解	分
REG-2324-MOCK-SET 7-MATH-EP(M2)	
建議題解	
1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{1-x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-(x+h)}-\sqrt{1-x}}{h}$	1M
$= \lim_{h\to 0}\frac{(1-x-h)-(1-x)}{h[\sqrt{1-x-h}+\sqrt{1-x}]}$	1M
$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x-h}+\sqrt{1-x}}$	1M
$= \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$	1A
2. (a) $\frac{C_5^n a^5}{C_3^n a^3} = \frac{3a^2}{5}$	1M
$\frac{\frac{n!}{5!(n-5)!}\times a^2}{\frac{n!}{3!(n-3)!}} = \frac{3a^2}{5}$	1M
$\frac{a^2(n-3)(n-4)}{20} = \frac{3a^2}{5}$	
$(n-3)(n-4) = 12$	1A
$n^2-7n = 0$	
$n = 7$ 或 0（捨去）	1A
(b) $(1+ax)^7 = 1+7ax+21a^2x^2+\ldots$	
$\left(2+\frac{1}{x}\right)^2 = 4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$	
常數項 $= 1(4)+7a(4)+21a^2(1)$	1M
$= 21a^2+28a+4$	1A
3. (a) $\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,\mathrm{d}x$	1M+1A
$= \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 +$ 常數	1A
(b) $y = \int x^3\ln x\,\mathrm{d}x$	1M
$= \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$	
該曲線通過 $(1,\ 1)$。	
$1 = \frac{1}{4}(1)^4\ln 1 - \frac{1}{16}(1)^4 + C$	1M
$C = \frac{17}{16}$	
所求方程為 $y = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + \frac{17}{16}$。	1A

解	分
4. (a) $\cot A = 3\tan B$	
$\dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{3\sin B}{\cos B}$	1M
$\cos A\cos B = 3\sin A\sin B$	
$2\cos(A+B) - \cos(A-B)$	
$= 2(\cos A\cos B - \sin A\sin B) - (\cos A\cos B + \sin A\sin B)$	1M
$= \cos A\cos B - 3\sin A\sin B$	
$= 0$	
因此，$2\cos(A+B) = \cos(A-B)$。	1
(b) $\cot\left(x + \dfrac{11\pi}{15}\right) = 3\tan\left(x - \dfrac{4\pi}{15}\right)$	
$2\cos\left[\left(x+\dfrac{11\pi}{15}\right) + \left(x - \dfrac{4\pi}{15}\right)\right] = \cos\left[\left(x+\dfrac{11\pi}{15}\right) - \left(x-\dfrac{4\pi}{15}\right)\right]$	1M
$2\cos\left(2x + \dfrac{7\pi}{15}\right) = -1$	
$\cos\left(2x + \dfrac{7\pi}{15}\right) = -\dfrac{1}{2}$	
$2x + \dfrac{7\pi}{15} = \dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\dfrac{4\pi}{3}$	
$x = \dfrac{\pi}{10}$ 或 $\dfrac{13\pi}{30}$	1A+1A
5. (a) $10\ln(0 - ke) = 0^2 + 10$	1M
$\ln(-ke) = 1$	
$-ke = e^1$	
$k = -1$	1A
(b) $10\ln(x - y) = x^2 + 10$	
$\dfrac{10}{x-y}\left(1 - \dfrac{dy}{dx}\right) = 2x$	1M
在 $A\ (0,\ -e)$，	
$\dfrac{10}{0+e}\left(1 - \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$	1M
$\dfrac{dy}{dx} = 1$	1A
所求方程為 $y = x - e$。	1A

解	分
6. (a) 水平面的半徑 $= h\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}h$ cm	1M
$A = \pi(\sqrt{3}h)\left(\sqrt{(\sqrt{3}h)^2 + h^2}\right)$	1M
$= 2\sqrt{3}\pi h^2$	1
(b) 當容器內的水的體積為 216π cm^2 時，	
$216\pi = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3}h)^2 h$	1M
$h = 6$	
利用 (a) 的結果，	
$A = 2\sqrt{3}\pi h^2$	
$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 4\sqrt{3}\pi h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$	1M
$-12\pi = 4\sqrt{3}\pi(6)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$	1M
$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$	1A
所求變率為 $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ cm/s。	
7. (a) $(\det A)^2 - 3\det A + 2 = 0$	
$\det A = 1$ 或 2	1A
(b) $B^2 = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x-1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$	
$= \begin{pmatrix} x^2+x-1 & x(x-1)+(x-1)(x+1) \\ x+(x+1) & (x-1)+(x+1)^2 \end{pmatrix}$	
$= \begin{pmatrix} x^2+x-1 & 2x^2-x-1 \\ 2x+1 & x^2+3x \end{pmatrix}$	1A
(c) $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = x(x+1)-(x-1)$	
$= x^2+1$	1A
$\begin{vmatrix} x^2+x-1 & 2x+1 \\ 2x^2-x-1 & x^2+3x \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} + 2 = 0$	
$\begin{vmatrix} x^2+x-1 & 2x^2-x-1 \\ 2x+1 & x^2+3x \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} + 2 = 0$	1M
$(\det B)^2 - 3(\det B) + 2 = 0$	
$\det B = 1$ 或 2	1M
$x^2+1 = 1$ 或 2	
$x = 0$ 或 -1 或 1	1A+1A

解	分
8. (a) 當 $n = 1$，	
左式 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(3)} = \frac{2}{3}$，右式 $= \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3} =$ 左式	
對 $n = 1$，命題為真。	1
假設 $\sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{k+1}{k+2}$，其中 $k \in \mathbf{Z}^+$。	1
$\sum_{r=1}^{k+2} \frac{1}{r(r+1)}$	
$= \sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)}$	
$= \frac{k+1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+3)}$	1M
$= \frac{(k+1)(k+3)+1}{(k+2)(k+3)}$	
$= \frac{(k+2)^2}{(k+2)(k+3)}$	
$= \frac{k+2}{k+3}$	1
對 $n = k + 1$，命題為真。	
藉數學歸納法，$\forall n \in \mathbf{Z}^+$，命題為真。	1
(b) $\sum_{r=100}^{2019} \left(\frac{4}{r+1} \times \frac{25}{r} \right) = 100 \sum_{r=1}^{2019} \frac{1}{r(r+1)} - 100 \sum_{r=1}^{99} \frac{1}{r(r+1)}$	1M
$= 100 \times \frac{2018+1}{2018+2} - 100 \times \frac{98+1}{98+2}$	1M
$= \frac{96}{101}$	1A

解	分
9. (a) $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$	
設 $x + 1 = 2\tan\theta$。則 $\mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$。	
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \int_{\tan^{-1}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta+4}\,\mathrm{d}\theta$	1M
$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_{\tan^{-1}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta$	
$\displaystyle = \frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_{\tan^{-1}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$	1M
$\displaystyle = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}$	1A
(b) (i) $\displaystyle\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sec^2\theta}$	
$= 2\sin\theta\cos\theta$	
$= \sin 2\theta$	1
$\displaystyle\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\sec^2\theta}$	
$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$	
$= \cos 2\theta$	1
(ii) 設 $t = \tan\theta$。則 $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$。	1M
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2\theta + 2\cos 2\theta + 3}\,\mathrm{d}\theta$	
$\displaystyle = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 2\times\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$	1M
$\displaystyle = \int_0^1 \frac{1}{2t + 2(1-t^2) + 3(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$	
$\displaystyle = \int_0^1 \frac{1}{t^2+2t+5}\,\mathrm{d}t$	
$\displaystyle = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}$	1A
(c) 設 $u = \frac{\pi}{4} - \theta$。則 $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}\theta$。	1M
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2\theta + 2\cos 2\theta + 3}\,\mathrm{d}\theta = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2u\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2u\right) + 3}\,\mathrm{d}u$	
$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos 2u + 2\sin 2u + 3}\,\mathrm{d}u$	
$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos 2\theta + 2\sin 2\theta + 3}\,\mathrm{d}\theta$	1

解	分
(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(\sin 2\theta + \cos 2\theta + 2)}{(\sin 2\theta + 2\cos 2\theta + 3)(\cos 2\theta + 2\sin 2\theta + 3)}\,d\theta$	
$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin 2\theta + 2\cos 2\theta + 3) + (\cos 2\theta + 2\sin 2\theta + 3)}{(\sin 2\theta + 2\cos 2\theta + 3)(\cos 2\theta + 2\sin 2\theta + 3)}\,d\theta$	
$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos 2\theta + 2\sin 2\theta + 3}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2\theta + 2\cos 2\theta + 3}\,d\theta$	1M
$\displaystyle= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2\theta + 2\cos 2\theta + 3}\,d\theta$	
$\displaystyle= 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$	1M
$\displaystyle= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$	1A
10. (a) $a = 1$ 及 $b = -2$。	1A+1A
(b) (i) $\displaystyle y = x + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$	
$\displaystyle\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2(x-1)^2}$	1A
$\displaystyle\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x-1)^3}$	1A
(ii) 當 $\displaystyle\frac{dy}{dx} = 0$，	
$\displaystyle 1 - \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2(x-1)^2} = 0$	1M
$2(x+1)^2(x-1)^2 - (x-1)^2 - (x+1)^2 = 0$	
$2x^4 - 6x^2 = 0$	
$x^2 = 0$ 或 3	
$x = 0$ 或 $\pm\sqrt{3}$	

x	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$\frac{dy}{dx}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

1M

解	分
極大點為 $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$。	1A
極小點為 $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$。	1A
(c) 所求面積	
$\displaystyle= \int_2^4 \left[\left(x + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}\right) - x\right]dx$	1M+1A
$\displaystyle= \int_2^4 \left(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}\right)dx$	
$\displaystyle= \left[\frac{1}{2}\ln\lvert x+1\rvert + \frac{1}{2}\ln\lvert x-1\rvert\right]_2^4$	1M
$\displaystyle= \frac{\ln 5}{2}$	1A

解	分
11. (a) (i) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & k \\ 1 & k+1 & 9 \end{vmatrix} = -k^2 - 6k + 7$	1A
$= -(k+7)(k-1)$	
由於 (E) 有唯一的解，可得 $\Delta \neq 0$。	1M
因此，可得 $k < -7$ 或 $-7 < k < 1$ 或 $k > 1$。	1A
(ii) 當 $k = 1$，(E) 的增廣矩陣為	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 2 & a \\ -3 & -2 & 1 & b \\ 1 & 2 & 9 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 7 & b+3a \\ 0 & 1 & 7 & c-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 7 & b+3a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-4a \end{array}\right)$	1M+1A
由於 (E) 有解，可得 $c - b - 4a = 0$。	1A
當 $k = 1$ 及 $c - b - 4a = 0$，(E) 的增廣矩陣為	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 7 & b+3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	
因此，(E) 的解集為 $\{(-2a - b + 5t,\ 3a + b - 7t,\ t) : t \in \mathbb{R}\}$。	1A
(b) (i) 當 $k = 1$、$a = -1$、$b = n$ 及 $c = 0$，(E) 為 (T) 的首三條方程。	1M
由於 (T) 有解，首三條方程有解。	
$0 - n - 4(-1) = 0$	1M
$n = 4$	1A
(ii) 首三條方程的解集為 $\{(-2 + 5t,\ 1 - 7t,\ t) : t \in \mathbb{R}\}$。	
$(-2 + 5t) + (1 - 7t) - t^2 = 0$	1M
$-t^2 - 2t - 1 = 0$	
$t = -1$	1A
因此，可得 $x = -7$、$y = 8$ 及 $z = -1$。	1A

解	分
12. (a) (i) $\overrightarrow{AB} = -6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$	
$\overrightarrow{BC} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$	
$\overrightarrow{AC} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$	1A+1A
(ii) 所求向量 $= \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AC}$	1M
$= \dfrac{(-6)(-1) + (1)(-2) + (7)(2)}{1^2 + 2^2 + 2^2}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$	
$= -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	1A
(iii) 設 M 為直線 AC 上的一點使得 $BM \perp AC$。	
$\overrightarrow{AM} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$	
$= 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$	
所求距離 $= BM$	
$= \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2}$	1M
$= 5\sqrt{2}$	1A
(b) 留意 B、M、D 共線。	
設 $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BM}$，其中 k 為一實數。	1M
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$	
$= (4k - 5)\mathbf{i} + (-5k + 3)\mathbf{j} + (-3k + 5)\mathbf{k}$	
留意 $CD \perp AB$。	
$0 = (-6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k}) \cdot [(4k - 5)\mathbf{i} + (-5k + 3)\mathbf{j} + (-3k + 5)\mathbf{k}]$	1M
$= 68 - 50k$	
$k = \dfrac{34}{25}$	1A
將原點記為 O。	
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$	1M
$= (-5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + \left(\dfrac{136}{25}\mathbf{i} - \dfrac{34}{5}\mathbf{j} - \dfrac{102}{25}\mathbf{k}\right)$	
$= \dfrac{11}{25}\mathbf{i} - \dfrac{29}{5}\mathbf{j} - \dfrac{2}{25}\mathbf{k}$	
D 的坐標為 $\left(\dfrac{11}{25}, -\dfrac{29}{5}, -\dfrac{2}{25}\right)$。	1A