

REG-COT-2425-ASM-SET 3-MATH

建議題解

結構式試題

1. (a) $a = \frac{(PQ)r}{2} + \frac{(QR)r}{2} + \frac{(PR)r}{2}$ 1M
 $= \frac{r}{2}(PQ + QR + PR)$
 $= \frac{pr}{2}$ 1

(b) $AB = \sqrt{(9-2)^2 + (18+6)^2} = 25$ 、 $BC = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$ 及 $AC = 39$ 。
 設 $\triangle ABC$ 的內切圓的半徑為 r 。

$$\frac{(41-2)(18+6)}{2} = \frac{(25+40+39)r}{2}$$
1M

$$r = 9$$
1A

所求 y 坐標 $= -6 + 9 = 3$ 1A

2. (a) $PB = PD$ 及 $\angle PBD = \frac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \frac{x}{2}$ 1M

$$\angle BAD = \angle PBD = 90^\circ - \frac{x}{2}$$
1A

$$\angle ABC = 90^\circ$$

$$\angle AQB = 180^\circ - 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$
1A

(b) (i) 由於 $PB = PD = PR$ ，可得 $\angle BRD = \angle PDR$ 。 1M

$$\angle BRD + \angle PDR = x$$

$$\angle BRD = \frac{x}{2}$$
1A

(ii) 留意 $\angle BRD = \angle BQD = \frac{x}{2}$ 。

B 、 D 、 Q 、 R 共圓。 1M

由於 $PB = PD = PR$ ， P 為圓 BDR 的圓心，即圓 $BDQR$ 的圓心。

因此， P 為 $\triangle BDQ$ 的外接圓的圓心。

同意該宣稱。 1A

3. (a) $\angle BPA = 90^\circ$ (已知)

$$\angle GMA = 90^\circ$$
 (外心性質)

$$= \angle BPA$$

$$BC \parallel GM$$
 (同位角相等)

$$\angle BDC = \angle MDG$$
 (對頂角)

$$\angle CBD = \angle GMD$$
 (錯角， $BC \parallel GM$)

$$\triangle BCD \sim \triangle MGD$$
 (AA)

| 評分標準 | | |
|------|-----------------------|---|
| 情況 1 | 附有正確理由的任何正確證明。 | 3 |
| 情況 2 | 未附有理由的任何正確證明。 | 2 |
| 情況 3 | 附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。 | 1 |

(b) (i) $GM = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$ 1A
 G 的坐標為 $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}\right)$ 。

$$BG = r$$

$$\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h\right)^2 = r^2 - \frac{(a - 2b)^2}{4}$$
1M

由於 $h > GM > 0$, $\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h < 0$ 。

$$\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h = -\sqrt{r^2 - \frac{(a - 2b)^2}{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} + \frac{\sqrt{4r^2 - (a - 2b)^2}}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2} + \sqrt{4r^2 - a^2}}{2}$$
1

(ii) $BD : DM = 2 : 1$ 1A

$BC : GM = BD : DM = 2 : 1$ 及 $BC = 2GM = \sqrt{4r^2 - a^2}$ 1M

$$CP = h - \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2} - \sqrt{4r^2 - a^2}}{2}$$

(AB 的斜率) \times (OC 的斜率)

$$= \frac{h - 0}{b - a} \times \frac{CP}{b}$$

$$= \frac{1}{4b(b - a)} \left[(\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2})^2 - (\sqrt{4r^2 - a^2})^2 \right]$$

$$= \frac{4b(a - b)}{4b(b - a)}$$

$$= -1$$
1M

由於 $BC \perp OA$ 及 $OC \perp AB$, C 為 $\triangle OAB$ 的垂心。

1

(iii) $h = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2} + \sqrt{4r^2 - a^2}}{2} = 49$

$$CP = h - \sqrt{4r^2 - a^2} = 31$$

$$D \text{ 的 } x \text{ 坐標} = \frac{2\left(\frac{80}{2}\right) + 31}{1 + 2} = 37$$
1M

$$\begin{aligned}\text{所求面積} &= \frac{(40-31)(49)}{2} - \frac{(49-31)(37-31)}{2} \\ &= \frac{333}{2}\end{aligned}$$

1A

4. (a) $\angle PGT = \angle QGT$ (切線性質)

$PR = QR$ (對角對等弦)

$\angle RQP = \angle RPQ$ (等腰 \triangle 底角)

$\angle RQT = \angle RPQ$ (交錯弓形的圓周角)

$$= \angle RQP$$

因此， QR 為 $\angle PQT$ 的角平分線。

| 評分標準 | | |
|------|-----------------------|---|
| 情況 1 | 附有正確理由的任何正確證明。 | 3 |
| 情況 2 | 未附有理由的任何正確證明。 | 2 |
| 情況 3 | 附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。 | 1 |

(b) (i) 斜率 = $\frac{7+68}{12+88} = \frac{3}{4}$
所求方程為

$$y - 7 = \frac{3}{4}(x - 12)$$

$$3x - 4y - 8 = 0$$

1A

(ii) 留意 GT 為 $\angle PTQ$ 的角平分線。

$\triangle PQT$ 的內心為 R 。

1M

$$GR = GQ = 7 + 68 = 75$$

$$GT = \sqrt{(12+88)^2 + (6+68)^2} = 125$$

可得 $GR : RT = 75 : (125 - 75) = 3 : 2$ 。

設 R 的坐標為 (a, b) 。

$$\frac{12-a}{a+88} = \frac{3}{2} \quad \text{及} \quad \frac{7-b}{b+68} = \frac{3}{2}$$

1M

$$a = -48 \quad b = -38$$

$\triangle PQT$ 的內心的坐標為 $(-48, -38)$ 。

1A

(iii) 假定 $\triangle PQT$ 的內切圓與 QT 相切於 U 。

$\triangle PQT$ 的內切圓的半徑

$$= RU$$

$$= -38 + 68$$

1M

$$= 30$$

留意 $GPTQ$ 為圓內接四邊形。

$\triangle PQT$ 的外接圓通過 G 。

$\triangle PQT$ 的外接圓的半徑

$$= \frac{GT}{2}$$

1M

$$= \frac{125}{2}$$

所求之比

$$= 2(30)\pi : 2\left(\frac{125}{2}\right)\pi$$

$$= 12 : 25$$

$$\neq 1 : 2$$

不同意該宣稱。

1A

5. (a) C 的方程為 $(x+6)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 。

1A

$$\left(\frac{14+ky}{4} + 6\right)^2 + (y-4)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{k^2}{16} + 1\right)y^2 + \left(\frac{19k}{4} - 8\right)y + \frac{425}{4} - r^2 = 0$$

$$(k^2 + 16)y^2 + 4(19k - 32)y + 1700 - 16r^2 = 0$$

L 為 C 的切線。

$$[4(19k - 32)]^2 - 4(k^2 + 16)(1700 - 16r^2) = 0$$

1M

$$r^2 = \frac{1700}{16} - \frac{(19k - 32)^2}{4(k^2 + 16)}$$

$$= \frac{(4k + 38)^2}{k^2 + 16}$$

1A

(b) (i) E 的坐標為 $(-4, -10)$ 。

1A

L 通過點 D 。

$$4(8) - k(6) - 14 = 0$$

$$k = 3$$

設 F 的坐標為 (a, b) 。

$$DF = EF$$

$$\sqrt{(a-8)^2 + (b-6)^2} = \sqrt{(a+4)^2 + (b+10)^2}$$

$$-24a - 32b - 16 = 0$$

$$a = -\frac{4b}{3} - \frac{2}{3}$$

G 為 $\triangle DEF$ 的外心。

$$GF = GD$$

$$\sqrt{(a+6)^2 + (b-4)^2} = \sqrt{(8+6)^2 + (6-4)^2} \quad 1M$$

$$\left(-\frac{4b}{3} - \frac{2}{3} + 6\right)^2 + (b-4)^2 = 200$$

$$\frac{25b^2}{9} - \frac{200b}{9} - \frac{1400}{9} = 0$$

$$b = 4 \pm 6\sqrt{2}$$

F 的坐標為 $(-6+8\sqrt{2}, 4-6\sqrt{2})$ 或 $(-6-8\sqrt{2}, 4+6\sqrt{2})$ 。 1A

(ii) L 為 $\triangle DFH$ 的內切圓的切線。

利用 (a)，若 G 為內心，則 $r^2 = \frac{[4(3) + 38]^2}{3^2 + 16} = 100$ 。 1M

該內切圓的半徑為 10。

設 K 為內切圓與 L 的切點。

$$\sin \angle GDK = \frac{r}{DG} \quad 1M$$

$$\angle GDK = 45^\circ$$

留意 E 在 L 上，可得 $\angle FDH = \angle FDE$ 。

EF 的中點的坐標為 $(-5+4\sqrt{2}, -3-3\sqrt{2})$ 或 $(-5-4\sqrt{2}, -3+3\sqrt{2})$ 。

以上與 G 的坐標不相符。

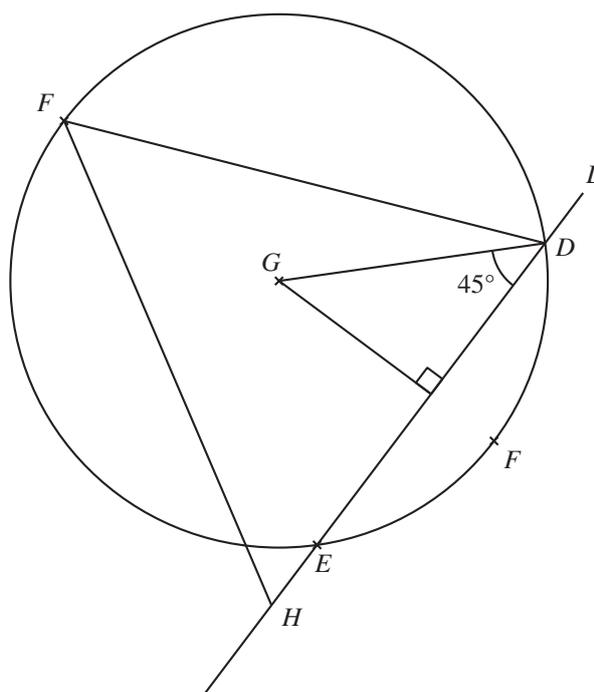
EF 不是圓 DEF 的直徑。

由此， $\angle FDE \neq 90^\circ$ 及 $\angle FDH = \angle FDE \neq 90^\circ$ 。 1M

可得 $\angle FDH \neq 2\angle GDK$ 及 DG 不是 $\angle FDH$ 的角平分線。

G 不是 $\triangle DFH$ 的內心。

不同意該宣稱。 1A



$$\begin{aligned}
 6. \quad (a) \quad f(-2) &= k(-2)^2 + (2k-2)(-2) - 4 \\
 &= 4k - 4k + 4 - 4 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$y = f(x)$ 的圖像通過 A 。

1

$$(b) \quad (i) \quad f(x) = kx^2 + (2k-2)x - 4$$

$$= k \left[x - 2(x) \left(\frac{1-k}{k} \right) + \left(\frac{1-k}{k} \right)^2 \right] - \frac{(k+1)^2}{k}$$

1M

$$= k \left[x - \frac{1-k}{k} \right]^2 - \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$Q \text{ 的坐標為 } \left(\frac{1-k}{k}, -\frac{(k+1)^2}{k} \right)。$$

1A

(ii) C 的坐標為 $(0, -4)$ 。

1A

設 R 的坐標為 $\left(\frac{1-k}{k}, r \right)$ ，其中 r 為一常數。

1M

$$RA = RC$$

$$\sqrt{\left(\frac{1-k}{k} + 2 \right)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{1-k}{k} \right)^2 + (r+4)^2}$$

1M

$$\left(\frac{1-k}{k} \right)^2 + 4 \left(\frac{1-k}{k} \right) + 4 + r^2 = \left(\frac{1-k}{k} \right)^2 + r^2 + 8r + 16$$

$$4 \left(\frac{1-k}{k} \right) - 12 = 8r$$

$$r = \frac{1-4k}{2k}$$

1A

R 的坐標為 $\left(\frac{1-k}{k}, \frac{1-4k}{2k} \right)$ 。

(iii) 可得 $\angle RCQ = 90^\circ$ 。

$$\frac{\frac{1-4k}{2k} + 4}{\frac{1-k}{k} - 0} \times \frac{-\frac{(k+1)^2}{k} + 4}{\frac{1-k}{k} - 0} = -1$$

1M+1M

$$\frac{1+4k}{2k} \times \frac{-k^2 + 2k - 1}{k} = -\left(\frac{1-k}{k} \right)^2$$

$$\frac{1+4k}{2k} \times \frac{(k-1)^2}{k} = \frac{(1-k)^2}{k^2}$$

$$1+4k = 2$$

$$k = \frac{1}{4}$$

1A

R 的坐標為 $(3, 0)$ 。

所求面積 = $AR^2\pi$

$$= (3+2)^2\pi$$

$$= 25\pi$$

1A