

REG-2324-MOCK-SET 6-MATH-EP(M2)

建議題解

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{d}{dx} [\ln(x+6)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h+6) - \ln(x+6)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x+6} \right)^{\frac{1}{h}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left[\left(1 + \frac{h}{x+6} \right)^{\frac{x+6}{h}} \right]^{\frac{1}{x+6}} \\
 &= \ln e^{\frac{1}{x+6}} \\
 &= \frac{1}{x+6}
 \end{aligned}$$

1M

1M

1A

$$\begin{aligned}
 2. \quad (a) \quad (1-x)(1+x)^n &= (1-x) \left(1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots \right) \\
 &= 1 + (n-1)x + \left(\frac{n(n-1)}{2} - n \right)x^2 + \dots
 \end{aligned}$$

1M

因此， $a = 1$ 、 $b = n - 1$ 及 $c = \frac{n^2 - 3n}{2}$ 。

1A

$$(b) \quad (n-1) - 1 = \frac{n^2 - 3n}{2} - (n-1)$$

1M

$$0 = \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{2} + 3$$

$$n = 6 \quad \text{或} \quad 1 \quad (\text{捨去})$$

1A

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = e^{-x}(\cos x + \sin x) + (\sin x - \cos x)(-e^{-x})$$

1M

$$= 2e^{-x} \cos x$$

1A

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-x}(-\sin x) - 2e^{-x} \cos x$$

$$= -2e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

1A

$$-2e^{-x}(\sin x + \cos x) + 2(2e^{-x} \cos x) + ke^{-x}(\sin x - \cos x) = 0$$

$$2 \cos x - 2 \sin x + k(\sin x - \cos x) = 0$$

$$(k-2)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$k = 2$$

1A

解		分
4. (a)	設 $x = \sin \theta$。則 $dx = \cos \theta d\theta$。 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta$ $= \int d\theta$ $= \sin^{-1} x + \text{常數}$	1M 1A
(b)	$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1-x)}} dx$ $= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ $= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}} \quad \text{其中 } u = 1-x^2$ $= \left[\sin^{-1} x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2} \left[2u^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$	1M 1M 1A
5. (a)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2a^2 - a + a$ $= 2(a+1)(a-1)$ (E) 有唯一的解當且僅當 $(a+1)(a-1) \neq 0$。 故此，$a \neq 1$ 及 $a \neq -1$。 所求範圍為 $a < -1$ 或 $-1 < a < 1$ 或 $a > 1$。	1M 1A
(b)	當 $a = -1$，(E) 的增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & -1 & b \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & -1 & 1 & -2b \\ 0 & -1 & 1 & b+1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & -1 & 1 & -2b \\ 0 & 0 & 0 & 3b+1 \end{array} \right)$ 若 (E) 有解，則 $3b+1=0$，即 $b = -\frac{1}{3}$。 (E) 的增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$。 設 $z = t$，其中 $t \in \mathbb{R}$。則 $y = \frac{3t-2}{3}$ 及 $x = \frac{3t-1}{3}$。 解集為 $\left\{ \left(\frac{3t-1}{3}, \frac{3t-2}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$。	1M 1A 1A

解	分
6. (a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (OA)(OB) \cos \theta$ $\cos \theta = \frac{(3a)(2a)}{(3a)(2a\sqrt{2})}$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ (b) (i) $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ $[2a\mathbf{i} + b\mathbf{j}] \cdot [-a\mathbf{i} + 2a\mathbf{j}] = 0$ $2a(-a + b) = 0$ $b = a \quad \text{或} \quad a = 0 \quad (\text{捨去})$ (ii) $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{OA} = [(b - 2a)\mathbf{j}] \cdot [3a\mathbf{i}] = 0$ 故此，$BG \perp OA$ 及 G 為 $\triangle OAB$ 的垂心。	1M 1A 1M 1A 1M 1
7. (a) 設 $u = x^2$，則 $du = 2x \, dx$。 $\int 2x^3 \cos(x^2) \, dx = \int u \cos u \, du$ $= u \sin u - \int \sin u \, du$ $= x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2) + \text{常數}$ (b) (i) $y = \int 2x^3 \cos(x^2) \, dx = x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2) + C$ 代 $(\sqrt{\pi}, -1)$，可得 $C = 0$ Γ 的方程為 $y = x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)$。 (ii) 切線的斜率 $= 2\pi^{\frac{3}{2}} \cos \pi = -2\pi^{\frac{3}{2}}$ 方程為 $y + 1 = -2\pi^{\frac{3}{2}}(x - \sqrt{\pi})$ $y = -2\pi^{\frac{3}{2}}x + 2\pi^2 - 1$	1M 1M 1A 1M 1A 1M 1A

解	分
8. (a) $A^2 + I = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $= \mathbf{0}$ (b) $A^4 = (A^2)^2$ $= (-I)^2$ $= I$ (c) $A^{4n+3} = (A^4)^n A^3$ $= I^n A^3$ $= A^2 A$ $= (-I)A$ $= \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	1M 1 1M 1 1M 1m 1A

解	分
9. (a) 當 $n = 1$, 左式 = $\cos x$, 右式 = $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} = \cos x =$ 左式 對 $n = 1$, 命題為真。 假設 $\sum_{m=1}^k \cos(2m-1)x = \frac{\sin 2kx}{2 \sin x}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。 $\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k+1} \cos(2m-1)x &= \sum_{m=1}^k \cos(2m-1)x + \cos(2k+1)x \\ &= \frac{\sin 2kx}{2 \sin x} + \cos(2k+1)x \\ &= \frac{1}{2 \sin x} [\sin 2kx + 2 \cos(2k+1)x \sin x] \\ &= \frac{1}{2 \sin x} [\sin 2kx + \sin(2k+2)x + \sin(-2kx)] \\ &= \frac{\sin(2k+2)x}{2 \sin x} \end{aligned}$ 對 $n = k + 1$, 命題為真。 藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。 (b) $\cos^2 \frac{\pi}{r} + \cos^2 \frac{3\pi}{r} + \cos^2 \frac{5\pi}{r} + \dots + \cos^2 \frac{(2r-1)\pi}{r}$ $\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^r \cos^2 \frac{(2m-1)\pi}{r} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \left(1 + \cos \left[(2m-1) \frac{2\pi}{r} \right] \right) \\ &= \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \cos \left[(2m-1) \frac{2\pi}{r} \right] \\ &= \frac{r}{2} + \frac{\sin \left[2r \times \frac{2\pi}{r} \right]}{4 \sin \frac{2\pi}{r}} \\ &= \frac{r}{2} \end{aligned}$	1 1 1 1 1M 1M 1

解	分
10. (a) $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ 設 $PC : CR = \beta : 1 - \beta$。 $\overrightarrow{OC} = \beta\overrightarrow{OR} + (1 - \beta)\overrightarrow{OP}$ $= \frac{3\beta}{8}\mathbf{b} + \frac{1 - \beta}{2}\mathbf{a}$ 由於 $OC \parallel OQ$， $\frac{1 - \beta}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3\beta}{8} \div \frac{1}{3}$ $\beta = \frac{2}{5}$ 因此，$PC : CR = \frac{2}{5} : \frac{3}{5} = 2 : 3$。 (b) (i) $\overrightarrow{OC} = \frac{3 \times \frac{2}{5}}{8}(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + \frac{1 - \frac{2}{5}}{2}(\mathbf{i} - 3\mathbf{k}) = \frac{3}{4}\mathbf{i} - \frac{3}{20}\mathbf{j} - \frac{6}{5}\mathbf{k}$ (ii) $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $= -3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (iii) $\triangle OAB$ 的面積 $= \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 7^2 + 1^2}$ $= \frac{\sqrt{59}}{2}$ 藉考慮四面體 $OABD$ 的體積， $\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{59}}{2}\right)(CD) = \frac{59}{2}$ $CD = 3\sqrt{59}$ 由於 $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$， $\overrightarrow{CD} = \pm \frac{3\sqrt{59}}{ \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} } \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ $= \pm 3(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})$ $= \pm 3(-9\mathbf{i} - 21\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$ $= -\frac{33}{4}\mathbf{i} - \frac{423}{20}\mathbf{j} - \frac{21}{5}\mathbf{k} \quad \text{or} \quad \frac{39}{4}\mathbf{i} + \frac{417}{20}\mathbf{j} + \frac{9}{5}\mathbf{k}$ D 的可取坐標為 $\left(-\frac{33}{4}, -\frac{423}{20}, -\frac{21}{5}\right)$ and $\left(\frac{39}{4}, \frac{417}{20}, \frac{9}{5}\right)$。	1M 1M 1M 1A 1A 1M 1A 1A 1M 1A+1A

解	分
11. (a) (i) $A = m + 1 \neq 0$ $A^{-1} = \frac{1}{m+1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ (ii) $C = \frac{1}{m+1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-k & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $= \frac{1}{m+1} \begin{pmatrix} -k & k \\ 1-k+m & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $= \frac{1}{m+1} \begin{pmatrix} -km-k & 0 \\ m-km+m^2-k & 1+m \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -k & 0 \\ m-k & 1 \end{pmatrix}$ (b) (i) 當 $m = k$, $C^n = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-k)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。 由於 $pC + qI = \begin{pmatrix} -pk+q & 0 \\ 0 & p+q \end{pmatrix}$, 可得 $\begin{cases} (-k)^n = -pk+q \\ 1 = p+q \end{cases}$。 求解後, 可得 $p = \frac{1 - (-k)^n}{1+k}$ 及 $q = \frac{k + (-k)^n}{1+k}$。 (ii) $C^n = pC + qI$ $(A^{-1}BA)^n = p(A^{-1}BA) + qI$ $A^{-1}B^nA = pA^{-1}BA + qI$ $B^n = p(AA^{-1}BAA^{-1}) + qAA^{-1}$ $= pB + qI$ (c) 代 $k = 3$ 使得 $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。 $B^n = pB + qI$ $= \frac{1 - (-3)^n}{1+3} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3 + (-3)^n}{1+3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 3(-3)^n & 3 + (-3)^{n+1} \\ 1 - (-3)^n & 3 + (-3)^n \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_{2016} \\ x_{2015} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_{2015} \\ x_{2014} \end{pmatrix}$ $= B^2 \begin{pmatrix} x_{2014} \\ x_{2013} \end{pmatrix}$ $= B^{2014} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ $= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 3(-3)^{2014} & 3 + (-3)^{2015} \\ 1 - (-3)^{2014} & 3 + (-3)^{2014} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 因此, $x_{2016} = \frac{1}{4}[2 + 6(-3)^{2014} + 3 + (-3)^{2015}] = \frac{5 - (-3)^{2015}}{4}$。	1M+1A 1M 1 1A 1M 1A 1M 1 1M 1A 1A

解		分										
12. (a)	y 截距 $= \frac{12}{-3} - \frac{12}{3} - 1 = -9$ $0 = \frac{12}{x-3} - \frac{12}{x+3} - 1$ $(x-3)(x+3) = 12[(x+3) - (x-3)]$ $x^2 - 81 = 0$ $x = \pm 9$ x 截距為 9 及 -9。	1A										
(b) (i)	$f'(x) = -\frac{12}{(x-3)^2} + \frac{12}{(x+3)^2}$	1A										
	$f''(x) = \frac{24}{(x-3)^3} - \frac{24}{(x+3)^3}$	1A										
(ii)	當 $f'(x) = 0$, $\frac{12}{(x-3)^2} = \frac{12}{(x+3)^2}$ $x-3 = -(x+3)$ 或 $x-3 = x+3$ (捨去) $x = 0$	1M										
	<table><tr><td>x</td><td>$x < -3$</td><td>$-3 < x < 0$</td><td>$0 < x < 3$</td><td>$x > 3$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	x	$x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$	$f'(x)$	+	+	-	-	1M
x	$x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$								
$f'(x)$	+	+	-	-								
	極大點為 (0, -9) , 沒有極小點。 當 $f''(x) = 0$, $\frac{24}{(x-3)^3} = \frac{24}{(x+3)^3}$ $x+3 = x-3$ 無解。 因此, 沒有拐點。	1A										
(c)	$x = -3$ 及 $x = 3$ 均為垂直漸近線。 由於 $y = -1 + \frac{12}{x-3} - \frac{12}{x+3}$, $y = -1$ 為水平漸近線。	1A										
(d)	$A = \int_9^k \left(\frac{12}{x-3} - \frac{12}{x+3} - 1 - (-1) \right) dx$ $= \left[12 \ln x-3 - 12 \ln x+3 \right]_9^k$ $= 12 \ln \frac{k-3}{6} - 12 \ln \frac{k+3}{12}$ $= 12 \ln \frac{k-3}{k+3} + 12 \ln 2$ 由於 $k > 9$, $0 < \frac{k-3}{k+3} < 1$ 及 $\ln \frac{k-3}{k+3} < 0$ 。 可得 $A < 12 \ln 2$ 。	1M 1M 										

解	分
13. (a) (i) 代 $y = 0$ 至 $3x^2 - 2y - 4 = 0$，可得 $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$。 點 $\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}, 0\right)$ 在曲線 $3x^2 + 2y + k = 0$ 上， $3 \times \frac{4}{3} + 2(0) + k = 0$ $k = -4$ (ii) BC 的方程可寫成 $y = -\frac{3}{2}x^2 + 2$。 頂點的坐標為 $(0, 2)$。 (b) (i) 當 $0 \leq h \leq 2$， $\begin{aligned} \text{體積} &= \pi \int_0^h \left[\frac{2y+4}{3} - \frac{4-2y}{3} \right] dx \\ &= \pi \int_0^h \frac{4y}{3} dy \\ &= \pi \left[\frac{2y^2}{3} \right]_0^h \\ &= \frac{2\pi h^2}{3} \text{ 立方單位} \end{aligned}$ (ii) 當 $2 < h \leq 6$， $\begin{aligned} \text{體積} &= \frac{2\pi(2)^2}{3} + \pi \int_2^h \frac{2y+4}{3} dy \\ &= \frac{8\pi}{3} + \pi \left[\frac{4y}{3} + \frac{y^2}{3} \right]_2^h \\ &= \pi \left(\frac{h^2}{3} + \frac{4h}{3} - \frac{4}{3} \right) \text{ 立方單位} \end{aligned}$ (c) 設 V 立方單位為杯中的水在時間 t 秒時的體積。 當 $V = \frac{28\pi}{3}$，可得 $V > \frac{8\pi}{3}$ 及故此 $h > 2$。 $\frac{28\pi}{3} = \pi \left(\frac{h^2}{3} + \frac{4h}{3} - \frac{4}{3} \right)$ $h^2 + 4h - 32 = 0$ $h = 4 \quad \text{或} \quad -8 \text{ (捨去)}$ 對 $2 < h \leq 6$，$\frac{dV}{dt} = \pi \left(\frac{2h}{3} + \frac{4}{3} \right) \frac{dh}{dt}$。 當 $\frac{dV}{dt} = \frac{8\pi}{3}$ 及 $h = 4$， $\begin{aligned} \frac{8\pi}{3} &= \pi \left(\frac{2 \times 4}{3} + \frac{4}{3} \right) \frac{dh}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$ 所求變率為每秒 $\frac{2}{3}$ 單位。	1A 1A 1A 1M+1A 1M 1A 1M 1A 1M 1M 1M 1A