

$$1. (1+ax)^8 = \sum_{r=0}^8 C_r^8 (ax)^r = \sum_{r=0}^8 C_r^8 a^4 x^r \text{ 及 } (b+x)^9 = \sum_{r=0}^9 C_r^9 b^{9-r} x^r. \quad 1M+1M$$

由於 $\lambda_2 : \mu_7 = 9 : 4$ 及 $\lambda_1 + \mu_8 + 6 = 0$,

$$\frac{C_2^8 a^2}{C_7^9 b^2} = \frac{7}{4} \text{ 及 } 8a + 9b + 6 = 0. \quad 1M$$

故此，可得 $4a^2 = 9b^2$ 及 $b = \frac{-6-8a}{9}$ 。

$$4a^2 - 9 \left(\frac{-8a-6}{9} \right)^2 = 0$$

$$7a^2 + 24a + 9 = 0$$

1M

$$a = -3 \quad \text{或} \quad -\frac{3}{7}$$

1A

$$2. (1+ax)^n = 1 + nax + \frac{n(n-1)}{2} (ax)^2 + \dots \quad 1M+1A$$

$$\text{可得 } na = 6 \text{ 及 } \frac{n(n-1)}{2} a^2 = 16. \quad 1M$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{6}{n} \right)^2 = 16$$

$$18(n-1) = 16n$$

$$n = 9$$

1A

$$\text{當 } n = 9 \text{ 時, } a = \frac{2}{3}.$$

1A

$$3. (1+ax)^n = 1 + C_1^n ax + C_2^n (ax)^2 + \dots$$

$$= 1 + nax + \frac{n(n-1)}{2} a^2 x^2 + \dots$$

$$\text{可得 } na = -20 \text{ 及 } \frac{n(n-1)}{2} \cdot a^2 = 180. \quad 1M$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \left(\frac{-20}{n} \right)^2 = 180$$

1M

$$\frac{n-1}{2n} = \frac{9}{20}$$

$$20n - 20 = 18n$$

$$n = 10$$

1A

$$\text{當 } n = 10 \text{ 時, } a = -2.$$

1A

4. (a) $(a+x)^n = a^n + C_1^n a^{n-1}x + C_2^n a^{n-2}x^2 + \dots + x^n$
 可得 $C_2^n a^{n-2} = -10$ 。 1M
 由於 $C_2^n > 0$ ，可得 $a^{n-2} < 0$ 。
 故此， $a < 0$ 及 $n-2$ 為奇數。
 因此， a 為負數且 n 為奇數。 1
- (b) $(bx-1)^n = (-1)^n + C_1^n (-1)^{n-1}bx + C_2^n (-1)^{n-2}b^2x^2 + \dots + (bx)^n$

$$= -1 + bnx - \frac{n(n-1)}{2}b^2x^2 + \dots + b^nx^n$$
 1M
- $\lambda_0 = \mu_0$ 及 $\lambda_1 = 2\mu_1$
 $a^n = -1$ $bn = 2na^{n-1}$
 $a = -1$ $b = 2$ 或 $n = 0$ (捨去) 1A+1A
- $$\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} = -10$$

$$\left[\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right](-1) = -10$$

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 10 = 0$$

 $n = 5$ 或 -4 (捨去) 1A
5. 第 4 項 $= C_3^n (ax)^{n-3} \frac{1}{x^6} = C_3^n a^{n-3} x^{n-9}$ 。 1A
 當 $n-9=0$ 時， $n=9$ 。 1A
- $$C_3^9 a^6 = \frac{21}{2}$$
 1M

$$a^6 = \frac{1}{8}$$

 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (捨去) 1A
6. $C_2^n \cdot 2^2 = 40$ 1M

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 = 40$$

 $n^2 - n - 20 = 0$ 1A
 $n = 5$ 或 -4 (捨去) 1A
 所求係數 $= C_3^5 \cdot 2^3 = 80$ 。 1A

7. 通項 $= C_r^8 (x^2)^{8-r} \left(\frac{a}{x}\right)^r = C_r^8 a^r x^{16-3r}$ 。 1M
 當 $16 - 3r = 7$ 時， $r = 3$ ；當 $16 - 3r = 10$ 時， $r = 2$ 。

$$B_7 = 4B_{10}$$

$$C_3^8 a^3 = C_2^8 a^2$$

$$a = 2 \quad \text{或} \quad 0 \quad (\text{捨去})$$

1M
1A

8. $C_2^n + C_2^n (2)^2 = 75$ 1M+1A
 $\frac{n(n-1)}{2} (1+4) = 75$ 1A
 $n^2 - n - 30 = 0$
 $n = 6 \quad \text{或} \quad -5 \quad (\text{捨去})$ 1A

9. $C_1^n (4) + C_2^n (4)^2 = 180$ 1M+1A
 $4n + 16 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 180$ 1A
 $2n^2 - n - 45 = 0$
 $n = 5 \quad \text{或} \quad -\frac{9}{2} \quad (\text{捨去})$ 1A
 所求係數 $= C_3^5 (4)^3 = 640$ 。 1A

10. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5 - \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^5$

$$= \left[(x^2)^5 + 5(x^2)^4 \left(\frac{1}{x}\right) + 10(x^2)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 10(x^2)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 5(x^2) \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^5 \right]$$

$$- \left[(x^2)^5 - 5(x^2)^4 \left(\frac{1}{x}\right) + 5(x^2)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 10(x^2)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 5(x^2) \left(\frac{1}{x}\right)^4 - \left(\frac{1}{x}\right)^5 \right]$$

$$= 10x^7 + 20x + \frac{2}{x^5}$$

1A
1A

因此， $a = 10$ 、 $b = 20$ 及 $c = 2$ 。 1A

$$\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 - \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = 10(\sqrt{2})^7 + 20\sqrt{2} + \frac{2}{(\sqrt{2})^5}$$

$$= \frac{401\sqrt{2}}{4}$$

1M
1A

11. 通項 $= C_r^6 (x)^{6-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r$ 1M
 $= C_r^6 (-2)^r x^{6-2r}$
 當 $6 - 2r = 2$ 時, $r = 2$ 。 1M
 所求係數 $= C_2^6 (-2)^2 = 60$ 。 1A
12. 通項 $= C_r^8 (2x^3)^{8-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$ 2A
 $= C_r^8 (2)^{8-r} x^{24-4r}$
 當 $24 - 4r = 0$ 時, $r = 6$ 。 1M
 常數項 $= C_6^8 (2)^{8-6} = 112$ 。 1A
13. (a) 通項 $= C_r^9 (2x^2)^{9-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$ 1A
 $= C_r^9 (2)^{9-r} x^{18-3r}$ 1M
 當 $18 - 3r = 0$ 時, $r = 6$ 。 1M
 常數項 $= C_6^9 (2)^{9-6} = 672$ 。 1A
- (b) 當 $18 - 3r = 2$ 時, $r = \frac{16}{3}$, 不是整數。
 展式中沒有包含 x^2 項。 1M+1A
14. (a) 通項 $= C_r^{20} (x^2)^{20-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$ 1M
 $= C_r^{20} x^{40-3r}$
 當 $40 - 3r = 16$ 時, $r = 8$ 。 1M
 x^{16} 的係數 $= C_8^{20} = 125\,970$ 。 1A
- (b) 當 $40 - 3r = 0$ 時, $r = \frac{40}{3}$, 不是整數。 1M
 因此, 常數項 $= 0$ 。 1A

15. $(5+x)^4 = 5^4 + 4(5^3)x + 6(5^2)x^2 + 4(5)x^3 + x^4$ 1M
 $= 625 + 500x + 150x^2 + 20x^3 + x^4$ 1A
 $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^3 = 1 - 3\left(\frac{2}{x}\right) + 3\left(\frac{2}{x}\right)^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^3$ 1M
 $= 1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{8}{x^3}$
 常數項 $= (625)(1) + (500)(-6) + (150)(12) + (20)(-8)$ 1M
 $= -735$ 1A
16. $(x+3)^5 = x^5 + C_1^5(3)x^4 + C_2^5(3)^2x^3 + C_3^5(3)^3x^2 + C_4^5(3)^4x + 3^5$ 1M
 $= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$ 1A
 $(x+3)^5 \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 = (x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243) \left(x^2 - 8 + \frac{16}{x^2}\right)$ 1M
 所求係數 $= (1)(16) + (90)(-8) + (405)(1)$ 1M
 $= -299$ 1A
17. (a) $(1-4x)^n = 1 + C_1^n(-4x) + C_2^n(-4x)^2 + \dots$ 1M
 $\frac{n(n-1)}{2}(-4)^2 = 240$ 1M
 $n^2 - n - 30 = 0$
 $n = 6$ 或 -5 (捨去) 1A
- (b) $(1-4x)^6 = 4096x^6 - 6144x^5 + 3840x^4 + \dots$
 $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^5 = 1 + \frac{10}{x} + \frac{40}{x^2} + \dots$ 1M
 所求係數 $= 4096(40) - 6144(10) + 3840(1)$ 1M
 $= 106\,240$ 1A
18. (a) $(1-4x)^2(1+x)^n = (1-8x+16x^2) \left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots\right]$ 1M
 考慮 x 的係數，
 $n - 8 = 1$
 $n = 9$ 1A
- (b) $(1-4x)^2(1+x)^9 = (1-8x+16x^2)(1+9x+36x^2+\dots)$
 所求係數 $= (1)(36) + (-8)(9) + (16)(1)$ 1M
 $= -20$ 1A

19. (a) $(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$ 1A
- (b) $(1+kx)^9(1-x)^4 = (1+9kx+36k^2x^2+\dots)(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)$ 1A
- $$-3 = 1(6) + 9k(-4) + 36k^2(1)$$
- $$0 = 36k^2 - 36k + 9$$
- $$k = \frac{1}{2}$$
- 1A
20. $(2-3x)^5 = 2^5 + C_1^5(2)^4(-3x) + C_2^5(2)^3(-3x)^2 + C_3^5(2)^2(-3x)^3 + C_4^5(2)(-3x)^4 + (-3x)^5$ 1M
- $$= 32 - 240x + 720x^2 - 1080x^3 + 810x^4 - 243x^5$$
- $$\left(x + \frac{a}{x}\right)^2 = x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2}$$
- 考慮 x 的係數。
- $$(-240)(2) - 1080(a^2) = \frac{160}{3}$$
- $$-1080a^2 - 480a - \frac{160}{3} = 0$$
- $$a = -\frac{2}{9}$$
- 1A
- 所求係數 $= 32(1) + 720(2a) + 810(a^2)$ 1M
- $$= -248$$
- 1A
21. $(1+2x)^3 = 1 + 6x + 12x^2 + \dots$ 1A
- $$(1+3x)^4 = 1 + 12x + 54x^2 + \dots$$
- $$(1+2x)^4(1+3x)^4 = (1+6x+12x^2+\dots)(1+12x+54x^2+\dots)$$
- $$= 1 + 18x + 138x^2 + \dots$$
- 1M+1A
22. $(1+2x)^4 = 1 + 4(2x) + 6(2x)^2 + \dots = 1 + 8x + 24x^2 + \dots$ 1A
- $$(1-x)^7 = 1 + 7(-x) + 21(-x)^2 + \dots = 1 - 7x + 21x^2 + \dots$$
- 在 $(1+2x)^4(1-x)^7$ 的展式中，
- $$x^2 \text{ 的係數} = (1)(21) + (8)(-7) + (24)(1)$$
- $$= -11$$
- 1M
- 1A

23. $(1+3x)^4(1-2x)^5$
 $= [1+4(3x)+6(3x)^2+\dots][1+5(-2x)+10(-2x)^2+\dots]$ 1A
 $= (1+12x+54x^2+\dots)(1-10x+40x^2+\dots)$
 $a = (1)(-10) + (12)(1)$ 1M
 $= 2$ 1A
 $b = (1)(40) + (12)(-10) + (54)(1)$
 $= -26$ 1A
24. $(1+x)^{10}\left(1-\frac{2}{x}\right)^3$
 $= (1+10x+45x^2+120x^3+\dots)\left(1-\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)$ 1A
 常數項 $= (1)(1) + (10)(-6) + (45)(12) + (120)(-8)$ 1M
 $= -479$ 1A
25. (a) $(1-2x)^3 = 1-6x+12x^2-8x^3$ 1A
 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^5 = 1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}+\frac{10}{x^3}+\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^5}$ 1A
 (b) $(1-2x)^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^5 = (1-6x+12x^2-8x^3)\left(1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}+\frac{10}{x^3}+\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)$
 (i) 常數項 $= (1)(1) + (-6)(5) + (12)(10) + (-8)(10)$ 1M
 $= 11$ 1A
 (ii) x 的係數 $= (-6)(1) + (12)(5) + (-8)(10)$
 $= -26$ 1A
26. $(1+2x)^7 = 1+7(2x)+21(2x)^2+\dots$
 $= 1+14x+84x^2+\dots$ 1A
 $(1+2x)^7(2-x)^2 = (1+14x+84x^2+\dots)(4-4x+x^2)$
 $= 4 + [(1)(-4) + (14)(4)]x + [(1)(1) + (14)(-4) + (84)(4)]x^2 + \dots$ 1M
 $= 4 + 52x + 281x^2 + \dots$ 1A

27. (a) $(1+2x)^6 = 1 + C_1^6(2x) + C_2^6(2x)^2 + C_3^6(2x)^3 + \dots$
 $= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + \dots$ 1A
- (b) $\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(1+2x)^6 = \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + \dots)$
 常數項 $= (1)(1) + (-1)(12) + (1)(60)$ 1M
 $= 49$ 1A
28. (a) $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3(2x)\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3$
 $= 8x^3 + 12x + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^3}$ 1A
- (b) $(3x^2 - x - 5)\left(2x + \frac{1}{x}\right)^3 = (3x^2 - x - 5)\left(8x^3 + 12x + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$
 x 的係數 $= (3)(6) + (-5)(12)$ 1M
 $= -42$ 1A
29. $(1+ax)^4(1-4x)^3 = (1+4ax-6a^2x^2+\dots)(1-12x+48x^2+\dots)$ 1A
 $= 1 + (4a-12)x + (6a^2-48a+48)x^2 + \dots$ 1M
- $4a-12=0$
 $a=3$ 1A
- 所求係數 $= 6a^2 - 48a + 48 = -42$ 。 1A
30. (a) $(1+3x)^2(1+x)^n = (1+6x+9x^2)\left[1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\dots\right]$ 1A
- $n+6=10$ 1M
 $n=4$ 1A
- (b) 所求係數 $= \frac{4(4-1)}{2} + 6(4) + 9 = 39$ 。 1A

$$31. (1-2x)^4 = 1 + C_1^4(-2x) + C_2^4(-2x)^2 + \dots \quad 1A$$

$$= 1 - 8x + 24x^2 + \dots$$

$$(1+x)^n = 1 + C_1^n x + C_2^n x^2 + \dots$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$$

$$(1+x)^n(1-2x)^4 = 1 + (n-8)x + \left[\frac{n(n-1)}{2} - 8n + 24 \right] x^2 + \dots \quad 1M$$

$$\frac{n(n-1)}{2} - 8n + 24 = 54 \quad 1M$$

$$n^2 - 17n - 60 = 0$$

$$n = 20 \quad \text{或} \quad -3 \quad (\text{捨去}) \quad 1A$$

$$x \text{ 的係數} = C_1^{20} - 8$$

$$= 12 \quad 1A$$

$$32. \quad (a) \quad (1+2x)^n = 1 + C_1^n(2x) + C_2^n(2x)^2 + C_3^n(2x)^3 + \dots$$

$$= 1 + 2C_1^n x + 4C_2^n x^2 + 8C_3^n x^3 + \dots \quad 1A$$

$$(b) \quad \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 (1+2x)^n = \left(x^2 - 6 + \frac{9}{x^2}\right) \left(1 + 2C_1^n x + 4C_2^n x^2 + \dots\right)$$

$$(-6)(1) + (9)(4C_2^n) = 210 \quad 1M$$

$$-6 + 36 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 210 \quad 1M$$

$$n^2 - n - 12 = 0$$

$$n = 4 \quad \text{或} \quad -3 \quad (\text{捨去}) \quad 1A$$