REG-COT-2425-ASM-SET 2-MATH
建議題解

多項選擇題

1. A	2. C	3. D	4. A	5. A
6. B	7. C	8. B	9. B	10. A
11. B	12. C	13. D	14. D	15. A

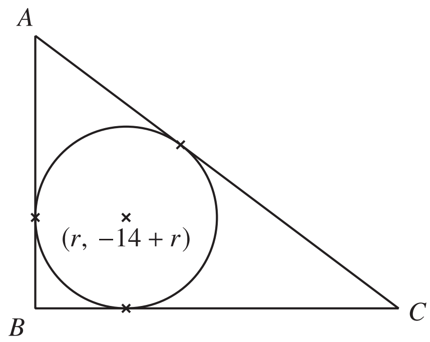
1. $\boxed{\text{A}}$

留意 $\angle ABC = 90°$。

設半徑為 r cm。
圓心的坐標為 $(r, -14 + r)$。
考慮 AC 的長度。

$$(24 - r) + (18 - r) = \sqrt{18^2 + 24^2}$$
$$r = 6$$

圓心的坐標為 $(6, -8)$。



2. $\boxed{\text{C}}$

A 及 B 的坐標分別為 $\left(\frac{k}{6},\ 0\right)$ 及 $\left(0,\ -\frac{k}{3}\right)$。
將 AB 的中點記為 M。
M 的坐標為 $\left(\frac{k}{12},\ -\frac{k}{6}\right)$。
設 C 的坐標為 $(c,\ 0)$。
可得 $CG : GM = 2 : 1$，其中 G 為 $\triangle ABC$ 的形心。

$$\begin{aligned}\frac{CG}{GM} &= \frac{c-0}{0-\frac{k}{12}} \\ 2 &= -\frac{12c}{k} \\ c &= -\frac{k}{6}\end{aligned}$$

> A 及 B 的坐標為 $\left(\frac{k}{6},\ 0\right)$ 及 $\left(0,\ -\frac{k}{3}\right)$。
> 設 C 的坐標為 $(c,\ 0)$。
> 留意 $\triangle ABC$ 的形心的 x 坐標為 0。
>
> $$\begin{aligned}\frac{\frac{k}{6}+0+c}{3} &= 0 \\ c &= -\frac{k}{6}\end{aligned}$$

3. $\boxed{\text{D}}$

G 為圓 ABC 的圓心。
半徑 $= GB = \sqrt{(18-10)^2+(3+3)^2} = 10$
由於 A 為該圓上的一點，A 的 y 坐標在 $3+10$ 與 $3-10$ 之間，包含首尾兩項。
因此，-8 不是 A 的可取 y 坐標。

4. $\boxed{\text{A}}$

AB 為 $\angle CAD$ 的角平分線。
$\angle BAC = \angle BAD = 48^\circ$
$\angle ACD = \angle BAD = 48^\circ$

$$\begin{aligned}\angle ADC + \angle ACD + \angle CAD &= 180^\circ \\ \angle ADC + 48^\circ + (48^\circ + 48^\circ) &= 180^\circ \\ \angle ADC &= 36^\circ\end{aligned}$$

5. $\boxed{\text{A}}$

留意 $\angle POQ = 90^\circ$。
$\triangle OPQ$ 的垂心為 O。
$\triangle OPQ$ 的外心為 PQ 的中點。
$\triangle OPQ$ 的外心的坐標為 $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$。
直線 $2x - y = 3k$ 通過 O 及 $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$。

$$\begin{cases} 2(0) - 0 = 3k \\ 2\left(\frac{p}{2}\right) - \frac{q}{2} = 3k \end{cases}$$

求解後，可得 $k = 0$ 及 $2p = q$。
因此，$p : q = 1 : 2$。

6. $\boxed{\text{B}}$

將 AB 的中點記為 M。
設 G 為 $\triangle ABP$ 的形心。
留意 $MG : GP = 1 : 2$。
G 的 y 坐標因此為常數。
$\triangle ABP$ 的形心的軌跡為一平行於 L 的直線。

7. $\boxed{\text{C}}$

I. ✓。BC 的中點的 y 坐標為 0。
$\triangle ABC$ 的形心的 y 坐標
$= \dfrac{1(6) + 2(0)}{1 + 2}$
$= 2$
$\triangle ABC$ 的形心在 $y = 2$ 上。

II. ✓。留意 y 軸通過 A 且垂直於 BC。
因此，$\triangle ABC$ 的垂心在 y 軸上。

8. $\boxed{\text{B}}$

三個頂點的坐標為 (0, 0)、(6, 0) 及 (0, 8)。

設內切圓的半徑為 r。

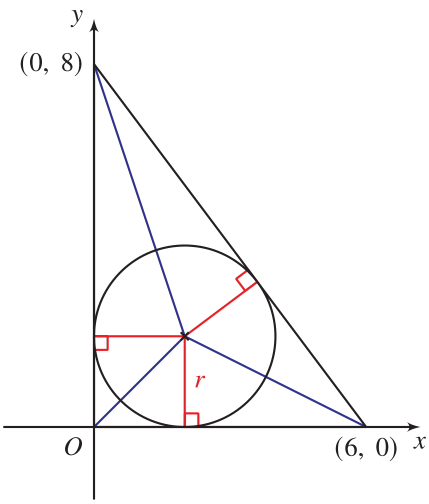
斜邊的長度 $= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

考慮三角形的面積。

$$\frac{(6)(8)}{2} = \frac{(6)(r)}{2} + \frac{(8)(r)}{2} + \frac{(10)(r)}{2}$$

$$r = 2$$

內心的坐標為 (2, 2)。



9. $\boxed{\text{B}}$

$$\angle BAC + 2\angle CBD + 2\angle BCD = 180^\circ$$

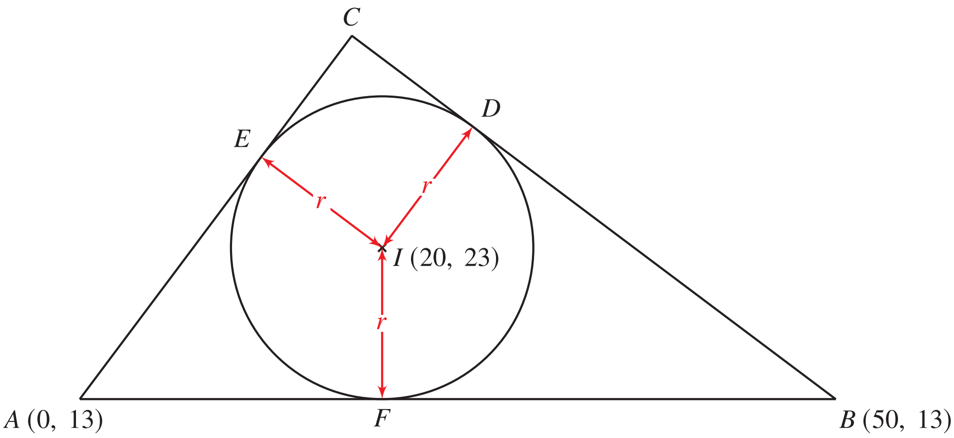
$$\angle CBD + \angle BCD = 55^\circ$$

$$\angle BDC + \angle CBD + \angle BCD = 180^\circ$$

$$\angle BDC = 125^\circ$$

10. $\boxed{\text{A}}$

由於 C 為 $\triangle ABC$ 的垂心，$\angle ACB = 90^\circ$。
設 D、E 及 F 為切點，如下圖所示。將 $\triangle ABC$ 的內心記為 I。



考慮從 (20, 23) 至 AB 的垂直距離。

$$r = 23 - 13$$
$$= 10$$

留意 $CDIE$ 為正方形。
可得 $AC = AE + r = AF + r = 20 + 10 = 30$。
考慮 A 至 C 的水平距離。

$$\begin{aligned}\text{水平距離} &= AC\cos\angle BAC \\ &= 30\cos\angle BAC \\ &= 30\left(\frac{AC}{AB}\right) \qquad \text{（留意 } \angle ABC \text{ 為一直角三角形。）} \\ &= 30 \times \frac{30}{50} \\ &= 18\end{aligned}$$

C 的 x 坐標為 $0 + 18 = 18$。

11. $\boxed{\text{B}}$

I. ✓。由於 G 為 $\triangle ABC$ 的垂心，$\angle AQG = \angle ARG = 90^\circ$。
$AQGR$ 為圓內接四邊形　（*對角互補*）。

II. ✓。由於 G 為 $\triangle ABC$ 的垂心，$\angle CQB = \angle CRB = 90^\circ$。
$BCQR$ 為圓內接四邊形　（*同弓形內的圓周角的逆定理*）。

III. ✗。留意通過 C、Q 及 R 的圓為圓 $BCQR$。
由於 P 為線段 BC 上的一點，P 在圓 $BCQR$ 內。
$CPRQ$ 不可能為圓內接四邊形。

12. $\boxed{\text{C}}$

P 的坐標為 $\left(-\frac{k}{3},\ 0\right)$。

解 $\begin{cases} 3x - 4y + k = 0 \\ 4x + 3y - k = 0 \end{cases}$ 。

Q 的坐標為 $\left(\frac{k}{25},\ \frac{7k}{25}\right)$。

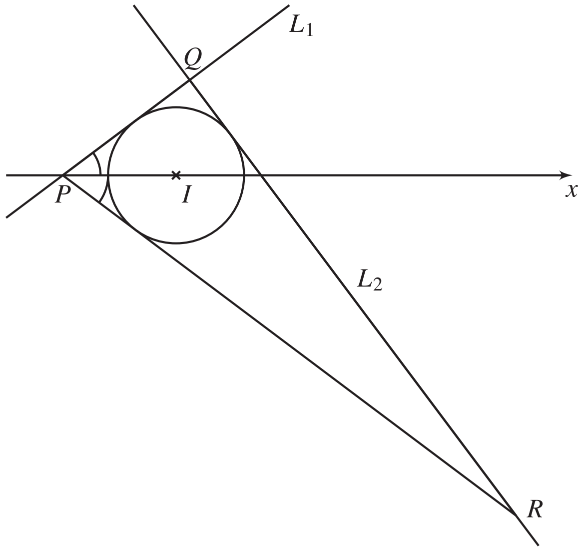
由於 $\triangle PQR$ 的內心在 x 軸上，PI 為 $\angle RPQ$ 的角平分線。

PR 的斜率 $= -1 \times$ (L_1 的斜率) $= -\frac{3}{4}$

PR 的方程為

$$y - 0 = -\frac{3}{4}\left(x + \frac{k}{3}\right)$$

$$3x + 4y + k = 0$$



解 $\begin{cases} 3x + 4y + k = 0 \\ 4x + 3y - k = 0 \end{cases}$ 。

R 的坐標為 $(k,\ -k)$。

R 的 x 坐標為 k。

程式方法

設 $k = 300$。

P 及 Q 的坐標分別為 $(-100,\ 0)$ 及 $(12,\ 84)$。

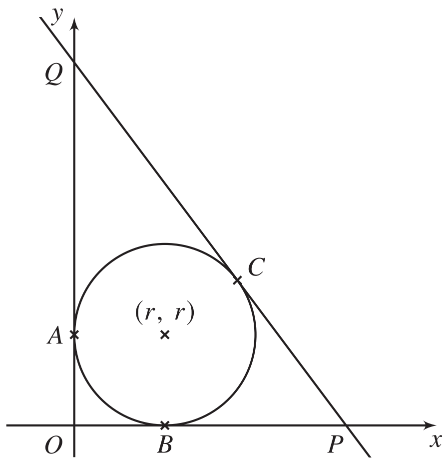
留意 R 在 L_2: $4x + 3y - 300 = 0$ 上，可利用各選項中的值計算出 R 的坐標，再利用計算機程式計出 $\triangle PQR$ 的內心的坐標。

選項	R 的坐標	內心的坐標
A.	$(-2100,\ 2900)$	$(-84.1,\ 97.7)$
B.	$(-300,\ 500)$	$(-73.0,\ 96.1)$
C.	$(300,\ -300)$	$(0,\ 0)$
D.	$(2100,\ -2700)$	$(-1.72,\ -12.0)$

內心應在 x 軸上，答案為 C。

13. $\boxed{\text{D}}$

P 及 Q 的坐標分別為 $(6,\ 0)$ 及 $(0,\ 8)$。



設內切圓的半徑為 r。

考慮 $\triangle OPQ$ 的面積。

$$\frac{(6)(8)}{2} = \frac{(6)(r)}{2} + \frac{(8)(r)}{2} + \frac{(\sqrt{6^2+8^2})(r)}{2}$$

$$r = 2$$

所求坐標為 $(2,\ 2)$。

參照上圖。 $OA = OB = r$ $BP = CP = 6 - r$ $AQ = CQ = 8 - r$ 考慮 PQ 的長度。 $(6-r) + (8-r) = \sqrt{6^2+8^2}$ $r = 2$ 所求坐標為 $(2,\ 2)$。

14. $\boxed{\text{D}}$

留意 $AB = AD = AE$。

A 為 BDE 的外接圓的圓心。

由於 BE 為圓 BDE 的直徑，可得 $\angle BDE = 90^\circ$。

$\angle ADE = \angle DEA = 35^\circ$

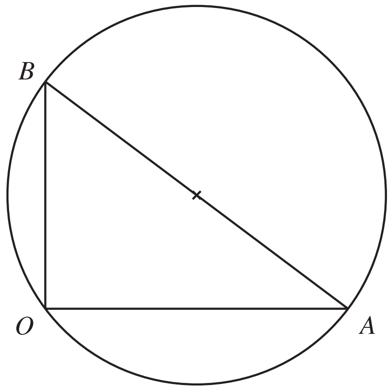
$\angle ADB = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

$\angle CBD = \angle ADB = 55^\circ$

15. $\boxed{\text{A}}$

留意 $\angle AOB = 90^\circ$ 及 $\triangle OAB$ 為一直角三角形。

考慮外接圓 OAB，AB 為直徑。
$\triangle OAB$ 的外心為 AB 的中點。
AB 的中點的坐標為 $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$。



$$4\left(\frac{a}{2}\right) + 16\left(\frac{b}{2}\right) = 17a$$
$$8b = 15a$$
$$a : b = 15 : 8$$

結構式試題

16. (a) L_2 的斜率 $= -\dfrac{1}{2}$。L_1 的斜率 $= 2$。 1M

L_1 的方程為

$$y - 4 = 2(x - 3)$$

$$y = 2x - 2$$ 1A

(b) $B\ (8,\ 0)$ 及 $C\ (0,\ 4)$ 1A

由於 AC 平行於 x 軸，垂心的 x 坐標 $= 8$。 1A

設垂心的坐標為 $(8,\ k)$。

$$\frac{k-4}{8-0} \times \frac{4-0}{3-8} = -1$$ 1M

$$k = 14$$

所求坐標為 $(8,\ 14)$。 1A

17. (a) AB 的斜率 $= \dfrac{4-0}{3-2} = 4$ 1M

L 的方程為 $y = -\dfrac{x}{4}$。 1A

(b) 垂心在通過 B 的高線上，即 $x = 3$。

代 $x = 3$ 至 L 的方程，$y = -\dfrac{3}{4}$。 1M

垂心的坐標為 $\left(3,\ -\dfrac{3}{4}\right)$。 1A

18. (a) $CE \perp AB$ *（垂心性質）*

$BD \perp AC$ *（垂心性質）*

$\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$

因此，$BCDE$ 為圓內接四邊形。 *（同弓形內的圓周角的逆定理）*

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) 圓心的坐標 $= \left(\dfrac{-6+14}{2},\ \dfrac{-6-6}{2}\right) = (4,\ -6)$ 1A

圓的方程為

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = (0-4)^2 + (8+6)^2$$ 1M

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 100$$ 1A

(ii) A 與圓心的距離 $= \sqrt{4^2 + (-6-8)^2} = \sqrt{212}$

圓的半徑 $= 10$

兩切線之間的角 $= 2 \times \sin^{-1} \dfrac{10}{\sqrt{212}} \approx 86.8^\circ \neq 90^\circ$ 1M+1A

不同意該宣稱。 1A

19. (a) $$\frac{y-2}{x-1}\times\frac{y-8}{x-9}=-1$$ 1M+1A

$(y-2)(y-8)+(x-1)(x-9)=0$

$x^2+y^2-10x-10y+25=0$ 1A

(b) (i) $8^2+1^2-10(8)-10(1)+25=0$

因此，C 在 S 上。 1

(ii) $(5,\ 5)$ 1A

(iii) 由於 AB 是圓的直徑，$\angle ACB=90^\circ$。

所以，垂心 H 在點 $C\,(8,\ 1)$。 1M

外心 J 為 AB 的中點。連接 J 及 H 的線為 $\triangle ABC$ 的中線。

由於形心 G 在 $\triangle ABC$ 的中線上，G、J、H 共線。

同意該宣稱。 1A

20. (a) 設 $x=\angle BAI$ 及 $y=\angle ABI$。

$\angle PAC=\angle BAI=x$ （內心性質）

$PB=PC$ （等角對等弦）

$\angle PIB=\angle ABI+\angle BAI$ （$\triangle$ 外角）

$=x+y$

$\angle IBC=\angle ABI=y$ （內心性質）

$\angle PBC=\angle PAC=x$ （同弓形內的圓周角）

$\angle IBP=x+y$

$=\angle PIB$

$PB=PI$ （等角對等邊）

因此，$PB=PI=PC$。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) $\angle IAY=\angle PSC$ （同弓形內的圓周角）

$\angle AYI=90^\circ$ （已知）

$\angle SCP=90^\circ$ （半圓上的圓周角）

$=\angle AYI$

$\triangle IAY\sim\triangle PSC$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(c) $\dfrac{IY}{PC} = \dfrac{IA}{PS}$ 1M

$\dfrac{r}{IP} = \dfrac{AI}{2R}$

$AI \cdot IP = 2Rr$

同意該宣稱。 1A

(d) 設圓 BPC 的方程為 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$，其中 D、E 及 F 均為常數。

$$\begin{cases} (-16)^2 - 16D + F = 0 \\ (-8)^2 - 8E + F = 0 \\ 16^2 + 16D + F = 0 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $D = 0$、$E = -24$ 及 $F = -256$。

外接圓的半徑 $= \sqrt{0^2 + 12^2 + 256} = 20$ 1A

$BP = \sqrt{16^2 + 8^2} = 8\sqrt{5}$ 1A

據 (c)，$AI = \dfrac{2Rr}{IP} = \dfrac{2(20)(9)}{8\sqrt{5}} = 9\sqrt{5}$ 1A

21. (a) $\angle OMQ = 90^\circ = \angle ONQ$ （已知）

$AB = CD$ （已知）

$OM = ON$ （等弦對等角）

$OQ = OQ$ （公共邊）

$\triangle QNO \cong \triangle QMO$ （RHS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $OT = ON = 130$

$OQ = \sqrt{312^2 + 130^2} = 338$ 及 $OT : OQ = 130 : 338 = 5 : 13$

T 的 x 坐標 $= 312 \times \left(-\dfrac{5}{13}\right) = -120$ 1M

T 的 y 坐標 $= -130 \times \left(-\dfrac{5}{13}\right) = 50$

T 的坐標為 $(-120,\ 50)$。 1A

設 R 的坐標為 $(h,\ -130)$ 使得 $QR \perp ON$。

$\dfrac{-130 - 50}{h + 120} \times \dfrac{50 - 0}{-120 - 0} = -1$ 1M

$h = -195$

設 P 的坐標為 $(a,\ b)$。留意 T 為 PR 的中點。

$$\frac{a+(-195)}{2}=-120 \quad 及 \quad \frac{b+(-130)}{2}=50 \qquad \text{1M}$$

$$a=-45 \qquad\qquad b=230$$

P 的坐標為 $(-45,\ 230)$。 1A

(ii) $OP=\sqrt{45^2+230^2}=\sqrt{54\,925}\neq OQ$ 1M

因此，O 不是 $\triangle PQR$ 的外心。

不同意該宣稱。 1A