

REG-2324-MOCK-SET 5-MATH-EP(M2)

建議題解

$$1. f(1+h) = \frac{1}{e^{4(1+h)-1}}$$

$$= \frac{1}{e^{4h+3}}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e^{4h+3}} - \frac{1}{e^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{4h}}{he^{4h+3}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{4h} - 1}{4h} \cdot \frac{-4}{e^{4h+3}}$$

$$= 1 \cdot \frac{-4}{e^3}$$

$$= -\frac{4}{e^3}$$

1A

1M

1M

1A

$$2. (a) (1+4x+4x^2)^n = (1+2x)^{2n}$$

$$= 1 + C_1^{2n}(2x) + C_2^{2n}(2x)^2 + \dots$$

$$= 1 + 4nx + 4n(2n-1)x^2 + \dots$$

$$(1-x)^9 = 1 - 9x + 36x^2 + \dots$$

$$4n(2n-1) + 4n(-9) + 36 = 4$$

$$8n^2 - 40n + 32 = 0$$

$$n = 4 \quad \text{或} \quad 1 \quad (\text{捨去})$$

1M

1M

1A

$$(b) (1+4x+4x^2)^4(1-x)^9$$

$$= (1+2x)^8(1-x)^9$$

$$= (1+16x+112x^2+448x^3+\dots)(1-9x+36x^2-84x^3+\dots)$$

$$\text{所求係數} = (448)(1) + (112)(-9) + (16)(36) + (1)(-84)$$

$$= -68$$

1M

1A

解	分
3. (a) $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{7}\mathbf{a} + \frac{4}{7}\mathbf{b}$ 1A (b) (i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \sin \angle AOB$ 1M $294 = (35)(14) \sin \angle AOB$ $\sin \angle AOB = \frac{3}{5}$ 由於 $\angle AOB$ 為銳角，$\cos \angle AOB = \frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{5} = \frac{4}{5}$。 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cos \angle AOB$ 1M $= (35)(14) \left(\frac{4}{5}\right)$ $= 392$ 1A (ii) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = \left(\frac{3}{7}\mathbf{a} + \frac{4}{7}\mathbf{b}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\mathbf{a} + \frac{4}{7}\mathbf{b}\right)$ $= \frac{9}{49} \mathbf{a} ^2 + \frac{24}{49}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{16}{49} \mathbf{b} ^2$ $= \frac{9}{49}(35)^2 + \frac{24}{49}(392) + \frac{16}{49}(14)^2$ 1M $= 481$ $\overrightarrow{OP} = \sqrt{481}$ 1A	
4. (a) 設 $u = 1 + x^3$。則 $du = 3x^2 dx$。 1M $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du$ 1M $= \frac{1}{3} \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}) du$ $= \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + \text{常數}$ $= \frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+x^3)^{\frac{1}{2}} + \text{常數}$ 1A (b) $y = \int \frac{9x^5}{2\sqrt{1+x^3}} dx$ 1M $= \frac{9}{2} \left[\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+x^3)^{\frac{1}{2}} \right] + C$ 1M $= (1+x^3)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{1+x^3} + C$ $3 = 1 - 3 + C$ 1M $C = 5$ 所求方程為 $y = (1+x^3)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{1+x^3} + 5$。 1A	

解	分
5. (a) 當 $n = 1$, 左式 $= 1(3 - 1) = 2$, 右式 $= 1^2(1 + 1) = 2 =$ 左式 對 $n = 1$, 命題為真。 假設 $\sum_{k=1}^p k(3k - 1) = p^2(p + 1)$, 其中 $p \in \mathbb{Z}^+$ 。 $\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p+1} k(3k - 1) &= \sum_{k=1}^p k(3k - 1) + (p + 1)(3p + 2) \\ &= p^2(p + 1) + (p + 1)(3p + 2) \\ &= (p + 1)(p^2 + 3p + 2) \\ &= (p + 1)^2(p + 2)\end{aligned}$ 對 $n = p + 1$, 命題為真。 藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。 (b) $\sum_{k=1}^n k(3k + 1) = \sum_{k=1}^n k(3k - 1) + \sum_{k=1}^n 2k$ $\begin{aligned}&= n^2(n + 1) + 2 \cdot \frac{n(n + 1)}{2} \\ &= n(n + 1)^2\end{aligned}$	1 1M 1M 1 1M 1M 1A
6. (a) (i) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & h \end{vmatrix}$ $= 7h - 28$ 由於 (E) 有唯一解, $\Delta \neq 0$ 。 因此, 可得 $h \neq 4$ 。 (ii) $z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & k \end{vmatrix}}{7h - 28}$ $\begin{aligned}&= \frac{7k - 35}{7h - 28} \\ &= \frac{k - 5}{h - 4}\end{aligned}$ (b) 當 $h = 4$, (E) 的增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc c} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 4 & k \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 4 & k \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 7 & k + 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k - 5 \end{array} \right)$ 可得 $k = 5$ 。 解集為 $\{(-t, 1 - t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ 。	1M 1A 1M 1A 1M 1A

解	分
7. (a) 設 r cm 為該容器內的水面的半徑。 $\frac{r}{h} = \tan 30^\circ$ $r = \frac{h}{\sqrt{3}}$ $V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 h$ $= \frac{\pi}{9}h^3$ $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ $= \pi \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} \left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)$ $= \frac{2\pi}{3}h^2$ (b) 當 $V = \frac{64\pi}{9}$, $\frac{\pi}{9}h^3 = \frac{64\pi}{9}$ $h = 4$ 當 $h = 4$, $V = \frac{\pi}{9}h^3$ $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9}(3h^2) \frac{dh}{dt}$ $8\pi = \frac{\pi}{9}(48) \frac{dh}{dt}$ $\frac{dh}{dt} = \frac{3}{2}$ 同時 , $\frac{dA}{dt} = \left(\frac{4\pi}{3}h\right) \frac{dh}{dt}$ $= \frac{16\pi}{3} \left(\frac{3}{2}\right)$ $= 8\pi$ 所求之率為 $8\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ 。	1M 1 1 1A 1M 1M 1A

解	分
8. (a) $\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$ $= \frac{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \left(\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\right) \tan x}$ $= \frac{2 \tan x + \tan x(1 - \tan^2 x)}{1 - \tan^2 x - 2 \tan^2 x}$ $= \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$ (b) $\tan 2x = \cot 3x$ $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1 - 3 \tan^2 x}{3 \tan x - \tan^3 x}$ $2 \tan x(3 \tan x - \tan^3 x) = (1 - 3 \tan^2 x)(1 - \tan^2 x)$ $6 \tan^2 x - 2 \tan^4 x = 1 - 4 \tan^2 x + 3 \tan^4 x$ $5 \tan^4 x - 10 \tan^2 x + 1 = 0$ (c) $\tan 2x = \cot 3x$ $5 \tan^4 x - 10 \tan^2 x + 1 = 0$ $\tan^2 x = \frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}$ $\tan x = \sqrt{\frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}}$ $x \approx 0.314 \quad \text{或} \quad 0.942$	1M 1M 1 1M 1M 1 1A 1A

$$9. (a) (i) f'(x) = \frac{162(x+1)^3 - 162(x-1)(3)(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$= \frac{324(2-x)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-324(x+1)^4 - 324(2-x)(4)(x+1)^3}{(x+1)^8}$$

$$= \frac{972(x-3)}{(x+1)^5}$$

(ii) 當 $f'(x) = 0$, $x = 2$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	+	-

極大點為 $(2, 6)$ 。

沒有極小點。

當 $f''(x) = 0$, $x = 3$ 。

x	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	+	-	+

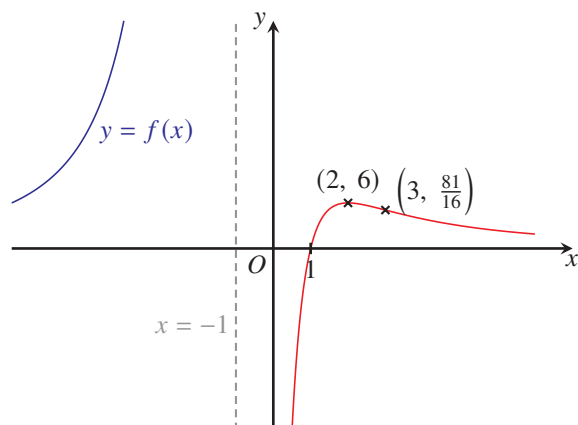
拐點為 $(3, \frac{81}{16})$ 。

(b) 垂直漸近線為 $x = -1$ 。

水平漸近線為 $y = 0$ 。

(c) (形狀、極值點及拐點)

(全部正確)



(d) 設 $u = x + 1$ 。則 $du = dx$ 。

$$\text{體積} = \pi \int_0^1 \left[\frac{162(x-1)}{(x+1)^3} \right]^2 dx$$

$$= 26\,244\pi \int_1^2 \frac{(u-2)^2}{u^6} du$$

$$= 26\,244\pi \int_1^2 (u^{-4} - 4u^{-5} + 4u^{-6}) du$$

$$= 26\,244 \left[\frac{u^{-3}}{-3} + u^{-4} - \frac{4u^{-5}}{5} \right]_1^2$$

$$= \frac{67\,797\pi}{20}$$

解	分
10. (a) (i) $\cos^4 x \sin^2 x = \cos^2 x \left(\frac{2 \sin x \cos x}{2} \right)^2$ $= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{\sin^2 2x}{4} \right)$ $= \frac{\sin^2 2x + \cos 2x \sin^2 2x}{8}$ (ii) 設 $x = \frac{\pi}{2} - u$。則 $dx = -du$。 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x \, dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - u \right) du$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u \sin^2 u \, du$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2u + \cos 2u \sin^2 2u}{8} du$ $= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4u) du + \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u \, d(\sin 2u)$ $= \frac{1}{16} \left[u - \frac{\sin 4u}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{16} \left[\frac{\sin^3 2u}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{\pi}{32}$	1M 1 1M 1M+1M 1A
(b) (i) 設 $x = k - u$。則 $dx = -du$。 $\int_0^k f(x) \, dx = \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) \, dx + \int_{\frac{k}{2}}^k f(x) \, dx$ $= \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) \, dx - \int_{\frac{k}{2}}^0 f(k - u) \, du$ $= \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) \, dx + \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) \, dx$ $= 2 \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) \, dx$ (ii) 設 $x = k - w$。則 $dx = -dw$。 $\int_0^k xf(x) \, dx = - \int_k^0 (k - w)f(k - w) \, dw$ $= k \int_0^k f(w) \, dw - \int_0^k wf(w) \, dw$ $= k \int_0^k f(x) \, dx - \int_0^k xf(x) \, dx$ $2 \int_0^k xf(x) \, dx = k \int_0^k f(x) \, dx$ $\int_0^k xf(x) \, dx = \frac{k}{2} \int_0^k f(x) \, dx$ $= k \int_0^{\frac{k}{2}} f(x) \, dx$	1M 1 1M 1

解	分
(iii) 設 $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$ 。	
則 $f(\pi - x) = \cos^4(\pi - x) \sin^2(\pi - x) = \cos^4 x \sin^2 x = f(x)$ 。	1M
體積 $= \pi \int_0^{\pi} x \sin^4 x \cos^2 x \, dx$	1M
$= \pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x \, dx$	
$= \frac{\pi^3}{32}$	1A

$$11. \quad (a) \quad (i) \quad \begin{pmatrix} a & -3 \\ -3 & a+8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+9 \\ -3a-27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -3\lambda \end{pmatrix}$$

可得 $\lambda = a + 9$ 。

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} a & -3 \\ -3 & a+8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ab-3 \\ -3b+a+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu b \\ \mu \end{pmatrix}$$

可得 $ab - 3 = \mu b$ 及 $-3b + a + 8 = \mu$ 。

$$ab - 3 = (-3b + a + 8)b$$

$$3b^2 - 8b - 3 = 0$$

$$b = 3 \quad \text{或} \quad -\frac{1}{3} \quad (\text{捨去})$$

$$\mu = -3(3) + a + 8 = a - 1$$

$$(iii) \quad (1) \quad M^T M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

(2) 當 $n = 1$ ，

$$\text{右式} = \frac{1}{10} M D M^T$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+9 & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} a+9 & 3a-3 \\ -3a-27 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & -3 \\ -3 & a+8 \end{pmatrix}$$

對 $n = 1$ ，命題為真。

假設 $A^k = \frac{1}{10} M D^k M^T$ ，其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

$$A^{k+1} = A^k A$$

$$= \frac{1}{10} M D^k M^T \left(\frac{1}{10} M D M^T \right)$$

$$= \frac{1}{100} M D^k (M^T M) D M^T$$

$$= \frac{1}{100} M D^k (10I) D M^T$$

$$= \frac{1}{10} M D^{k+1} M^T$$

對 $n = k + 1$ ，命題為真。

藉數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ，命題為真。

1A

1M

1A

1A

1

1

1M

1

解	分
(iv) 代 $a = 2$，則 $\lambda = 11$、$\mu = 1$ 及 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$。 $(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}^{2019} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ $(x \ y) \left(\frac{1}{10} MDM^T \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ $\frac{1}{10} (x - 3y \quad 3x + y) \begin{pmatrix} 11^{2019} & 0 \\ 0 & 1^{2019} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 3y \\ 3x + y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ $(11^{2019}(x - 3y) \quad 3x + y) \begin{pmatrix} x - 3y \\ 3x + y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ $(11^{2019}(x - 3y)^2 + (3x + y)^2) = \mathbf{0}$ 可得 $11^{2019}(x - 3y)^2 + (3x + y)^2 = 0$。 因此，$x - 3y = 0$ 及 $3x + y = 0$。 求解後，可得 $x = y = 0$。	1M 1M 1

12. (a) (i) $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

$$\overrightarrow{AC} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$$

1A

(ii) 設 $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ 。

$$\overrightarrow{AD} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{ED} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n})$$

1M

$$= \frac{2 + 10}{2^2 + 2^2} (\mathbf{n})$$

$$= 3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$$

1A

(iii) 所求體積 = $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| (ED)$

1M

$$= \frac{1}{6} \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2}$$

$$= 2$$

1A

(b) (i) $\overrightarrow{BF}$ 為 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 的投影。

$$\overrightarrow{BD} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{BA} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{BF} = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA}} (\overrightarrow{BA})$$

1M

$$= -\frac{11}{3}\mathbf{i} - \frac{11}{3}\mathbf{j} + \frac{11}{3}\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DB}$$

1M

$$= -\frac{8}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{10}{3}\mathbf{k}$$

1A

(ii) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BF} \cdot (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF})$

1M

$$= \left(-\frac{11}{3}\mathbf{i} - \frac{11}{3}\mathbf{j} + \frac{11}{3}\mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \right)$$

$$= 0$$

因此， $\overrightarrow{BF}$ 垂直於 $\overrightarrow{EF}$ 。

1A

(c) 所求之角為 $\angle DFE$ 。

1M

$$\sin \angle DFE = \frac{ED}{DF}$$

$$= \frac{\sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2}}{\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2}}$$

1M

$$= \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

$$\angle DFE = \sin^{-1} \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

1A