REG-COT-2425-ASM-SET 1-MATH
建議題解

多項選擇題

1. B	2. C	3. D	4. C	5. B
6. C	7. B	8. A	9. D	10. A
11. A	12. C	13. A	14. A	15. B
16. B	17. D	18. D	19. D	20. D
21. D	22. C	23. B	24. A	25. A
26. B	27. D	28. D	29. D	30. A

1. $\boxed{\text{B}}$

I. ✗。垂心在 B。
II. ✓。形心永遠在三角形內。
III. ✗。內心永遠在三角形內。

2. $\boxed{\text{C}}$

不包含任何步驟。

3. $\boxed{\text{D}}$

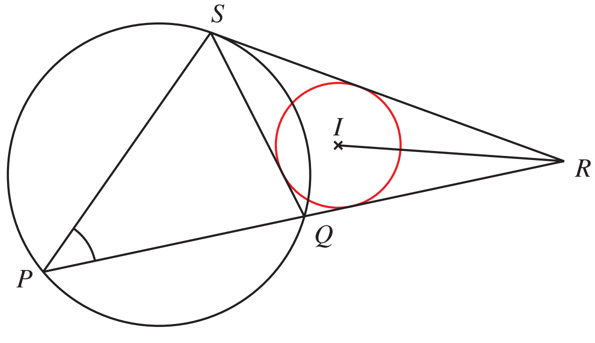
I. ✓。AD 為 BC 的垂直平分線。
II. ✓。AD 為通過 A 的高線。
III. ✓。AD 為通過 A 的中線。

4. $\boxed{\text{C}}$

I 為 $\triangle QRS$ 的內心。

$\angle IRQ = \angle IRS = 12^\circ$
$\angle SRQ = 12^\circ + 12^\circ = 24^\circ$
$\angle QPS = \angle SQR$
在 $\triangle PSR$ 中，

$$70^\circ + 2\angle QPS + 24^\circ = 180^\circ$$
$$\angle QPS = 43^\circ$$



5. $\boxed{\text{B}}$

$BC = 2BL = 26\text{ cm}$
$AB = 2BN = 10\text{ cm}$
$AC = 2CM = 24\text{ cm}$
由於 $10^2 + 24^2 = 26^2$，$\angle BAC = 90°$。
所求面積 $= \dfrac{(10)(24)}{2} = 120\text{ cm}^2$

6. $\boxed{\text{C}}$

設圓心為 O。
BO 為 $\triangle ABC$ 的中線。故此，BEO 為一直線。
$\angle BAC = \angle ABE = 27°$
$\angle CBD = \angle BAC = 27°$
$\angle ABC = 90°$
在 $\triangle ABD$ 中，

$$\begin{aligned} x + 27° + (90° + 27°) &= 180° \\ x &= 36° \end{aligned}$$

7. $\boxed{\text{B}}$

設 $AC = 2$。則 $BC = 2$、$CD = 1$ 及 $AE = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{2}$。
留意 $CE \perp AB$，$\angle ACE = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45°$。
$\angle CAD = \tan^{-1}\dfrac{1}{2} \approx 26.6°$
$\theta = 180° - 45° - \tan^{-1}\dfrac{1}{2} \approx 108°$
$\sin\theta \approx 0.948683.$
藉檢查所有選項，可得 $\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$。

8. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。設 $\triangle ABC$ 的內切圓的半徑為 r。
兩隻角均等於 $\tan^{-1}\dfrac{OV}{r}$。

II. ✓。設外接圓 ABC 的半徑為 R。
則 $OB = OC = R$，兩隻角均等於 $\tan^{-1}\dfrac{OV}{R}$。

III. ✗。若 $\angle ABC = 90°$，則點 O 與 B 重合。
平面 VAB 與平面 ABC 之間的角為 $90°$，而平面 VAC 與平面 ABC 之間的角不等於 $90°$。

9. $\boxed{\text{D}}$

外心的 y 坐標 $= \dfrac{(-2)+(8)}{2} = 3$

設外心的坐標為 $(h,\ 3)$。

$$\sqrt{(h-2)^2+(3-8)^2} = \sqrt{(h-10)^2+(14-3)^2}$$
$$h^2-4h+29 = h^2-20h+221$$
$$16h = 192$$
$$h = 12$$

外心的 x 坐標為 12。

10. $\boxed{\text{A}}$

點 B 可藉將 A 繞原點逆時針旋轉 90° 得出。故此，$\angle AOB = 90°$。

外心為 1 AB 的中點，所求的 y 坐標 $= \dfrac{8-2}{2} = 3$

11. $\boxed{\text{A}}$

由於 AB 平行於 y 軸，通過 O 的高線平行於 x 軸。

設垂心 H 的坐標為 $(x,\ 0)$。由於 $AH \perp OB$，

$$\frac{12-0}{16-x} \times \frac{-12-0}{16-0} = -1$$
$$x = 7$$

12. $\boxed{\text{C}}$

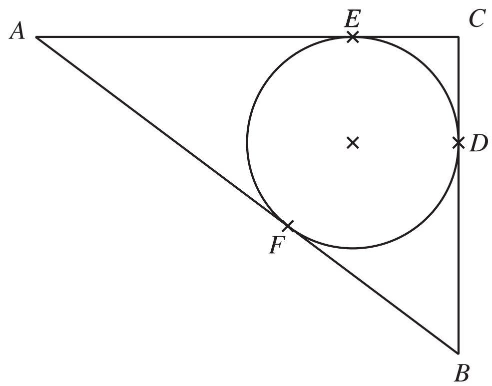
設 D、E、F 分別為內切圓與 BC、AC、AB 的切點。

設 $CE = x$。則 $AE = 12 - x$、$CD = x$ 及 $BD = 5 - x$。

利用切線性質，$AF = 12 - x$ 及 $BF = 5 - x$。

由於 $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$，可得 $x = 2$。

因此，內心的坐標為 $(10,\ 3)$。



13. $\boxed{\text{A}}$

外心在 OA 的垂直平分線上。

外心的 y 坐標 $= \dfrac{0+12}{2} = 6$

14. $\boxed{\text{A}}$

通過 Q 的高線為水平線。
垂心的 y 坐標 = 48
設垂心的坐標為 $(x,\ 48)$。

$$\frac{48-0}{x-0}\times\frac{60-48}{0-96}=-1$$
$$x=6$$

15. $\boxed{\text{B}}$

留意 $\angle BAC = 90°$。

I. ✗。外心在 BC 的中點。
II. ✓。根據對稱性質，形心的 x 坐標為 1。
III. ✓。垂心在 A （直角三角形）。

16. $\boxed{\text{B}}$

三角形的頂點的坐標為 $(0,\ 0)$、$(6,\ 0)$ 及 $(0,\ 8)$。
設內切圓的半徑為 r。
藉考慮三角形的面積，

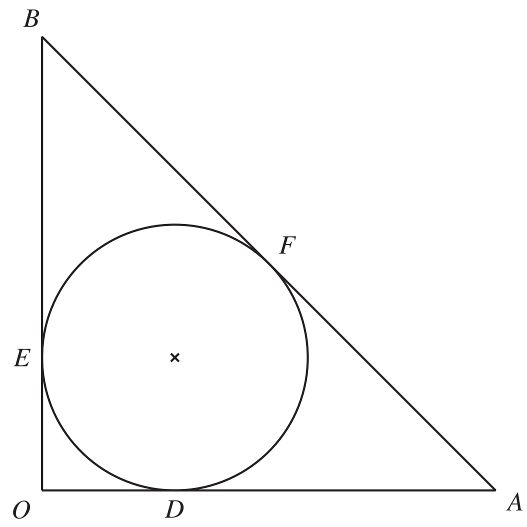
$$\frac{(6)(8)}{2}=\frac{(6)(r)}{2}+\frac{(8)(r)}{2}+\frac{(\sqrt{6^2+8^2})(r)}{2}$$
$$r=2$$

內心的坐標為 $(2,\ 2)$。

17. $\boxed{\text{D}}$

將內心記為 X。
設 D、E 及 F 分別為 OA、OB 及 AB 上的點使得 $XD\perp OA$、$XE\perp OB$ 及 $XF\perp AB$。
設半徑為 r。
$OD=OE=r$。
$AD=AF=6-r$ 及 $BE=BF=6-r$。

$$(6-r)+(6-r)=\sqrt{6^2+6^2}$$
$$r=6-3\sqrt{2}$$



18. $\boxed{\text{D}}$

通過 B 的高線為鉛垂線。
垂心的 x 坐標為 24。
設垂心的坐標為 $(24,\ y)$。

$$\frac{y-0}{24-0} \times \frac{18-0}{24-48} = -1$$
$$y = 32$$

19. $\boxed{\text{D}}$

由於 OA 為鉛垂線，垂心在通過 B 的水平線上。
因此，垂心的 y 坐標 $= -12$。
設垂心 H 的坐標為 $(x,\ -12)$。由於 $AH \perp BO$，

$$\frac{36+12}{0-x} \times \frac{12}{16} = -1$$
$$x = 36$$

20. $\boxed{\text{D}}$

設 $H\,(h,\ k)$ 為垂心。

$AH \perp BC$ 及 $BH \perp AC$

$$\frac{k+19}{h+38} \times \frac{9+1}{-10+2} = -1 \qquad \frac{k-9}{h+10} \times \frac{-1+19}{-2+38} = -1$$
$$\frac{k+19}{h+38} = \frac{4}{5} \qquad \frac{k-9}{h+10} = -2$$

求解後，可得 $h = -8$ 及 $k = 5$。

21. $\boxed{\text{D}}$

頂點的 x 坐標 $= \dfrac{-k}{2(1)} = -\dfrac{k}{2}$
PR 的中點 $= \left(-\dfrac{k}{2},\ 0\right)$
考慮形心的 x 坐標，

$$-2 = \frac{0(1) + \left(-\frac{k}{2}\right)(2)}{1+2}$$
$$k = 6$$

22. $\boxed{\text{C}}$

設 Q 的坐標為 $(p,\ q)$。將 $\triangle OPQ$ 的垂心記為 H。

$OP \perp QH$ 及 $PH \perp OQ$

$$\frac{-18}{26} \times \frac{q-21}{p+3} = -1 \qquad \frac{-18+3}{26-21} \times \frac{q}{p} = -1$$

$$13p - 9q = 300 \qquad p - 3q = 0$$

求解後，可得 $p = 30$ 及 $q = 10$。

因此，Q 的 y 坐標等於 10。

23. $\boxed{\text{B}}$

$\triangle OAB$ 為直角三角形。故此，$\triangle OAB$ 的垂心在 O。

$\triangle OAB$ 的面積 $= \frac{1}{2}(12)(16) = 96$

$AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$。設所求距離為 d。藉考慮 $\triangle OAB$ 的面積，

$$\frac{1}{2}(AB)(d) = 96$$

$$d = 9.6$$

24. $\boxed{\text{A}}$

直線 $x - 2y + 10 = 0$ 垂直於直線 $2x + y + a = 0$。

三條線形成的三角形為直角三角形。垂心在直角頂點。

當 $x = -6$ 時，

$$(-6) - 2y + 10 = 0$$

$$y = 2$$

代 $(-6,\ 2)$ 至 $2x + y + a = 0$，

$$2(-6) + (2) + a = 0$$

$$a = 10$$

25. $\boxed{\text{A}}$

$P\left(\frac{k}{2},\ 0\right)$、$Q\,(0,\ -k)$ 及 $R\,(0,\ k)$。

外心在 QR 的垂直平分線上，即 x 軸。

外心在 $(-3,\ 0)$。

$$\frac{k}{2} - (-3) = \sqrt{3^2 + k^2}$$

$$0 = \frac{3k^2}{4} - 3k$$

$$k = 4 \quad 或 \quad 0$$

R 的 y 坐標 $= 4$

26. $\boxed{\text{B}}$

$A = \left(\frac{k}{3},\ 0\right)$ 及 $B = \left(0,\ \frac{k}{4}\right)$

外心在 AC 的垂直平分線上。故此，$h = \dfrac{k + \frac{k}{3}}{2} = \dfrac{2k}{3}$。

外心與 B 及 A 等距，

$$\sqrt{\left(\frac{2k}{3} - k\right)^2 + 38^2} = \sqrt{\left(\frac{2k}{3}\right)^2 + \left(38 - \frac{k}{4}\right)^2}$$

$$-\frac{4k^2}{3} + k^2 = -19k + \frac{k^2}{16}$$

$$k = 48 \quad 或 \quad 0（捨去）$$

故此，$h = \dfrac{2}{3} \times 48 = 32$。

27. $\boxed{\text{D}}$

外心與兩頂點等距。

$$\sqrt{(k+4)^2 + (-4+8)^2} = \sqrt{(k-6)^2 + (-4-2)^2}$$

$$k^2 + 8k + 32 = k^2 - 12k + 72$$

$$k = 2$$

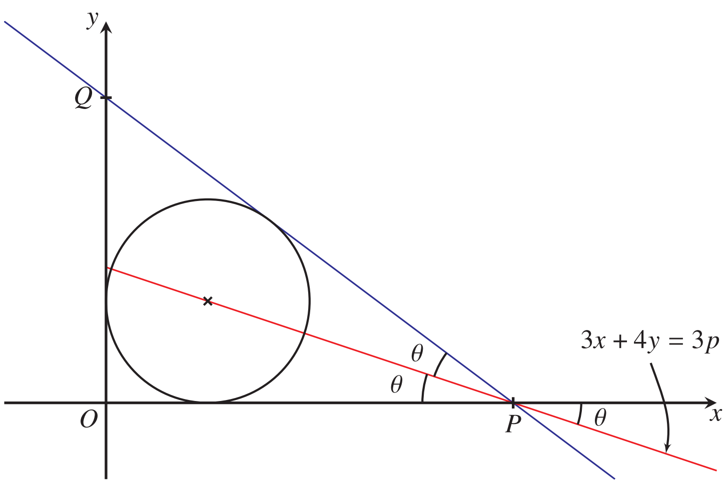
28. $\boxed{\text{D}}$

留意 $(p,\ 0)$ 滿足方程 $3x + 4y = 3p$。

直線 $3x + 4y = 3p$ 通過 $P\ (p,\ 0)$ 和 $\triangle OPQ$ 的內心。

故此，它是 $\angle OPQ$ 的角平分線。

設該直線與 x 軸之間的銳角為 θ。



$$直線的斜率 = -\frac{3}{4} = -\tan\theta \qquad 及 \qquad \frac{OQ}{OP} = \tan 2\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{q}{p} = \frac{24}{7}$$

$$p : q = 7 : 24$$

29. $\boxed{\text{D}}$

直線 $5x+4y=4b$ 通過點 $B(0,\ b)$。
故此，$5x+4y=4b$ 通過 OA 的中點 $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$。

$$5\left(\frac{a}{2}\right)+0=4b$$
$$\frac{a}{b}=\frac{8}{5}$$

30. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。G 在 $\triangle OAB$ 內，即在第二象限內。x 坐標與 y 坐標不相同（一正一負）。

II. ✓。設內切圓的半徑為 r。則 G 的坐標為 $(-r,\ r)$。

$$4r+(-r)=3kb$$
$$r=kb$$

利用切線性質，OB 被分成兩線段，長度為 $b-r$ 及 r。
OA 被分成兩線段，長度為 $10-r$ 及 r。

$$(10-r)+(b-r)=\sqrt{10^2+b^2}$$
$$[10+b(1-2k)]^2=b^2+100$$
$$100+20b(1-2k)+b^2(1-2k)^2=b^2+100$$
$$b^2(4k^2-4k)+20b(1-2k)=0$$
$$b=-\frac{20(1-2k)}{4k^2-4k}$$
$$=\frac{5(1-2k)}{k(1-k)}$$

所求距離 $=r=kb=\dfrac{5(1-2k)}{1-k}$

III. ✗。當 $k=\dfrac{1}{6}$ 時，$r=\dfrac{5(1-2k)}{1-k}=4$。
內切圓的方程為 $(x+4)^2+(y-4)^2=4^2$。

$$(x+4)^2+(5-3x-4)^2=16$$
$$10x^2+2x+1=0$$

$\Delta=2^2-4(10)(1)=-36<0$
直線 $3x+y=5$ 與 $\triangle OAB$ 的內切圓不相交，即不是切線。

– 試卷完 –