{ cm}$
由於 $10^2 + 24^2 = 26^2$，$\angle BAC = 90^\circ$。
所求面積 $= \dfrac{(10)(24)}{2} = 120\text{ cm}^2$

4. $\boxed{\text{D}}$ (37%)

I. ✓。AD 為 BC 的垂直平分線。
II. ✓。AD 為通過 A 的高線。
III. ✓。AD 為通過 A 的中線。

5. $\boxed{\text{C}}$ (44%)

不包含任何步驟。

6. $\boxed{\text{A}}$ (30.3%)

外心在 OA 的垂直平分線上。
外心的 y 坐標 $= \dfrac{0+12}{2} = 6$

7. $\boxed{\text{A}}$ (29.9%)

通過 Q 的高線為水平線。

垂心的 y 坐標 = 48

設垂心的坐標為 $(x,\ 48)$。

$$\frac{48-0}{x-0}\times\frac{60-48}{0-96}=-1$$
$$x=6$$

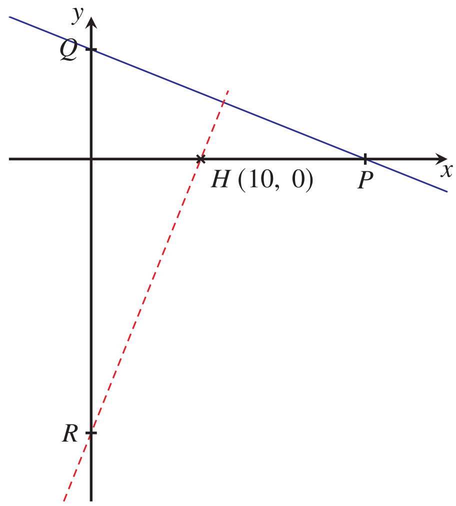
8. $\boxed{\text{A}}$ (19.9%)

設 R 的坐標為 $(0,\ r)$，及 H 為垂心。

通過 P 的高線為 x 軸 $\Rightarrow$ $H\,(10,\ 0)$

因 $RH \perp PQ$，

$$\frac{0-r}{10-0}\times\frac{-2}{5}=-1$$
$$r=-25$$



9. $\boxed{\text{C}}$ (32.4%)

設 Q 的坐標為 $(p,\ q)$。將 $\triangle OPQ$ 的垂心記為 H。

$OP \perp QH$ 及 $PH \perp OQ$

$$\frac{-18}{26}\times\frac{q-21}{p+3}=-1 \qquad \frac{-18+3}{26-21}\times\frac{q}{p}=-1$$
$$13p-9q=300 \qquad p-3q=0$$

求解後，可得 $p=30$ 及 $q=10$。

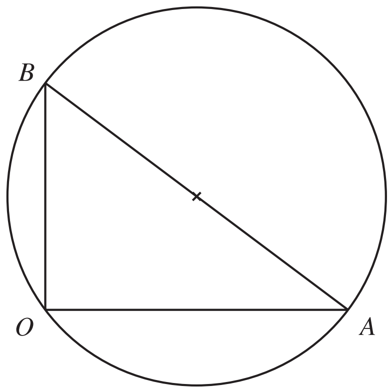
因此，Q 的 y 坐標等於 10。

10. $\boxed{\text{A}}$ (29.2%)

留意 $\angle AOB = 90^\circ$ 及 $\triangle OAB$ 為一直角三角形。

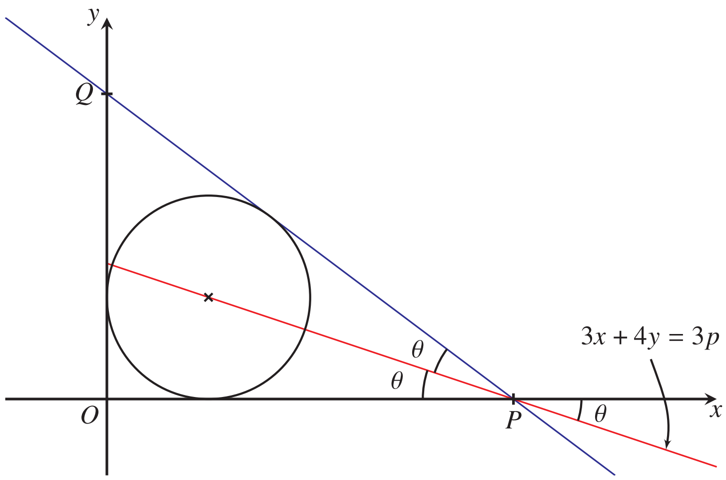
考慮外接圓 OAB，AB 為直徑。
$\triangle OAB$ 的外心為 AB 的中點。
AB 的中點的坐標為 $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$。

$$4\left(\frac{a}{2}\right) + 16\left(\frac{b}{2}\right) = 17a$$
$$8b = 15a$$
$$a : b = 15 : 8$$



11. $\boxed{\text{D}}$ (21.2%)

留意 $(p, 0)$ 滿足方程 $3x + 4y = 3p$。
直線 $3x + 4y = 3p$ 通過 $P\,(p, 0)$ 和 $\triangle OPQ$ 的內心。
故此，它是 $\angle OPQ$ 的角平分線。
設該直線與 x 軸之間的銳角為 θ。



直線的斜率 $= -\dfrac{3}{4} = -\tan\theta$ 及 $\dfrac{OQ}{OP} = \tan 2\theta$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ $\qquad \dfrac{q}{p} = \dfrac{24}{7}$

$$p : q = 7 : 24$$

12. $\boxed{\text{D}}$ (22.7%)

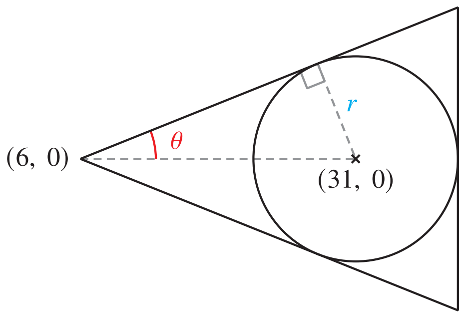
$4x + 3y = 24$ 與 $4x - 3y = 24$ 相交於 (6, 0)。該三角形沿 x 軸對稱，如下圖所示。

設 θ 為直線 $4x - 3y = 24$ 的傾角。

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{4}{3}$

$r = (31 - 6)\sin\theta = 20$

故此，$a = 31 + 20 = 51$。



13. $\boxed{\text{C}}$ (33.3%)

P 的坐標為 $\left(-\dfrac{k}{3}, 0\right)$。

解 $\begin{cases} 3x - 4y + k = 0 \\ 4x + 3y - k = 0 \end{cases}$。

Q 的坐標為 $\left(\dfrac{k}{25}, \dfrac{7k}{25}\right)$。

由於 $\triangle PQR$ 的內心在 x 軸上，PI 為 $\angle RPQ$ 的角平分線。

PR 的斜率 $= -1 \times (L_1$ 的斜率$) = -\dfrac{3}{4}$

PR 的方程為

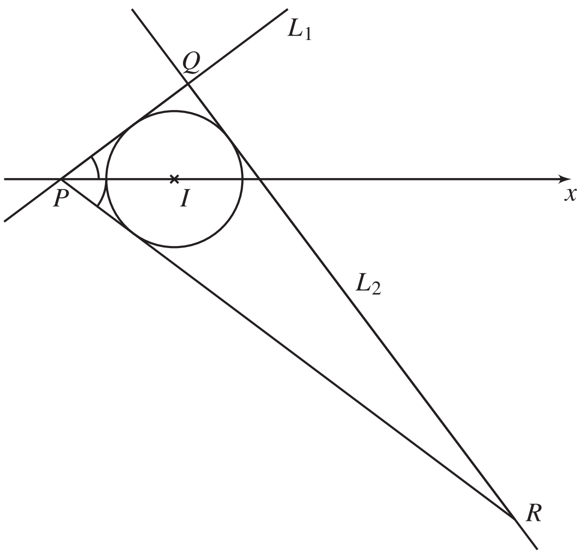
$$y - 0 = -\frac{3}{4}\left(x + \frac{k}{3}\right)$$

$$3x + 4y + k = 0$$

解 $\begin{cases} 3x + 4y + k = 0 \\ 4x + 3y - k = 0 \end{cases}$。

R 的坐標為 $(k, -k)$。

R 的 x 坐標為 k。



程式方法

設 $k = 300$。

P 及 Q 的坐標分別為 $(-100, 0)$ 及 $(12, 84)$。

留意 R 在 L_2: $4x + 3y - 300 = 0$ 上，可利用各選項中的值計算出 R 的坐標，再利用計算機程式計出 $\triangle PQR$ 的內心的坐標。

選項	R 的坐標	內心的坐標
A.	$(-2100,\ 2900)$	$(-84.1,\ 97.7)$
B.	$(-300,\ 500)$	$(-73.0,\ 96.1)$
C.	$(300,\ -300)$	$(0,\ 0)$
D.	$(2100,\ -2700)$	$(-1.72,\ -12.0)$

內心應在 x 軸上，答案為 C。

14. $\boxed{\text{D}}$ (23%)

將內心記為 X。

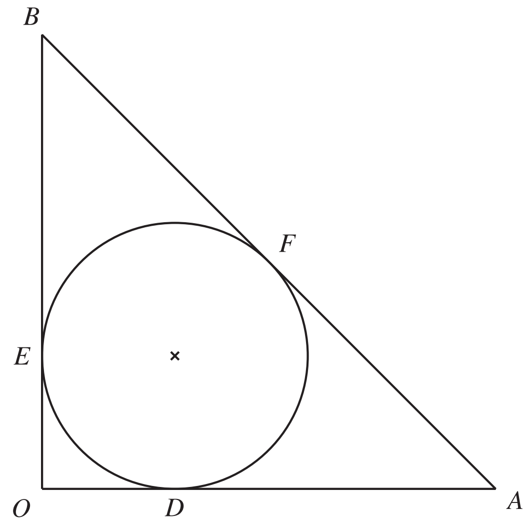
設 D、E 及 F 分別為 OA、OB 及 AB 上的點使得 $XD \perp OA$、$XE \perp OB$ 及 $XF \perp AB$。

設半徑為 r。

$OD = OE = r$。

$AD = AF = 6 - r$ 及 $BE = BF = 6 - r$。

$$(6 - r) + (6 - r) = \sqrt{6^2 + 6^2}$$
$$r = 6 - 3\sqrt{2}$$



15. $\boxed{\text{D}}$ (26%)

通過 B 的高線為鉛垂線。

垂心的 x 坐標為 24。

設垂心的坐標為 $(24,\ y)$。

$$\frac{y-0}{24-0} \times \frac{18-0}{24-48} = -1$$
$$y = 32$$

16. $\boxed{\text{D}}$ (35%)

外心與兩頂點等距。

$$\sqrt{(k+4)^2 + (-4+8)^2} = \sqrt{(k-6)^2 + (-4-2)^2}$$
$$k^2 + 8k + 32 = k^2 - 12k + 72$$
$$k = 2$$

– 試卷完 –